ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-169-175

Поступила в редакцию 20.03.2019
Received 20.03.2019

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии Беларуси, Минск, Беларусь

СПЕКТРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЦИКЛА В ГРАФЕ

Аннотация. Рассматривается графовый параметр – окружность графа – и его взаимосвязь с алгебраическими параметрами графа – собственными значениями матрицы смежности и беззнаковой матрицы Лапласа графа. Ранее нами были получены нижние оценки спектрального радиуса произвольного графа и двудольного сбалансированного графа для существования в нем гамильтонового цикла. Недавно была исследована задача существования цикла длины n – 1 в графе в зависимости от значений его вышеназванных спектральных радиусов. В настоящей работе изучается задача существования цикла длины n – 2 в графе в зависимости от нижних оценок значений его спектрального радиуса и спектрального радиуса его беззнакового лапласиана и получены спектральные условия существования максимального цикла в графе (двухсвязном графе).

Ключевые слова: окружность графа, минимальная и максимальная степени графа, матрица смежности, беззнаковая матрица Лапласа графа, спектральный радиус

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Спектральные условия существования максимального цикла в графе / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 169–175. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-169-175

V. I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

SPECTRAL CONDITIONS OF EXISTENCE OF THE GRAPH CIRCUMFERENCE

Summary. A graph parameter – a circumference of a graph – and its relationship with the algebraic parameters of a graph – eigenvalues of the adjacency matrix and the unsigned Laplace matrix of a graph – are considered in this article. Earlier we have obtained the lower estimates of the spectral radius of an arbitrary graph and a bipartitebalanced graph for existence of the Hamiltonian cycle in it. Recently the problem of existence of a cycle of length n – 1 in a graph depending on the values of its above-mentioned spectral radii has been investigated. This article studies the problem of existence of a cycle of length n – 2 in a graph depending on the lower estimates of the values of its spectral radius and the spectral radius of its unsigned Laplacian and the spectral conditions of existence of the circumference of a graph (2-connected graph) are obtained.

Keywords: circumference of graph, minimum and maximum degree, adjacency matrix, unsigned Laplacian of graph, spectral radius

For citation. Benediktovich V. I. Spectral conditions of existence of the graph circumference. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 169–175 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-169-175

Здесь всюду рассматриваются конечные неориентированные простые графы. Пусть $G=\big(V(G),E(G)\big)$ – простой граф порядка n. Две вершины u и v в графе G будем называть *смежными* и обозначать через $u\sim v$, если $uv\in E(G)$. Для каждой вершины $v\in V(G)$ его *степенью* называется мощность ее *окружения* $N(v)=\{u\in V(G)\,|\,u\sim v\}$ и обозначается через $\deg_G(v)$ или кратко – d_v. Через $\delta(G)$ обозначим *минимальную степень*, а через $\Delta(G)$ – *максимальную степень* вершин графа G. *Полный граф, цикл и цепь* порядка n обозначаются через K_n, C_n и P_n соответственно.

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G\cup H$ с множеством вершин $V(G)\cup V(H)$ и множеством ребер $E(G)\cup E(H)$. Если графы G и H не пересекаются ($V(G)\cap V(H)=\varnothing$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$.

Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H. $\overline{H}$ обозначает *дополнение* графа H. Для произвольного подмножества вершин $U \subset V(G)$ графа G $G[U]$ обозначает *индуцированный* этим множеством подграф в G. Мы рассматриваем только *простые* циклы, т. е. циклы, в которых ни одна вершина не встречается дважды. *Окружностью* графа G называется длина максимального цикла в графе G и обозначается через $c(G)$. Цикл, проходящий через все вершины графа G, называется *гамильтоновым*. Граф G, содержащий гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*. Граф G называется *панциклическим*, если он содержит все циклы длины от 3 до n.

Пусть G – граф с множеством вершин $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$. *Матрицей смежности* графа G $A(G) = (a_{ij})$ называется квадратная матрица порядка n, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } v_i v_j \in E(G), \\ 0, \text{ если } v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Следовательно, матрица $A(G)$ является симметрической действительной матрицей с нулями на главной диагонали и все ее *собственные значения* являются действительными числами. Они называются *собственными значениями* графа G и с учетом своих кратностей образуют его *спектр*. Упорядочим их по невозрастанию: $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq ... \geq \lambda_n(G)$. *Спектральным радиусом*, или *индексом*, графа G называется наибольшее собственное значение, которое по теореме Перрона – Фробениуса удовлетворяет неравенству $\lambda_1(G) \geq |\lambda_i(G)| \quad \forall i > 1$. Если граф G является связным, то спектральный радиус $\lambda_1(G)$ имеет кратность 1. Часто спектральный радиус графа G обозначают через $\rho(G) = \lambda_1(G)$.

Кроме матрицы смежности будем рассматривать *беззнаковую матрицу Лапласа* (или *беззнаковый лапласиан*) графа G: $Q(G) = A(G) + D(G)$, где $D(G)$ – диагональная матрица, состоящая из диагональных элементов, равных степеням вершин d_v графа G. Матрица $Q(G)$ является симметрической, положительно полуопределенной матрицей, а ее наибольшее собственное значение называется *спектральным радиусом беззнакового лапласиана* и обозначается через $q(G)$.

В последние два десятилетия появилось много работ, посвященных исследованию зависимости гамильтоновости графа G от значений его спектрального радиуса и спектрального радиуса его беззнакового лапласиана [1–4]. Ранее нами также были получены нижние оценки спектрального радиуса произвольного графа и двудольного сбалансированного графа для существования в нем гамильтонового цикла [5–6]. Недавно была изучена задача существования цикла длины $n - 1$ в графе G в зависимости от значений его вышеназванных спектральных радиусов [7].

В настоящей работе исследуется задача существования цикла длины $n - 2$ в графе G в зависимости от нижних оценок значений его спектрального радиуса и спектрального радиуса его беззнакового лапласиана.

Введем следующие обозначения:

$$B(n,k) =: \frac{n(k-1)}{2} - \frac{r(k-r)}{2} \text{ при } n = q(k-2) + r, 0 < r \leq k-2,$$

$$f(n,k,l) =: \frac{l(l-1)}{2} + (n-l)(k-l),$$

$$D(n,k) =: \max\left\{ f\left(n,k,\left[\frac{k}{2}\right]+1\right), f(n,k,k-2) \right\}.$$

В своей работе мы используем следующие хорошо известные факты.

Т е о р е м а 1 [8]. *Если G – гамильтонов граф порядка n и число его ребер* (*размер*) $e(G) \geq \dfrac{n^2}{4} + 1$, *то он является панциклическим.*

Т е о р е м а 2 [9]. 1) *Для произвольного графа G порядка n* и *размера* $e(G) > B(n,k)$ *имеет место неравенство* $c(G) \ge k$.

2) *Пусть* $n \ge k > 4$. *Для произвольного* 2-*связного графа G порядка n и размера* $e(G) > D(n,k)$ *имеет место неравенство* $c(G) \ge k$.

Т е о р е м а 3 [10]. *Пусть G – произвольный граф порядка n. Если* $\delta(G) \ge 1$, *то справедливо неравенство*

$$\rho(G) \le \sqrt{2e(G) - n + 1}.$$

Т е о р е м а 4 [11]. *Пусть G – связный граф порядка n и размера e*(*G*). *Если минимальная степень удовлетворяет неравенству* $\delta(G) \ge k \ge 1$, *то справедливо неравенство*

$$\rho(G) \le \frac{k - 1 + \sqrt{(k+1)^2 + 4(2e(G) - kn)}}{2}.$$

Т е о р е м а 5 [12]. *Пусть G – произвольный граф порядка n. Тогда справедливо неравенство*

$$q(G) \le \frac{2e(G)}{n-1} + n - 2.$$

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Пусть G – произвольный* 2-*связный граф порядка n* ≥ 20 *и размера* $e(G) \ge \binom{n-4}{2} + 9$, *тогда он содержит цикл* C_k, где $k \ge n - 2$.

Справедливость этой леммы вытекает из теоремы 2,2).

Отметим, что нижняя оценка размера графа *G* в этой лемме достижима, поскольку, например, граф $G = K_2 \vee (K_{n-6} + 4K_1)$ имеет размер $e(G) = \binom{n-4}{2} + 8$, однако легко проверить, что он не содержит цикла длины больше *n* – 3.

Т е о р е м а 6. *Пусть G – произвольный* 2-*связный граф порядка n* ≥ 20 *и размера* $e(G) \ge \binom{n-4}{2} + 9$, *тогда он содержит цикл* C_{n-2}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если граф *G* является гамильтоновым, то из неравенства

$$\binom{n-4}{2} + 9 \ge \frac{n^2}{4} + 1,$$

справедливого при *n* ≥ 12, согласно теореме 1, следует, что *G* является панциклическим, а значит, содержит цикл C_{n-2}.

Предположим теперь, что граф *G* содержит цикл C_{n-1} и не является гамильтоновым. Покажем, что *G* содержит цикл C_{n-2}. Пусть $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ – вершины цикла C_{n-1}, перечисленные в порядке обхода этого цикла и $\{v_n\} = V(G) \setminus \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$. Обозначим $H = G - v_n$. Тогда из негамильтоновости графа *G* следует, что для любого $i, 1 \le i \le n-1$, ребра $v_i v_n$ и $v_{i+1} v_n$ не могут одновременно принадлежать *E*(*G*). Следовательно, максимальное число ребер, инцидентных вершине v_n в графе *G*, может быть равно $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Значит,

$$e(H) \ge \binom{n-4}{2} + 9 - \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Нетрудно показать, что при *n* ≥ 12 справедливо неравенство

$$\binom{n-4}{2} + 9 - \left[\frac{n-1}{2}\right] \ge \frac{(n-1)^2}{4} + 1.$$

Поэтому по теореме 1 граф H является панциклическим, а значит, содержит цикл C_{n-2}. Следовательно, и граф G содержит цикл C_{n-2}. Теорема 6 доказана.

Т е о р е м а 7. 1) *Пусть* G_1 *– произвольный 2-связный граф порядка* $n \geq 20$, *у которого* $\rho(G_1) \geq n - 4{,}65$, *тогда он содержит цикл* C_{n-2}.

2) *Пусть* G_2 *– произвольный 2-связный граф порядка* $n \geq 20$, у которого $q(G_2) \geq 2n - 8{,}42$. *Тогда он содержит цикл* C_{n-2}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как граф G_1 является 2-связным, то $\delta(G_1) \geq 2$. Исходя из этого в силу убывания функции

$$\frac{x - 1 - \sqrt{(x+1)^2 + 4\big(2e(G_1) - xn\big)}}{2}$$

на промежутке $[1, n-1]$ по теореме 4 и условию теоремы 7,1) имеем неравенство

$$n - 4{,}65 \leq \rho(G_1) \leq \frac{\delta(G_1) - 1 - \sqrt{\big(\delta(G_1)+1\big)^2 + 4\big(2e(G_1) - \delta(G_1)n\big)}}{2} \leq \frac{1 - \sqrt{9 + 8\big(e(G_1) - n\big)}}{2}.$$

Откуда получаем

$$e(G_1) \geq \frac{4n^2 - 33{,}2n + 97{,}09}{8}.$$

Легко проверить, что правая часть последнего неравенства при $n \geq 20$ больше $\binom{n-4}{2} + 9$, поэтому по теореме 6 граф G_1 содержит цикл C_{n-2}.

2) По теореме 5 и условию теоремы 7,2) имеем неравенство

$$2n - 8{,}42 \leq q(G_2) \leq \frac{2e(G_2)}{n-1} + n - 2.$$

Откуда получаем

$$e(G_2) \geq \frac{n^2 - 7{,}42n + 6{,}42}{2}.$$

Легко проверить, что правая часть последнего неравенства при $n \geq 20$ больше $\binom{n-4}{2} + 9$, поэтому по теореме 6 граф G_2 содержит цикл C_{n-2}. Теорема 7 доказана.

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Пусть* G *– произвольный граф порядка* $n \geq 4$ *и размера* $e(G) \geq \binom{n-3}{2} + 7$, *тогда он содержит цикл* C_k, *где* $k \geq n - 2$.

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 2,1). Отметим, что нижняя оценка размера графа G в этой лемме достижима, поскольку, например, граф $G = K_1 \vee (K_{n-4} + K_3)$ имеет размер $e(G) = \binom{n-3}{2} + 6$, однако легко проверить, что он содержит максимальный цикл C_{n-3}.

Т е о р е м а 8. *Пусть* G *– произвольный граф порядка* $n \geq 8$ *и размера* $e(G) \geq \binom{n-3}{2} + 7$, *тогда он содержит цикл* C_{n-2}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если граф G является гамильтоновым, то из неравенства

$$\binom{n-3}{2} + 7 \geq \frac{n^2}{4} + 1,$$

справедливого при $n \geq 8$, по теореме 1 следует, что G является панциклическим, а значит, содержит цикл C_{n-2}.

Предположим теперь, что граф G содержит цикл C_{n-1} и не является гамильтоновым. Покажем, что G содержит цикл C_{n-2}. Пусть $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ – вершины цикла C_{n-1}, перечисленные в порядке обхода этого цикла и $\{v_n\} = V(G) \setminus \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$. Обозначим $H = G - v_n$. Тогда из негамильтоновости графа G следует, что для любого i, $1 \leq i \leq n-1$, ребра $v_i v_n$ и $v_{i+1} v_n$ не могут одновременно принадлежать $E(G)$. Следовательно, максимальное число ребер, инцидентных вершине v_n в графе G, может быть равно $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Значит, $e(H) \geq \binom{n-3}{2} + 7 - \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Нетрудно показать, что при $n \geq 4$ справедливо неравенство

$$\binom{n-3}{2} + 7 - \left[\frac{n-1}{2}\right] \geq \frac{(n-1)^2}{4} + 1,$$

поэтому по теореме 1 граф H является панциклическим, а значит, содержит цикл C_{n-2}. Следовательно, и граф G содержит цикл C_{n-2}. Теорема 8 доказана.

Т е о р е м а 9. 1) *Пусть G_1 – произвольный граф порядка $n \geq 8$, у которого* $\rho(G_1) \geq n - 2{,}8$. *Тогда он содержит цикл C_{n-2}.*

2) *Пусть G_2 – произвольный граф порядка $n \geq 8$, у которого* $q(G_2) \geq 2n - 5{,}14$. *Тогда он содержит цикл C_{n-2}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Предположим сначала, что $\delta(G_1) \geq 1$. Тогда по теореме 3 и условию теоремы 9,1) имеем неравенство

$$n - 2{,}8 \leq \rho(G_1) \leq \sqrt{2e(G_1) - n + 1},$$

откуда получаем

$$e(G_1) \geq \frac{n^2 - 4{,}6n + 6{,}84}{2}.$$

Легко проверить, что правая часть последнего неравенства при $n \geq 8$ больше $\binom{n-3}{2} + 7$, поэтому по теореме 8 граф G_1 содержит цикл C_{n-2}.

Предположим теперь, что граф G_1 содержит изолированные вершины. Тогда из двойного неравенства $n - 2{,}8 \leq \rho(G_1) \leq \Delta(G_1)$ следует, что $n - 2 \leq \Delta(G_1)$, т. е. в графе G_1 существует единственная изолированная вершина, обозначим ее через u. Пусть $H = G_1 - u$. Тогда имеем $\delta(H) \geq 1$ и $v(H) = n - 1$. Следовательно, согласно теореме 3 имеем

$$\rho(H) \leq \sqrt{2e(H) - v(H) + 1} = \sqrt{2e(G_1) - n + 2}.$$

Нетрудно видеть, что характеристические многочлены матриц смежностей графов G_1 и H связаны равенством $\chi_{G_1}(\lambda) = \lambda \chi_H(\lambda)$, т. е. $\rho(G_1) = \rho(H)$. Следовательно, имеем

$$n - 2{,}8 \leq \sqrt{2e(G_1) - n + 2},$$

откуда получаем

$$e(G_1) \geq \frac{n^2 - 4{,}6n + 5{,}84}{2}.$$

Легко проверить, что правая часть последнего неравенства при $n \geq 9$ больше $\binom{n-3}{2} + 7$. Заметим, что при $n = 8$ $e(G_1) \geq 16{,}52$, т. е. $e(G_1) \geq 17 = \binom{8-3}{2} + 7$, поэтому по теореме 8 граф G_1 содержит цикл C_{n-2}.

2) По теореме 5 и условию теоремы 9,2) имеем неравенство

$$2n-5{,}14 \le q(G_2) \le \frac{2e(G_2)}{n-1}+n-2,$$

откуда получаем

$$e(G_2) \ge \frac{n^2-4{,}14n+3{,}14}{2}.$$

Легко проверить, что правая часть последнего неравенства при $n \ge 8$ больше $\binom{n-3}{2}+7$, поэтому по теореме 8 граф G_2 содержит цикл C_{n-2}. Теорема 9 доказана.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция-2020» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Ф18РА–014.

Acknowledgements. The work has been financially supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Government Research Program “Convergence-2020” and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research within the framework of the Project No. Ф18РА–014.

Список использованных источников

1. Li, B. Spectral analogues of Erdős’ and Moon–Moser’s theorems on Hamilton cycles / B. Li, B. Ning // Linear and Multilinear Algebra. – 2016. – Vol. 64, № 11. – P. 2252–2269. https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1151854

2. Li, B. Spectral analogues of Moon–Moser’s theorem on Hamilton paths in bipartite graphs / B. Li, B. Ning // Linear Algebra and its Applications. – 2017. – Vol. 515. – P. 180–195. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.11.024

3. Nikiforov, V. Spectral radius and Hamiltonicity of graphs with large minimum degree / V. Nikiforov // Czechoslovak Math. J. – 2016. – Vol. 66, № 3. – P. 925–940. https://doi.org/10.1007/s10587-016-0301-y

4. Ning, B. Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs / B. Ning, J. Ge // Linear and Multilinear Algebra. – 2015. – Vol. 63, № 8. – P. 1520–1530. https://doi.org/10.1080/03081087.2014.947984

5. Benediktovich, V. I. Spectral condition for Hamiltonicity of a graph / V. I. Benediktovich // Linear Algebra and its Applications. – 2016. – Vol. 494. – P. 70–79. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.01.005

6. Бенедиктович, В. И. Спектральный радиус сбалансированного двудольного графа и его гамильтоновость / В. И. Бенедиктович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 2. – С. 7–12.

7. Ge, J. Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs, II / J. Ge, B. Ning // Linear and Multilinear Algebra. – 2019. – P. 1–18. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1580668

8. Bondy, J. A. Pancyclic graphs I / J. A. Bondy // J. Combinatorial Theory, Ser. B. – 1971. – Vol. 11, № 1. – P. 80–84. https://doi.org/10.1016/0095-8956(71)90016-5

9. Копылов, Г. Н. О максимальных путях и циклах в графе / Г. Н. Копылов // Докл. Акад. наук СССР. – 1977. – Т. 234, № 1. – С. 19–21.

10. Hong, Y. Bounds of eigenvalues of graphs / Y. Hong // Discrete Mathematics. – 1993. – Vol. 123, № 1–3. – P. 65–74. https://doi.org/10.1016/0012-365x(93)90007-g

11. Hong, Y. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Y. Hong, J. Shu, K. Fang // J. Comb. Theory, Ser. B. – 2001. – Vol. 81, № 2. – P. 177–183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997

12. Feng, L. On three conjectures involving the signless Laplacian spectral radius of graphs / L. Feng, G. Yu // Publications de l’Institut Mathématique. – 2009. – Vol. 85, № 99. – P. 35–38. https://doi.org/10.2298/pim0999035f

References

1. Li B., Ning B. Spectral analogues of Erdős’ and Moon–Moser’s theorems on Hamilton cycles. *Linear and Multilinear Algebra*, 2016, vol. 64, no. 11, pp. 2252–2269. https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1151854

2. Li B., Ning B. Spectral analogues of Moon–Moser’s theorem on Hamilton paths in bipartite graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 2017, vol. 515, pp. 180–195. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.11.024

3. Nikiforov V. Spectral radius and Hamiltonicity of graphs with large minimum degree. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2016, vol. 66, no. 3, pp. 925–940. https://doi.org/10.1007/s10587-016-0301-y

4. Ning B., Ge J. Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 2015, vol. 63, no. 8, pp. 1520–1530. https://doi.org/10.1080/03081087.2014.947984

5. Benediktovich V. I. Spectral condition for Hamiltonicity of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 2016, vol. 494, pp. 70–79. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.01.005

6. Benediktovich V. I. Spectral radius of a balanced bipartite graph and its Hamiltonicity. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 2, pp. 7–12 (in Russian).

7. Ge J., Ning B. Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs, II. *Linear and Multilinear Algebra*, 2019, pp. 1–18. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1580668

8. Bondy J. A. Pancyclic graphs I. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, 1971, vol. 11, no. 1, pp. 80–84. https://doi.org/10.1016/0095-8956(71)90016-5

9. Kopylov G. N. Maximal paths and cycles in a graph. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of the USSR], 1977, vol. 234, no. 1, pp. 19–21 (in Russian).

10. Hong Y. Bounds of eigenvalues of graphs. *Discrete Mathematics*, 1993, vol. 123, no. 1–3, pp. 65–74. https://doi.org/10.1016/0012-365x(93)90007-g

11. Hong Y., Shu J., Fang K. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, 2001, vol. 81, no. 2, pp. 177–183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997

12. Feng L., Yu G. On three conjectures involving the signless Laplacian spectral radius of graphs. *Publications de l'Institut Mathématique*, 2009, vol. 85, no. 99, pp. 35–38. https://doi.org/10.2298/pim0999035f

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by