ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.21+519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-158-168

Поступила в редакцию 29.03.2019
Received 29.03.2019

А. Д. Егоров

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск. Беларусь

О СОСТАВНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ИТО В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Данная работа посвящена построению составных приближенных формул для вычисления математического ожидания нелинейных функционалов от решения линейного уравнения Ито в гильбертовом пространстве с аддитивным шумом. В качестве ведущего процесса рассматривается винеровский процесс, принимающий значения в гильбертовом пространстве. Формулы представляют собой сумму аппроксимаций нелинейных функционалов, полученных разложением ведущего случайного процесса в ряд независимых гауссовских случайных величин, и корректирующих аппроксимирующих функциональных квадратурных формул, обеспечивающих точность составных формул для полиномов третьего порядка. В качестве тестового примера рассмотрено применение полученных формул к случаю одномерного по пространственной переменной волнового уравнения с ведущим винеровским процессом, индексированным пространственной и временной переменными.

Ключевые слова: стохастические уравнения в гильбертовом пространстве, математические ожидания функционалов от решений, составные приближенные формулы, стохастическое волновое уравнение

Для цитирования. Егоров, А. Д. О составных формулах для математического ожидания функционалов от решения уравнения Ито в гильбертовом пространстве / А. Д. Егоров // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 158–168. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-158-168

A. D. Egorov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ON COMPOSITE FORMULAS FOR MATHEMATICAL EXPECTATION OF FUNCTIONALS OF SOLUTION OF THE ITO EQUATION IN HILBERT SPACE

Abstract. This article is devoted to constructing composite approximate formulas for calculation of mathematical expectation of nonlinear functionals of solution of the linear Ito equation in Hilbert space with additive noise. As the leading process, the Wiener process taking values in Hilbert space is examined. The formulas are a sum of the approximations of the nonlinear functionals obtained by expanding the leading random process into a series of independent Gaussian random variables and correcting approximating functional quadrature formulas that ensure an approximate accuracy of compound formulas for third-order polynomials. As a test example, the application of the obtained formulas to the case of a one-dimensional wave equation with a leading Wiener process indexed by spatial and temporal variables is considered. This article continues the research begun in [1].

The problem is motivated by the necessity to calculate the nonlinear functionals of solution of stochastic partial differential equations. Approximate evaluation of mathematical expectation of stochastic equations with a leading random process indexed only by the time variable is considered in [2–11]. Stochastic partial equations in various interpretations are considered [12–16]. The present article uses the approach given in [12].

Keywwords: stochastic differential equations in Hilbert space, mathematical expectation of functionals of solution, composite approximate formulas

For citation. Egorov A. D. On composite formulas for mathematical expectation of functionals of solution of the Ito equation in Hilbert space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 158–168 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-158-168

Введение. В [1] получены приближенные формулы для вычисления математических ожиданий функционалов от решений линейных уравнений Ито в гильбертовом пространстве с ведущим винеровским процессом. В данной работе исследуется вопрос построения на основе полученных в [1] формул составных приближенных формул, сходящихся к точным значениям ожиданий, и исследования их сходимости. Построены приближенные формулы для ожиданий функционалов от решения для линейных уравнений с аддитивным шумом, аппроксимационно точные для функциональных многочленов. В качестве тестового примера рассмотрено применение полученных формул к вычислению математического ожидания функционалов от решения одномерного по пространственной переменной волнового уравнения, возмущенного винеровским процессом, индексированным пространственной и временной переменными. Вопросы вычисления математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с ведущим случайным процессом, индексированным временной переменной, изучались в [2–11]. Случай ведущего процесса с пространственно-временной индексацией впервые рассмотрен в [1] и требует дальнейшей разработки в связи с интенсивными исследованиями уравнений этого типа и их применением в стохастических задачах математической физики [12–16]. Необходимые для чтения настоящей статьи сведения из теории стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах, можно найти в [12].

Пусть U – сепарабельное гильбертово пространство, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $W = W(t,\omega)$, $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, Q – винеровский случайный процесс, принимающий значения в U (см. [12]). В [12] показано, что имеет место представление (которое в ряде работ используется в качестве определения)

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(t) e_k, \tag{1}$$

где

$$\beta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left(W(t), e_k \right)_U, \ k = 1, 2, \ldots,$$

– вещественнозначные взаимно независимые непрерывные винеровские процессы, λ_k, e_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – собственные значения и ортонормированные собственные векторы оператора Q, образующие базис в U.

Заметим, что ряд (1) сходится п.н. в $L_2\left(\Omega, C([0,T], U)\right)$ (см. [13]).

Обозначим

$$\langle \xi, W \rangle = \int_0^T \left(\xi(t), W(t) \right)_U dt,$$

где $\xi = \xi(t) \left(t \in [0,T] \right)$ – функция, принимающая значения в U, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T \left\| Q^{1/2} \xi(t) \right\|_U^2 dt < \infty.$$

Тогда, используя (1), можно вычислить

$$E\left[\exp\left\{ i \langle \xi, W \rangle \right\} \right] = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(K\xi, \xi \right)_{C[0,T] \otimes U} \right\}, \tag{2}$$

где

$$\left(K\xi, \eta \right)_{C[0,T] \otimes U} = \left(RQ\xi, \eta \right)_{C[0,T] \otimes U} = \int_0^T \int_0^T \min(t,s) \left(Q\xi(t), \eta(s) \right)_U dtds; \tag{3}$$

K – линейный оператор в $C[0,T] \otimes U$, заданный ядром $B(t,s) = \min(t,s) (Q\cdot,\cdot)_U$ процесса.

Рассматривается линейное стохастическое дифференциальное уравнение Ито в сепарабельном гильбертовом пространстве с ведущим Q-винеровским процессом:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t AX(s)\,ds + BW_t, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $A : D(A) \subset H \to H$ и $B : U \to H$ – линейные операторы. Предполагается, что соответствующая детерминированная задача $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = x_0 \in H$, хорошо поставлена, т. е. оператор A генерирует сильно непрерывную полугруппу $S(\cdot)$ в H. Предсказуемый H-значный случайный процесс $X(t)$, $t \in [0,T]$, называется слабым решением уравнения (1), если почти все его траектории интегрируемы по Бохнеру и для всех $\varsigma \in D(A^*)$ и всех $t \in [0,T]$ имеет место равенство

$$\langle X(t), \varsigma \rangle = \langle x_0, \varsigma \rangle + \int_0^t \langle X(s), A^*\varsigma \rangle\, ds + \langle BW_t, \varsigma \rangle \text{ п.н.} \tag{5}$$

В предположении

$$\int_0^T \|S(r)B\|^2_{L_2(U_0,H)}\,dr = \int_0^T \mathrm{Tr}\left[S(r)BQB^*S^*(r)\right]dr < \infty, \tag{6}$$

где $L_2(U_0,H)$ – пространство всех операторов Гильберта – Шмидта из U_0 в H, $U_0 = Q^{1/2}(U) \subset U$ – гильбертово подпространство со скалярным произведением $(u,v)_0 = \left(Q^{-1/2}u,\ Q^{-1/2}v\right)_U$, B^*, S^* – сопряженные операторы, уравнение (4) имеет единственное слабое решение, которое дается формулой (см. [12])

$$X(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)BdW_s, \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

В предположении (6) процесс (7) является гауссовским, имеет непрерывные относительно среднеквадратичной нормы $E\left[\int_0^T \|X_t\|^2_H dt\right]$ траектории, и ковариационный оператор имеет вид [12]

$$\mathcal{K}\varphi(\mathrm{t}) = \int_0^T g(t,s)\varphi(s)\,ds, \quad g(t,s) = \int_0^{t\wedge s} S(t-r)BQB^*S^*(s-r)\,dr. \tag{8}$$

В настоящей работе рассматривается задача построения приближенных формул для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов

$$E\left[F\left(X_{(\cdot)}\right)\right] = E\left[F\left(\hat{X}_{(\cdot)} + m(\cdot)\right)\right], \tag{9}$$

где

$$\hat{X}_t = \int_0^t S(t-s)BdW_s, \quad m \equiv m(t) = S(t)x_0.$$

Формулы строятся, исходя из требования их точности для функциональных многочленов от траекторий решения $X = X(t,\omega)$:

$$P_n(X) = p_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty} c_{j_1,\ldots,j_k} \prod_{l=1}^k \langle \xi_{j_l}, X \rangle, \quad n = 0,1,2,3, \tag{10}$$

где

$$\langle \xi_{j_l}, X \rangle = \int_0^T \left(\xi_{jl}(t), X(t)\right)_H dt, \quad \xi_{j_l}(t) \in L^2\left([0,T], D(A^*)\right);\ p_0,\ c_{j_1,\ldots,j_k}$$

– константы. Такие формулы могут быть использованы для вычисления ожиданий функционалов, которые аппроксимируются функциональными многочленами [2, 4]. Из (10) видно, что для выполнения точности приближенных формул для многочленов (10) достаточно потребовать их точность для константы p_0 и мономов

$$\prod_{l=1}^{k}\left\langle \xi_{j_l}, \hat{X}\right\rangle,\ k=1,2,3.$$

Поскольку $\hat{X}_{(\cdot)}$ является гауссовским процессом с нулевым средним значением и ковариационным оператором (9), точные значения ожиданий от мономов равны нулю для нечетного k и

$$E\left[\left\langle \xi, \hat{X}\right\rangle\left\langle \eta, \hat{X}\right\rangle\right]=\left(\mathcal{K}\xi,\eta\right)_{L_2([0,T],H)}=\int_0^T\int_0^T\left(g(t,s)\xi(s),\eta(t)\right)_H dtds=$$

$$=\int_0^T\int_0^T\int_0^{t\wedge s}\left(S(t-r)BQB^*S^*(s-r)\xi(s),\eta(t)\right)_H drdtds=$$

$$=\int_0^T\int_0^T\int_0^{t\wedge s}\left(Q^{1/2}B^*S^*(s-r)\xi(s),Q^{1/2}B^*S^*(t-r)\eta(t)\right)_{U_0} drdtds. \qquad (11)$$

З а м е ч а н и е. Поскольку при вычислении аппроксимирующих выражений в построенных ниже приближенных формулах приходится ограничиваться конечной суммой ряда, мы называем построенные формулы аппроксимационно точными для функциональных многочленов.

Основные результаты. Для вычисления математических ожиданий (9) приведем вначале приближенные формулы, которые мы называем элементарными.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $X(t)$ *– слабое решение стохастического уравнения* (4)*, заданное формулой* (7)*. Тогда имеет место следующая приближенная формула, которая является аппроксимационно* (*при* $N\to\infty$) *точной в случае, когда* F *является функциональным многочленом вида* (10) *степени* $n\le 3$:

$$E\left[F\left(X_{(\cdot)}\right)\right]\approx J_N(F)\equiv\left(1-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\right)F(0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k}{2T}\int_{-T}^{T}F\left(1_{[0,\cdot]}(|u|)\operatorname{sign}(u)S(\cdot-|u|)Be_k+S(\cdot)x_0\right)du. \qquad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить точность формулы для мономов второй степени, поскольку случаи $k = 0,1,3$ проверяются тривиально. Для $k = 2$ будем иметь

$$J\left(\left\langle \xi,\hat{X}\right\rangle\left\langle \eta,\hat{X}\right\rangle\right)=J\left(\langle \xi,X-m\rangle\langle \eta,X-m\rangle\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{2T}\int_{-T}^{T}\left\langle \xi,1_{[0,\cdot]}(|u|)\operatorname{sign}(u)S(\cdot-|u|)Be_k\right\rangle\left\langle \eta,1_{[0,\cdot]}(|u|)\operatorname{sign}(u)S(\cdot-|u|)Be_k\right\rangle du=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{T}\int_0^T\left(\int_0^T 1_{[0,t]}(u)\left\langle \xi(t),S(t-u)Be_k\right\rangle dt\right)\left(\int_0^T 1_{[0,t]}(u)\left\langle \eta(t),S(t-u)Be_k\right\rangle dt\right)du=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{T}\int_0^T\int_0^T\int_0^T 1_{[0,t]}(u)1_{[0,s]}(|u|)\left\langle \xi(t),S(t-u)Be_k\right\rangle\left\langle \eta(s),S(s-u)Be_k\right\rangle dudtds=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{T}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t\wedge s}\left\langle B^*S^*(t-u)\xi(t),e_k\right\rangle\left\langle B^*S^*(s-u)\eta(s),e_k\right\rangle dudtds=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t\wedge s}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left\langle B^*S^*(t-u)\xi(t),e_k\right\rangle\left\langle B^*S^*(s-u)\eta(s),e_k\right\rangle dudtds=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t\wedge s}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle B^*S^*(t-u)\xi(t),Q^{1/2}e_k\right\rangle\left\langle B^*S^*(s-u)\eta(s),Q^{1/2}e_k\right\rangle dudtds=$$

$$=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t\wedge s}\left(Q^{1/2}B^*S^*(t-u)\xi(t),Q^{1/2}B^*S^*(s-u)\eta(s)\right)_{U_0}dudtds,$$

что совпадает с правой частью (11).

Перейдем к построению составных формул. Введем обозначения:

$$W_N(t)=\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)e_k,$$

$$X_N(t)=S(t)x_0+\int\limits_0^t S(t-s)BdW_N(s)=S(t)x_0+\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\lambda_k}\int\limits_0^t S(t-s)Be_k\,d\beta_k(s),$$

и используем аппроксимации

$$1_{[0,t]}(s)S(t-s)Be_k=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_0^T 1_{[0,t]}(\tau)S(t-\tau)Be_k\alpha_j(\tau)d\tau\,\alpha_j(s),$$

$$X_{N,n}(t)=S(t)x_0+\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\lambda_k}\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}\int\limits_0^t S(t-s)Be_k\,\alpha_j(s)ds,$$

где $\alpha_j(\tau)$, $j=1,2,\ldots,$ – полная ортонормированная система в $L_2[0,T]$, $\xi_{kj}=\int\limits_0^T\alpha_j(\tau)d\beta_k(\tau)$. Заметим, что ξ_{kj} являются взаимно независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами.

Определим

$$I_{N,n}(F)=E\left[F\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}\int\limits_0^{(\cdot)}S(\cdot-s)BQ^{\frac{1}{2}}e_k\alpha_j(s)ds+S(\cdot)x_0\right)\right],\tag{13}$$

$$J_{N,n}(F)=\left(1-T\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\right)F(0)+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\int\limits_0^T\Delta F\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(u)\int\limits_0^{(\cdot)}S(\cdot-s)Be_k\alpha_j(s)ds+S(\cdot)x_0\right)du.\tag{14}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть X(t) – слабое решение стохастического уравнения* (4), *заданное формулой* (7), *и выполнены условия непрерывности функционала F относительно* $L_2\left(\Omega\times[0,T],L_2(U_0,H)\right)$ *сходимости в пространстве траекторий решения. Тогда имеет место следующая приближенная формула, сходящаяся к точному значению при N, n* $\to\infty$:

$$E\left[F\left(X_{(\cdot)}\right)\right]\approx J_{N,n}(F)\equiv I_{N,n}(F)-J_{N,n}(F)+J_N(F),\tag{15}$$

где $J_N(F)$, $I_{N,n}(F)$, $J_{N,n}(F)$ *задаются формулами* (12)–(14) *соответственно. Формула аппроксимационно точна (при* $N\to\infty$*) для функциональных многочленов вида* (10) *степени* $n\le 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о точности формулы для функциональных многочленов проводится непосредственным вычислением правой части (15) для функционалов

$$\prod_{l=1}^{k}\left\langle\xi_{j_l},\hat{X}\right\rangle,\quad k=1,2,3.$$

Проверим точность формулы для мономов второго порядка:

$$J_{N,n}\left(\left\langle\xi_1,\hat{X}\right\rangle\left\langle\xi_2,\hat{X}\right\rangle\right)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T\left(\xi_1(t),\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(u)\int\limits_0^t S(t-s)Be_k\alpha_j(s)ds\right)_H dt\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^T\left(\xi_2(t),\sum_{j=0}^n\alpha_j(u)\int_0^t S(t-s)Be_k\alpha_j(s)ds\right)_H dt\right)du=$$

$$=\sum_{k=1}^N\lambda_k\sum_{j=0}^n\left(\int_0^T\left(\xi_1(t),\int_0^t S(t-s)Be_k\alpha_j(s)ds\right)dt_H\right)\left(\int_0^T\left(\xi_2(t),\int_0^t S(t-s)Be_k\alpha_j(s)ds\right)dt_H\right),$$

что совпадает с точным значением

$$I_{N,n}\left(\left\langle\xi_1,\hat{X}\right\rangle\left\langle\xi_2,\hat{X}\right\rangle\right)=E\left[\int_0^T\left(\xi_1(t),\hat{X}_{N,n}(t)\right)_H dt\int_0^T\left(\xi_2(t),\hat{X}_{N,n}(t)\right)_H dt\right]=$$

$$=E\left[\int_0^T\left(\xi_1(t),\sum_{k=1}^N\sqrt{\lambda_k}\sum_{j=1}^n\xi_{kj}\int_0^t\alpha_j(s)S(t-s)Be_k\,ds\right)_H dt\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T\left(\xi_2(t),\sum_{k=1}^N\sqrt{\lambda_k}\sum_{j=1}^n\xi_{kj}\int_0^t\alpha_j(s)S(t-s)Be_k\,ds\right)_H dt\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^N\lambda_k\sum_{j=1}^n\left\{\int_0^T\left(\xi_1(t),\int_0^t\alpha_j(s)S(t-s)Be_k ds\right)_H dt\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T\left(\xi_2(t),\int_0^t\alpha_j(s)S(t-s)Be_k ds\right)_H dt\right\}.$$

Сходимость следует из непрерывности функционала и соотношений

$$X(t)-X_{N,n}(t)=\left(X(t)-X_N(t)\right)+\left(X_N(t)-X_{N,n}(t)\right)\to 0,$$

где $X(t)\to X_N(t)$ при $N\to\infty$, $X_{N,n}(t)\to X_N(t)$ в $L_2\left(\Omega\times[0,T],L_2(U_0,H)\right)$ и $J_{N,n}(F)\to J_N(F)$ при $n\to\infty$ и фиксированном N. Покажем справедливость последнего соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}J_{N,n}(F)=\left(1-T\sum_{k=1}^N\lambda_k\right)F(0)+$$

$$+\sum_{k=1}^N\lambda_k\int_0^T\Delta F\left(\sum_{j=0}^\infty\alpha_j(u)\int_0^T 1_{[0,\cdot]}(s)S(\cdot-s)Be_k\alpha_j(s)ds+S(\cdot)x_0\right)du=$$

$$=\left(1-T\sum_{k=1}^N\lambda_k\right)F(0)+\sum_{k=1}^N\lambda_k\int_0^T\Delta F\left(1_{[0,\cdot]}(u)S(\cdot-u)Be_k+S(\cdot)x_0\right)du\equiv J_N(F).$$

Далее рассмотрим применение полученной формулы к вычислению математического ожидания функционала от решения стохастического волнового уравнения

$$\begin{aligned}&dy_t(t,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(t,x)dt+dW_t,\\&y(0,x)=\varphi(x),\ \ y_t(0,x)=\psi(x),\\&y(t,x)=0\text{ для }t>0,\ x\in\partial\mathcal{O},\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$y_t=\frac{dy(t,x)}{dt},\ \ \varphi(x),\psi(x)\in\mathcal{O},$$

$\mathcal{O}$ – ограниченное множество в $U=L^2(R)$, и уравнение определено как уравнение вида (4):

$$X(t) = x_0 + \int_0^t AX(s)\,ds + BW_t, \tag{17}$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t,x) \\ y_t(t,x) \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda = -\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

оператор B определяется равенством

$$BW_t = \begin{pmatrix} 0 \\ W(t) \end{pmatrix}.$$

Для простоты изложения будем рассматривать частный случай, когда U – подпространство функций из $L^2(R)$, обращающихся в нуль вне отрезка $(0,l)$, $T = 1$ и $e_k = e_k(x)$ – собственные функции оператора Λ. То есть мы предполагаем, что оператор Q имеет те же собственные функции, что и оператор Λ. Решение уравнения (17) определяется формулой (7), в которой $S(t)$ имеет следующий вид (см. [12]):

$$S(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right) & \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right) \\ \sqrt{\Lambda}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right) & \cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right) \end{pmatrix},\quad \cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^{2m}\Lambda^m}{(2m)!},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^{2m+1}\Lambda^m}{(2m+1)!}.$$

Отсюда следует, что решение уравнения (16) имеет вид

$$y(t,x) = \cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\psi(x) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)dW(s),$$

$$y_t(t,x) = \sqrt{\Lambda}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\varphi(x) + \cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\psi(x) + \int_0^t \cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)dW(s).$$

С учетом вышесказанного будем иметь:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)dW(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)e_k(x)\,d\beta_k(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sqrt{\lambda_k}\frac{1}{(2m+1)!}\Lambda^m e_k(x)\int_0^t (t-s)^{2m+1}d\beta_k(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sqrt{\lambda_k}\frac{\nu_k^m}{(2m+1)!}e_k(x)\int_0^t (t-s)^{2m+1}d\beta_k(s),$$

$$\int_0^t \cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)dW(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\int_0^t \cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)e_k(x)\,d\beta_k(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sqrt{\lambda_k}\frac{1}{(2m)!}\Lambda^m e_k(x)\int_0^t (t-s)^{2m}d\beta_k(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sqrt{\lambda_k}\frac{\nu_k^m}{(2m)!}e_k(x)\int_0^t (t-s)^{2m}d\beta_k(s),$$

где ν_k – собственное значение, соответствующее собственной функции $e_k(x)$ оператора Λ.

Нашей задачей является вычисление математического ожидания функционала

$$F\left(X_{(\cdot)}\right)=\exp\left\{\lambda\int_0^l \xi(x)X(t,x)\,dx\right\}=\exp\left\{\lambda\int_0^l \xi(x)\left(y(t,x)+y_t(t,x)\right)dx\right\}, \tag{18}$$

где

$$\xi(x)=g(x)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

в обозначениях уравнения (17), $\lambda>0;\ t\in[0,1]$. Вычислим точное значение ожидания:

$$E\left[F\left(X_{(\cdot)}\right)\right]=E\left[\exp\left\{\lambda\int_0^l g(x)\left(\cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\psi(x)+\right.\right.\right.$$

$$+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)dW(s)+\sqrt{\Lambda}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\varphi(x)+$$

$$\left.\left.\left.+\cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\psi(x)+\int_0^t\cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)dW(s)\right)dx\right\}\right]=$$

$$=I_0E\left[\exp\left\{\lambda\int_0^l g(x)\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)+\cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)\right)dW(s)\,dx\right\}\right]=I_0I, \tag{19}$$

где введены обозначения

$$I_0=\exp\left\{\lambda\int_0^l g(x)\left(\cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\psi(x)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\Lambda}\sin\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\varphi(x)+\cos\left(\sqrt{\Lambda}t\right)\psi(x)\right)dx\right\},$$

$$I=E\left[\exp\left\{\lambda\int_0^l g(x)\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)+\cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-s)\right)\right)dW(s)\,dx\right\}\right].$$

Вычислим I из (19):

$$I=\prod_{k=1}^{\infty}E\left[\exp\left\{\lambda\sqrt{\lambda_k}\int_0^t f_k(t,s)\,d\beta_k(s)\right\}\right]=\prod_{k=1}^{\infty}\exp\left\{\frac{\lambda^2\lambda_k}{2}\int_0^t f_k^2(t,s)\,ds\right\}, \tag{20}$$

$$f_k(t,s)=\int_0^l g(x)e_k(x)\,dx\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\nu_k^m\left(\frac{(t-s)^{2m+1}}{(2m+1)!}+\frac{(t-s)^{2m}}{(2m)!}\right). \tag{21}$$

Далее имеем:

$$J_N(F)\equiv I_0\left(1-t\sum_{k=1}^N\lambda_k\right)e^0+$$

$$+I_0\sum_{k=1}^N\frac{\lambda_k}{2}\int_0^t\left(\exp\left\{\lambda\int_0^l g(x)\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-u)\right)+\cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-u)\right)\right)e_k(x)\,dx\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-\lambda\int_0^l g(x)\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\sqrt{\Lambda}(t-u)\right)+\cos\left(\sqrt{\Lambda}(t-u)\right)\right)e_k(x)\,dx\right\}\right)du=$$

$$= I_0\left(\left(1 - t\sum_{k=1}^{N}\lambda^k\right)e^0 + \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k}{2}\int_0^t\left(\exp\{\lambda f_k(t,u)\} - \exp\{-\lambda f_k(t,u)\}\right)du\right); \tag{22}$$

$$J_{N,n}(F) = I_0\left(1 - t\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\right) + I_0\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k}{2}\int_0^t\left(\exp\left\{\lambda\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(u)\int_0^t f_{kj}(t,s)ds\right\} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \exp\left\{-\lambda\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(u)\int_0^t f_{kj}(t,s)ds\right\}\right)du\right), \tag{23}$$

где $f_{kj}(t,s) = f_k(t,s)\alpha_j(s)$, $f_k(t,s)$ задано (21),

$$\alpha_j(s) = \sqrt{\frac{2}{t}}\sin\left(\frac{(j-1)\pi s}{t}\right), \; j \ge 2, \; \alpha_1(s) = 1/\sqrt{t};$$

$$I_{N,n}(F) = I_0 E\left[\exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}\sqrt{\lambda_k}\int_0^t f_{kj}(t,s)ds\right\}\right] = I_0\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^t f_{kj}(t,s)ds\right)^2\right\}. \tag{24}$$

Заметим, что при $n \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_{kj}(t,s)ds\right)^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_k(t,s)\alpha_j(s)ds\right)^2 = \int_0^t f_k^2(t,s)ds,$$

и

$$I_0\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_{kj}(t,s)ds\right)^2\right\} = I_0\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\int_0^t f_k^2(t,s)ds\right\}$$

сходится к точному значению (см. (20)) при $N \to \infty$.

Численные результаты. Приведем численный пример, иллюстрирующий применение полученных формул. Пусть в уравнении (16) и (17)

$$y(t,0) = y(t,l) = 0, \; y(0,x) = 0, \; y_t(0,x) = \psi(x) = \sin(x), \; l = \pi; \; t = 0{,}5;$$

$$e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \; \nu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1,2,\ldots,$$

– ортонормированные собственные функции и соответствующие собственные значения оператора

$$\Lambda = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}; \; \lambda_k = \frac{1}{k^2}; \; g(x) = \sum_{r=1}^{4}\frac{1}{r^k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx).$$

Точное значение, вычисленное по формулам (19)–(20), равно $I_N = 1{,}0722031$; значение по формуле третьей степени точности (22) равно $J_N = 1{,}0721548$.

Результаты вычислений приближенных значений, полученных по формулам (23), (24) и соответствующей составной формуле (15), представлены в таблице.

Приближенные значения	n				
	2	4	6	8	10
$I_{N,n}$, формула (24)	1,0721978	1,0722026	1,0722300	1,0722031	1,0722031
$J_{N,n}$, формула (23)	1,0721495	1,0721542	1,0721546	1,0721547	1,0721547
Составная формула (15)	1,0722031	1,0722031	1,0722031	1,0722031	1,0722031

В приведенных значениях ожиданий мы ограничились семью цифрами после запятой, в то же время последующие полученные значащие цифры показывают сходимость $J_{N,n}$ к J_N и значений, полученных по составной формуле (15), к I_N при $n \to \infty$. Отметим, что в рассматриваемом случае значение I_N = 1,0722031 достигается при использовании составной формулы уже при $n = 2$, в то время как для аппроксимации $J_{N,n}$ при $n = 8$.

Заметим также, что значения $J_{N,n}$ получены точным вычислением входящих интегралов, хотя в общем случае применение рассматриваемых формул потребует вычисление интегралов кратности $n + 1$ методом Монте-Карло. Использование составной формулы в этой более сложной ситуации позволяет выделять детерминированный член в общей вероятностной оценке погрешности вычислений (см. [17] в случае вычисления континуальных интегралов).

Список использованных источников

1. Егоров, А. Д. Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения уравнения Ито в гильбертовом пространстве / А. Д. Егоров // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 7–13.

2. Egorov, A. D. Functional integrals: Approximate evaluations and applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Kluwer Academic Publishers, 1993. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6

3. Kloeden, P. E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations / P. E. Kloeden, E. Platen. – Berlin: Springer Science & Business Media, 2013. – 636 p.

4. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.

5. Egorov, A. D. Approximations of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Monte Carlo Methods and Applications. – 2004. – Vol. 10, № 3/4. – P. 257–264. https://doi.org/10.1515/mcma.2004.10.3-4.257

6. Egorov, A. D. Approximations for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov // Monte Carlo Methods and Applications. – 2007. – Vol. 13, № 4. – P. 275–185. https://doi.org/10.1515/mcma.2004.10.3-4.257

7. Egorov, A. D. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov, K. K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods and Applications. – 2010. – Vol. 16, № 2. – P. 95–127. https://doi.org/10.1515/mcma.2010.003

8. Milstein, G. N. Evaluation of conditional Wiener integrals by numerical integration of stochastic differential equations / G. N. Milstein, M. V. Tretyakov // J. Comput. Phys. – 2004. – Vol. 197, № 1. – P. 275–298. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.12.001

9. Dumas, W. M. Computing conditional Wiener integrals of functional of a general form / W. M. Dumas, M. V. Tretyakov // IMA J. Numerical Analysis. – 2011. – Vol. 31, № 3. – P. 1217–1251. https://doi.org/10.1093/imanum/drq008

10. Применение функциональных интегралов к стохастическим уравнениям / Э. А. Айрян [и др.] // Мат. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 11. – С. 113–125.

11. Egorov, A. A method for the calculation of characteristics for the solution to stochastic differential equations / A. Egorov, V. Malyutin // Monte Carlo Methods and Applications. – 2017. – Vol. 23, № 3. – P. 149–157. https://doi.org/10.1515/mcma-2017-0110

12. Da Prato, G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge University Press, 1992. – 454 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511666223

13. Gavarecki, G. V. Stochastic Differential Equations / G. V. Gavarecki, V. Mandrekar // Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions with Applications to Stochastic Partial Differential Equations. – Berlin: Springer, 2011. – P. 73–149. https://doi.org/10.1007/978-3-642-16194-0_3

14. A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations / R. S. Dalang [et al.]. – Springer, 2006. – 222 p.

15. Hairer, M. An Introduction to Stochastic PDEs / M. Hairer. – The University of Warwick/Courant Institute, 2009. – 78 p.

16. Jentzen, A. Taylor Approximations for Stochastic Partial Differential Equations / A. Jentzen, P. E. Kloeden. – Philadelphia: SIAM Press, 2011. – 235 p. https://doi.org/10.1137/1.9781611972016

17. Лиходед, Н. А. Уточнение монте-карловской оценки континуальных интегралов / Н. А. Лиходед // Вес. Акад. навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 2.– С. 8–13.

References

1. Egorov A. D. Approximate formulas for calculating the mathematical expectation of functionals of solution of the Ito equations in a Hilbert space. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 7–13 (in Russian).

2. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional Integrals: Approximate Evaluations and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1993. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6

3. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin, Springer Science & Business Media, 2013. 636 p.

4. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction to Theory and Applications of Functional Integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian).

5. Egorov A. D., Zherelo A. V. Approximations of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2004, vol. 10, no. 3–4, pp. 257–264. https://doi.org/10.1515/mcma.2004.10.3-4.257

6. Egorov A. D. Approximations for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2007, vol. 13, no. 4, pp. 275–185. https://doi.org/10.1515/mcma.2004.10.3-4.257

7. Egorov A. D., Sabelfeld K. K. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications,* 2010, vol. 16, no. 2, pp. 95–127. https://doi.org/10.1515/mcma.2010.003

8. Milstein G. N., Tretyakov M. V. Evaluation of conditional Wiener integrals by numerical integration of stochastic differential equations, *Journal of Computational Physics,* 2004, vol. 197, no. 1, pp. 275–298. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.12.001

9. Dumas W. M., Tretyakov M. V. Computing conditional Wiener integrals of functional of a general form. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2011, vol. 31, no. 3, pp. 1217–1251. https://doi.org/10.1093/imanum/drq008

10. Airjan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Application of functional integrals to stochastic equations. *Matematicheskoe modelirovanie Mathematical Models and Computer Simulations,* 2017, vol. 9, no. 3, pp. 339–348. https://doi.org/10.1134/s2070048217030024

11. Egorov A., Malyutin V. A method for the calculation of characteristics for the solution to stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications,* 2017, vol. 23, no. 3, pp. 149–157. https://doi.org/10.1515/mcma-2017-0110

12. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, 1992. 454 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511666223

13. Gavarecki G. V., Mandrekar V. Stochastic Differential Equations. *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions with Applications to Stochastic Partial Differential Equations*. Berlin, Springer, 2011, pp. 73–149. https://doi.org/10.1007/978-3-642-16194-0_3

14. Dalang R. S., Khoshnevisan D., Mueller C., Nualart D., Xiao Y. A *Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations*. Springer, 2006. 222 p.

15. Hairer M. *An Introduction to Stochastic PDEs*. The University of Warwick/Courant Institute, 2009. 78 p.

16. Jentzen A., Kloeden P. E. *Taylor Approximations for Stochastic Partial Differential Equations*. Philadelphia, SIAM Press, 2011. 235 p. https://doi.org/10.1137/1.9781611972016

17. Likhoded N. A. Refinement of the Monte Carlo estimate of continual integrals. *Vescì Akademìì navuk BSSR. Seryâ fìzìka-matèmatyčnyh navuk* [Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series], 1990, no. 2, pp. 8–13 (in Russian).

Информация об авторе

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Information about the author

Alexandr D. Egorov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: egorov@im.bas-net.by