

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 517.925.42  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-182-194>

Поступила в редакцию 25.04.2019  
 Received 25.04.2019

**А. А. Гринь, С. В. Рудевич**

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

## СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧНОГО ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НА ЦИЛИНДРЕ

**Аннотация.** Для вещественных автономных систем дифференциальных уравнений с непрерывно дифференцируемыми правыми частями рассматривается задача нахождения точного числа и локализации предельных циклов второго рода на цилиндре. В случае отсутствия точек покоя системы на цилиндре для решения указанной задачи развиваются ранее предложенные нами способы, состоящие в последовательном двухшаговом применении признака Дюлака – Черкаса или признака Дюлака. Разработан также новый способ, использующий на втором шаге обобщение признака Дюлака – Черкаса или признака Дюлака, где требование знакопостоянности дивергенции заменяется условием трансверсальности кривых, на которых дивергенция обращается в нуль. С помощью разработанных способов находятся замкнутые трансверсальные кривые, разбивающие цилиндр на подобласти, окружающие его, в каждой из которых система имеет точно один предельный цикл второго рода.

Практическая эффективность разработанного способа продемонстрирована на примере системы маятникового типа, для которой в случае отсутствия точек покоя доказано существование точно трех предельных циклов второго рода на всем фазовом цилиндре.

**Ключевые слова:** автономная система на цилиндре, предельный цикл второго рода, 16-я проблема Д. Гильберта, функция Дюлака – Черкаса, признак Дюлака

**Для цитирования.** Гринь, А. А. Способы нахождения точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре / А. А. Гринь, С. В. Рудевич // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 182–194. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-182-194>

**A. A. Hryn, S. V. Rudzevich**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus*

## WAYS FOR DETECTION OF THE EXACT NUMBER OF LIMIT CYCLES OF AUTONOMOUS SYSTEMS ON THE CYLINDER

**Abstract.** For real autonomous systems of differential equations with continuously differentiable right-hand sides, the problem of detecting the exact number and localization of the second-kind limit cycles on the cylinder is considered. To solve this problem in the absence of equilibria of the system on the cylinder, we have developed our previously proposed ways consisting in a sequential two-step application of the Dulac – Cherkas test or the Dulac test. Additionally, a new way has been worked out using the generalization of the Dulac – Cherkas or Dulac test at the second step, where the requirement of constant sign for divergence is replaced by the transversality condition of the curves on which the divergence vanishes. With the help of the developed ways, closed transversal curves are found that divide the cylinder into subdomains surrounding it, in each of which the system has exactly one second-kind limit cycle.

The practical efficiency of the mentioned ways is demonstrated by the example of a pendulum-type system, for which, in the absence of equilibria, the existence of exactly three second-kind limit cycles on the entire phase cylinder is proved.

**Keywords:** autonomous system on the cylinder, second-kind limit cycle, 16<sup>th</sup> Hilbert problem, Dulac – Cherkas function, Dulac test

**For citation.** Hryn A. A., Rudzevich S. V. Ways for detection of the exact number of limit cycles of autonomous systems on the cylinder. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 182–194 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-182-194>

**Введение.** Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = P(\varphi, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(\varphi, y), \quad (1)$$

в которой функции  $P, Q$  являются гладкими на вещественной плоскости  $R^2$ , а также  $2\pi$ -периодическими относительно аргумента  $\varphi$ . В силу периодичности  $P$  и  $Q$  фазовым пространством системы (1) является круговой цилиндр  $Z = \{(\varphi, y) : \varphi \in [0, 2\pi], y \in R\}$ , где возможны те и только те типы траекторий, что и для системы на плоскости [1, с. 219]. Но для таких систем, часто называемых системами маятникового типа, следует различать замкнутые траектории, не охватывающие и охватывающие цилиндр, в частности предельные циклы соответственно первого и второго рода [2, с. 466; 3, с. 35]. Так, для предельных циклов первого рода системы (1) применим признак Дюлака – Черкаса [4] и различные пути его реализации [5] для нахождения нелокальной оценки числа и локализации предельных циклов автономных систем на плоскости. Затем в работах [6–12] признак Дюлака – Черкаса был распространен для решения задачи о числе и локализации предельных циклов второго рода автономных систем с цилиндрическим фазовым пространством (1) и эффективно применен с этой целью для некоторых классов указанных систем. Сформулированная задача является актуальной, поскольку даже в случае полиномиальных систем на плоскости, известном как 16-я проблема Д. Гильберта, она далека от полного решения [13].

Признак Дюлака – Черкаса позволяет находить верхнюю оценку числа предельных циклов для многих классов системы (1) [5, 9, 10]. Для нахождения точного числа предельных циклов необходимо проводить дополнительные исследования, что возможно лишь в отдельных случаях. В работах [14–16] для определения точного числа и локализации предельных циклов, окружающих одну или три простых точки покоя систем на плоскости, предложены эффективные подходы, где признак Дюлака – Черкаса или его модификация применяется последовательно дважды для нахождения замкнутых трансверсальных кривых, разбивающих плоскость на подобласти, в каждой из которых система имеет точное число предельных циклов. Затем в [17] для нахождения точного числа и локализации предельных циклов, окружающих цилиндр  $Z$ , автономной системы (1) без точек покоя нами были разработаны два способа, основанных на последовательном двухшаговом применении признака Дюлака – Черкаса или признака Дюлака.

Цель настоящей работы заключается в развитии и обобщении способов, разработанных в нашей статье [17]. Основная идея состоит в последовательном двухшаговом применении признака Дюлака – Черкаса и его обобщении или обобщении признака Дюлака, где знакопостоянность вспомогательной функции заменяется условием трансверсальности кривых, на которых дивергенция обращается в нуль. При этом с помощью трансверсальных овалов цилиндр разбивается на подобласти, в каждой из которых система имеет точно один предельный цикл второго рода.

**1. Предварительные сведения.** Признак Дюлака [1–3] является одним из методов, позволяющих получить нелокальную оценку числа предельных циклов автономных систем на всем цилиндре  $Z$  или в некоторой области  $D \subseteq Z$ , где система (1) задает векторное поле  $X = (P, Q)$ .

Функция  $B \in C^1(D)$ , для которой  $\operatorname{div}(BX)$  не изменяет знак в  $D$ , а кривая  $\operatorname{div}(BX) = 0$  не содержит предельных циклов, называется функцией Дюлака системы (1) в области  $D$ . Тогда справедливо следующее известное утверждение [1, с. 222].

**Теорема 1 (признак Дюлака).** *Если  $B$  является функцией Дюлака системы (1) в области  $D$ , граница которой  $\partial D$  связна и стягивается в точку, то система (1) не имеет предельных циклов первого рода в области  $D$ . В случае, когда  $\partial D$  состоит из двух замкнутых кривых  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  на  $Z$ , которые не пересекаются и не стягиваются в точку, тогда система (1) не имеет предельных циклов первого рода в  $D$  и может иметь не более одного предельного цикла второго рода в  $D$ .*

Сам признак Дюлака не содержит ни метода для нахождения функции  $B$ , ни способа для определения области  $D$ , где такую функцию надо построить. Поэтому в такой формулировке он практически не использовался для исследования предельных циклов второго рода автономных систем на цилиндре. В работах [6–11] Л. Черкасом, А. Гринем и К. Шнайдером был предложен усовершенствованный подход к признаку Дюлака для таких систем.

**О п р е д е л е н и е.** Гладкая  $2\pi$ -периодическая по  $\varphi$  функция  $\Psi : D \rightarrow R$  называется функцией Дюлака – Черкаса системы (1) в области  $D$  на цилиндре  $Z$ , если существует вещественное число  $k \neq 0$  такое, что выполняется соотношение

$$\Phi(\varphi, y, k) \equiv (\operatorname{grad} \Psi, X) + k\Psi \operatorname{div} X \geq 0 (\leq 0), \quad (2)$$

где множество  $V(\varphi, y) = \{(\varphi, y) \in D : \Phi(\varphi, y, k) = 0\}$  имеет меру нуль и не содержит предельных циклов системы (1).

Отметим ключевые свойства функции  $\Psi$ , используемые при исследовании предельных циклов [6].

*Лемма.* Если  $\Psi$  является функцией Дюлака – Черкаса системы (1) в области  $D$ , то

- 1)  $B := |\Psi|^{-\frac{1}{k}}$  представляет собой функцию Дюлака в классическом варианте в каждой из подобластей  $D$ , где  $\Psi$  является положительной или отрицательной;
- 2) траектории системы (1) при встрече с множеством  $W(\varphi, y) = \{(\varphi, y) \in D : \Psi(\varphi, y) = 0\}$  пересекают его трансверсально;
- 3) множество  $W$  представляет собой кривую, ветви которой не пересекаются друг с другом;
- 4) предельные циклы системы (1), целиком расположенные в  $D$ , не пересекают кривую  $W$ ;
- 5) множество  $W$  в области  $D$  состоит из непересекающихся подмножеств, при этом  $W$  отделяет подобласти области  $D$ , где  $\Psi > 0$ , от подобластей, где  $\Psi < 0$ .

Так как в настоящей работе изучаются лишь предельные циклы второго рода, то в дальнейшем естественно рассматривать систему (1) на всем цилиндре  $Z$  или только в кольцеобразной области (кольце)  $D$ , охватывающей цилиндр  $Z$ , для которой выполняются следующие предположения.

$A_1$ . Границы рассматриваемой области  $D$  состоят из двух замкнутых кривых  $\Delta_u$  и  $\Delta_r$  охватывающих цилиндр  $Z$  и удовлетворяющих условию  $\Delta_u \cap \Delta_r = \emptyset$ .

$A_2$ . Множество  $W(\varphi, y)$  состоит в  $D$  из  $s$  замкнутых кривых (овалов)  $w_1(\varphi, y), w_2(\varphi, y), \dots, w_s(\varphi, y)$ , охватывающих цилиндр  $Z$  и не имеющих общих точек ни друг с другом, ни с границами  $\Delta_u$  и  $\Delta_r$ .

Заметим, что если в условии (2) имеет место случай строгого неравенства, то оно гарантирует отсутствие общих точек у овалов  $w_1(\varphi, y), w_2(\varphi, y), \dots, w_s(\varphi, y)$ .

Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что на цилиндре  $Z$ , который представляем в виде бесконечной вертикальной полосы, координатная ось  $\varphi$  направлена по горизонтали вправо, а координатная ось  $y$  – по вертикали вверх, и также будем полагать, что кривые располагаются в следующем порядке:  $w_i(\varphi, y)$  лежит на цилиндре  $Z$  выше  $w_{i+1}(\varphi, y)$ . При таком предположении область на цилиндре  $Z$  между  $w_i(\varphi, y)$  и  $w_{i+1}(\varphi, y)$  обозначим через  $Z_i(\varphi, y)$ , область между  $\Delta_u$  и  $w_1(\varphi, y)$  – через  $Z_0(\varphi, y)$ , а область между  $\Delta_r$  и  $w_s(\varphi, y)$  – через  $Z_s(\varphi, y)$  (рис. 1).

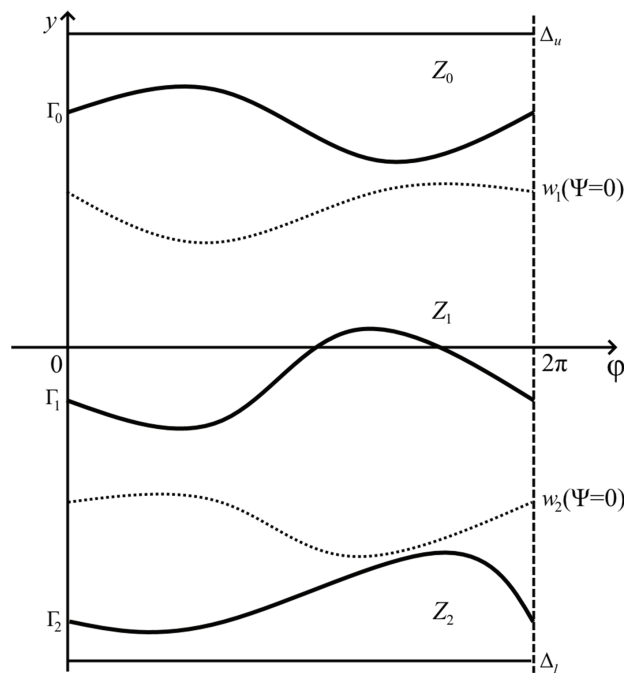


Рис. 1. Расположение кривых  $w_i(\varphi, y)$  и возможных предельных циклов  $\Gamma_i$  на цилиндре  $Z$  в случае теоремы 2 при  $s = 2$   
 Fig. 1. The location of the curves  $w_i(\varphi, y)$  and possible limit cycles  $\Gamma_i$  on the cylinder  $Z$  in the case of Theorem 2 for  $s = 2$

Напомним, что предельный цикл первого рода системы (1) должен окружать точку покоя или группу точек с суммарным индексом Пуанкаре +1. Для существования же предельного цикла второго рода нет необходимости в наличии точек покоя, и если система (1) такие точки имеет, то нужно установить их влияние на существование или отсутствие указанных предельных циклов, поэтому в дальнейшем будем считать справедливым следующее предположение.

*A<sub>3</sub>. Система (1) в рассматриваемой области D не имеет точек покоя.*

**Теорема 2** (признак Дюлака – Черкаса). Пусть выполняются условия  $A_1$ – $A_3$ . Тогда в области D при  $k < 0$  система (1) имеет по крайней мере  $s - 1$ , но не более чем  $s + 1$  предельных циклов второго рода, а именно, каждая область  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, s - 1$ , содержит единственный предельный цикл  $\Gamma_i$  второго рода. Кроме того, каждая из областей  $Z_0$  и  $Z_s$  также может содержать по единственному предельному циклу второго рода. Каждый предельный цикл  $\Gamma_i$  в  $Z_i$  является группой и орбитально устойчивым (неустойчивым) если  $k\Phi(\varphi, y)\Psi(\varphi, y) < 0$  ( $> 0$ ) в  $Z_i$ .

Сформулированный признак не требует заранее проводить локализацию предельных циклов, поскольку она следует из топологического анализа кривых множества  $W$ . Это преимущество было эффективно использовано при изучении предельных циклов второго рода нескольких классов систем (1) [6–10], однако оно не позволяет без дополнительного исследования установить факт существования или отсутствия предельного цикла второго рода в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_s$ .

**2. Основные результаты.** Одним из методов для определения точного числа предельных циклов системы (1) в кольцеобразных подобластях  $Z_0$  и  $Z_s$  является построение замкнутых трансверсальных кривых, охватывающих цилиндр  $Z$ , в соответствии со следующим утверждением.

**Теорема 3.** Пусть для системы (1) в области D выполняются условия теоремы 2 и в каждой из кольцеобразных подобластей  $Z_0$  и  $Z_s$  существует по одному трансверсальному овалу  $\tilde{w}_0$  и  $\tilde{w}_s$ , охватывающих цилиндр  $Z$  и не имеющих общих точек с овалами  $w_1$  и  $w_s$ . При этом овалы  $\tilde{w}_0$  и  $w_1$ , а также овалы  $\tilde{w}_s$  и  $w_s$  образуют границы кольцеобразных подобластей  $\tilde{Z}_0 \subset Z_0$  и  $\tilde{Z}_s \subset Z_s$  соответственно. Если траектории системы (1) при возрастании  $t$  входят через границу  $\partial\tilde{Z}_0$  извне внутрь подобласти  $\tilde{Z}_0$ , а также через границу  $\partial\tilde{Z}_s$  извне внутрь подобласти  $\tilde{Z}_s$  (или наоборот), то в каждой из подобластей  $\tilde{Z}_0$  и  $\tilde{Z}_s$  имеется единственный устойчивый (неустойчивый) предельный цикл второго рода системы (1), а всего система (1) имеет точно  $s + 1$  предельный цикл в области D.

**Доказательство.** Существование функции Дюлака – Черкаса  $\Psi$ , согласно теореме 2, обеспечивает наличие у системы (1) точно  $s - 1$  предельных циклов второго рода, расположенных между овалами  $w_1$  и  $w_s$ . Кроме того, в соответствии с признаком Дюлака система (1) может иметь не более одного предельного цикла в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_s$ . С другой стороны, если траектории системы (1) при возрастании  $t$  входят через границу  $\partial\tilde{Z}_0$  извне внутрь подобласти  $\tilde{Z}_0$ , а также через границу  $\partial\tilde{Z}_s$  извне внутрь подобласти  $\tilde{Z}_s$  (или наоборот), то в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_s$  согласно теореме Пуанкаре [5, с. 64] существует по крайней мере один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл. Таким образом, получаем единственность предельного цикла как в области  $Z_0$ , так и  $Z_s$ . Следовательно, система (1) области D имеет точно  $s + 1$  предельных циклов. Теорема 3 доказана.

В работе [17] нами были разработаны два способа построения в кольцеобразных подобластях  $Z_0$  и  $Z_s$  трансверсальных овалов  $\tilde{w}_0$  и  $\tilde{w}_s$ , удовлетворяющих условию теоремы 3, за счет дополнительного применения признака Дюлака – Черкаса или признака Дюлака. Суть первого способа выражает следующая теорема (рис. 2).

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия теоремы 2 и дополнительно для системы (1) в области D существует вторая функция Дюлака – Черкаса  $\tilde{\Psi}(\varphi, y)$ , удовлетворяющая при  $\tilde{k} < 0$  условию

$$\tilde{\Phi} \equiv \tilde{k}\tilde{\Psi} \operatorname{div} X + \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} \geq 0 (\leq 0), \quad (3)$$

и такая, что множество  $\tilde{W} = \{(\varphi, y) \in D : \tilde{\Psi}(\varphi, y) = 0\}$  состоит из  $s + 2$  овалов  $\tilde{w}_i$ , окружающих цилиндр. Тогда система (1) в области D имеет точно  $s + 1$  предельных циклов второго рода.

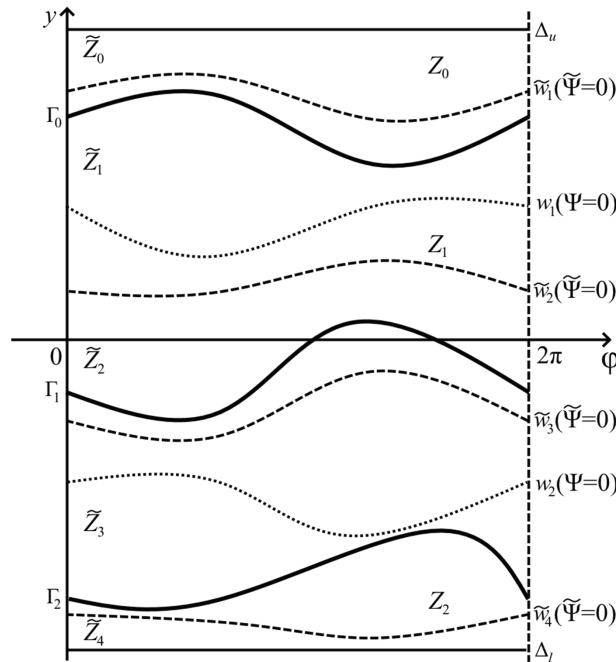


Рис. 2. Расположение кривых  $w_i(\varphi, y)$  и  $\tilde{w}_i(\varphi, y)$  вместе с предельными циклами  $\Gamma_i$  на цилиндре  $Z$  в случае теоремы 3 при  $s = 2$

Fig. 2. The location of the curves  $w_i(\varphi, y)$  and  $\tilde{w}_i(\varphi, y)$  together with the limit cycles  $\Gamma_i$  on the cylinder  $Z$  in the case of Theorem 3 for  $s = 2$

Заметим, что овалы  $w_i(\varphi, y)$  располагаются в окрестностях овалов  $\tilde{w}_{i+1}(\varphi, y)$ , причем возможны все случаи расположения:  $w_i(\varphi, y)$  могут лежать выше или ниже  $\tilde{w}_{i+1}(\varphi, y)$ , а также овалы  $w_i(\varphi, y)$  и  $\tilde{w}_{i+1}(\varphi, y)$  могут пересекаться друг с другом. На рис. 2 представлен один из таких возможных случаев.

В частности, в теореме 4 функция  $\tilde{\Psi}$  может быть вида  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$ , где  $\Psi$  является первой функцией Дюлака – Черкаса, удовлетворяющей требованиям теоремы 2, а  $\tilde{\Psi}$  – это дополнительная функция такая, что уравнение  $\tilde{\Psi} = 0$  в области  $D$  задает два овала  $\tilde{w}_1(\varphi, y)$  и  $\tilde{w}_2(\varphi, y)$ , окружающие цилиндр, между которыми расположены все  $s$  овалов  $w_i(\varphi, y)$ , задаваемых уравнением  $\Psi = 0$  (рис. 3). Тогда условие (3) запишется следующим образом:

$$\tilde{\Phi} \equiv \tilde{k}\Psi\tilde{\Psi}\operatorname{div}X + \tilde{\Psi}\frac{d\Psi}{dt} + \Psi\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} \geq 0(\leq 0). \quad (4)$$

При этом предполагается, что овалы  $\tilde{w}_1(\varphi, y)$ ,  $\tilde{w}_2(\varphi, y)$  и овалы  $w_i(\varphi, y)$  не имеют общих точек. Если в условии (4) имеет место случай строгого неравенства, то это требование выполняется автоматически.

**З а м е ч а н и е 1.** Если в условии теоремы 2 требуемая функция Дюлака – Черкаса  $\Psi(\varphi, y)$  для системы (1) найдена на всем цилиндре  $Z$ , а на втором шаге требуемая функция  $\tilde{\Psi}(\varphi, y)$  для применения теоремы 4 найдена в некоторой области  $D$  цилиндра  $Z$ , то мы получаем точное число предельных циклов на всем цилиндре  $Z$ , причем все они расположены в этой области  $D$ .

Если применение теоремы 4 на практике вызывает трудности, то можно реализовать второй способ, основанный на построении функции Дюлака в виде произведения

$$B = |\Psi(\varphi, y)|^{\frac{1}{k}} |\tilde{\Psi}(\varphi, y)|^{\frac{1}{\tilde{k}}}, \quad k, \tilde{k} \in R, \quad k\tilde{k} \neq 0, \quad \Psi, \tilde{\Psi} \in C^1(D). \quad (5)$$

В таком случае для системы (1) в области  $D$  требуется выполнение условия [5, с. 335]

$$\hat{\Phi} \equiv k\tilde{k}\Psi\tilde{\Psi}\operatorname{div}X + k\Psi\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} + \tilde{k}\tilde{\Psi}\frac{d\Psi}{dt} \geq 0(\leq 0). \quad (6)$$

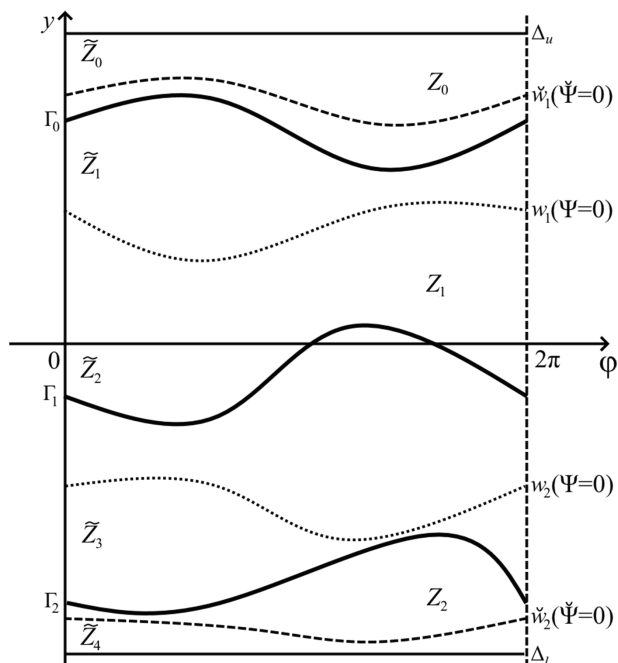


Рис. 3. Расположение овалов  $\tilde{w}_1(\varphi, y)$ ,  $\tilde{w}_2(\varphi, y)$  и овалов  $w_i(\varphi, y)$  при  $s = 2$  вместе с предельными циклами  $\Gamma_i$  на цилиндре  $Z$  в случае  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$

Fig. 3. The location of the ovals  $\tilde{w}_1(\varphi, y)$ ,  $\tilde{w}_2(\varphi, y)$  and the ovals  $w_i(\varphi, y)$  for  $s = 2$  together with the limit cycles  $\Gamma_i$  on the cylinder  $Z$  at  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$

При этом функция  $B$  имеет те же свойства, что и функция  $\Psi$  в лемме, которые удобно записать, используя вместо  $W$  множество  $U = W \cup \tilde{W}$ , где

$$W = \{(\varphi, y) \in D : \Psi(\varphi, y) = 0\}, \quad \tilde{W} = \{(\varphi, y) \in D : \tilde{\Psi}(\varphi, y) = 0\}.$$

Очевидно, что построение функции Дюлака вида (5) является более общим случаем по сравнению с построением функции Дюлака – Черкаса вида  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$ .

Также в дальнейшем будем считать, что множество  $U$ , состоящее из  $s_u = s + \tilde{s}$  овалов  $u_i(\varphi, y)$ , удовлетворяет предположению  $A_2$ , где  $\tilde{s}$  овалов соответствуют функции  $\tilde{\Psi}$ . Это означает, что множества  $W$  и  $\tilde{W}$  не имеют общих или пересекающихся овалов. Причем, как и ранее, полагаем, что овал  $u_i(\varphi, y)$  лежит на цилиндре  $Z$  выше овала  $u_{i+1}(\varphi, y)$ . При таком предположении область на цилиндре  $Z$  между овалами  $u_i(\varphi, y)$  и  $u_{i+1}(\varphi, y)$  обозначим через  $Z_i^u(\varphi, y)$ , область между  $\Delta_u$  и  $u_1(\varphi, y)$  обозначим  $Z_0^u(\varphi, y)$ , область между  $\Delta_l$  и  $u_{s_u}(\varphi, y)$  – через  $Z_{s_u}^u(\varphi, y)$ .

Поскольку кривые множества  $U$  разбивают область  $D$  на подобласти  $Z_i^u$ , в каждой из которых  $B$  представляет собой функцию Дюлака в классическом смысле, то для оценки числа и локализации циклов системы (1) применима следующая теорема, доказанная в нашей работе [17].

**Теорема 5.** Пусть в области  $D$  при выполнении предположений  $A_1$  и  $A_3$  система (1) имеет функцию вида (5), удовлетворяющую условию (6) при  $k < 0$ ,  $\tilde{k} < 0$ , а также предположению  $A_2$ . Тогда в области  $D$  система (1) имеет по крайней мере  $s_u - 1$ , но не более чем  $s_u + 1$  предельных циклов второго рода, а именно, каждая подобласть  $Z_i^u$ ,  $i = 1, \dots, s_u - 1$ , содержит единственный предельный цикл  $\Gamma_i$  второго рода. Кроме того, каждая из подобластей  $Z_0^u$  и  $Z_{s_u}^u$  также может содержать по единственному предельному циклу второго рода. Каждый предельный цикл  $\Gamma_i$  в  $Z_i^u$  является грубым и орбитально устойчивым (неустойчивым) если  $\tilde{\Phi} / (k\tilde{k}\Psi\tilde{\Psi}) < 0 (> 0)$ .

Очевидно, что как и в случае теоремы 2, для выяснения вопроса о существовании или отсутствии предельного цикла в каждой из областей  $Z_0^u$  и  $Z_{s_u}^u$  нужны дополнительные исследования. Однако использование теоремы 5 специальным образом как второго шага после примене-

ния теоремы 2 позволяет установить точное число предельных циклов, используя следующий результат [17].

**Теорема 6.** Пусть для системы (1) в области  $D$  выполняются условия теорем 2 и 6, и при этом множество  $\tilde{W}$  состоит из двух овалов  $\tilde{w}_1$  и  $\tilde{w}_2$ , расположенных по одному в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_s$ , т. е. все овалы множества  $\tilde{W}$  расположены между  $\tilde{w}_1$  и  $\tilde{w}_2$ . Тогда система (1) в области  $D$  имеет точно  $s + 1$  предельных циклов.

**З а м е ч а н и е 2.** Если в условии теоремы 2 требуемая функция Дюлака – Черкаса  $\Psi(\varphi, y)$  для системы (1) найдена на всем цилиндре  $Z$ , а на втором шаге требуемая функция  $\tilde{\Psi}(\varphi, y)$  для применения теоремы 4 или функция  $V$  для применения теоремы 6 найдены в некоторой области  $D$  цилиндра  $Z$ , то мы получаем точное число предельных циклов на всем цилиндре  $Z$ , причем все они расположены в этой области  $D$ .

Если при использовании теорем 4 и 6 не удастся доказать знакопостоянность функции  $\tilde{\Phi}$  или функции  $\hat{\Phi}$ , определенных в соотношениях (3) и (6) соответственно, то можно отказаться от этого требования, заменив его условием трансверсальности множества  $\tilde{V} = \{(\varphi, y) \in D : \tilde{\Phi} = 0\}$  или множества  $\hat{V} = \{(\varphi, y) \in D : \hat{\Phi} = 0\}$  векторному полю  $X$  системы (1), что составляет суть нового способа установления точного числа предельных циклов. В случае знакопеременной функции  $\tilde{\Phi}$  этот способ основан на следующем утверждении.

**Теорема 7.** Пусть для системы (1) существует функция  $\tilde{\Psi}(x, y) \in C^1(D)$  при  $\tilde{k} < 0$  такая, что в области  $D$  множество  $\tilde{W}$  не пересекается с множеством  $\tilde{V}$ . Тогда множество  $\tilde{W}$  трансверсально векторному полю  $X$  и не пересекается предельными циклами системы (1), целиком расположенными в области  $D$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим множество  $\tilde{W}$ . Так как множества  $\tilde{W}$  и  $\tilde{V}$  не пересекаются, то в силу соотношения (3) на множестве  $\tilde{W}$  справедливо условие  $\tilde{\Phi} > 0 (< 0)$ . Тогда на кривой  $\tilde{\Psi} = 0$  вдоль любого решения системы (1) выполняется условие

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} > 0 (< 0).$$

Значит, любая траектория системы (1) пересекает кривую  $\tilde{\Psi} = 0$  трансверсально. Не теряя общности, рассмотрим случай, когда

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} > 0.$$

Покажем, что предельные циклы не могут пересекать кривую  $\tilde{\Psi} = 0$ . Предположим противное, тогда точка на предельном цикле с увеличением времени может попасть на кривую  $\tilde{\Psi} = 0$  только из множества, где  $\tilde{\Psi} < 0$ , и обязательно должна уйти в множество, где  $\tilde{\Psi} > 0$ . Но, двигаясь по предельному циклу, эта точка должна снова вернуться в исходное положение в области  $\tilde{\Psi} = 0$ , что в силу  $\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} > 0$  невозможно. Полученное противоречие доказывает, что предельные циклы системы (1) не могут пересекать кривую  $\tilde{\Psi} = 0$ . Теорема 7 доказана.

В случае знакопеременной функции  $\tilde{\Phi}$  из теорем 4 и 7 вытекает способ нахождения точного числа предельных циклов второго рода в области  $D$ , суть которого выражает

**Теорема 8.** Пусть для системы (1) выполняются условия теоремы 2 и существует функция  $\tilde{\Psi}(x, y) \in C^1(D)$  при  $\tilde{k} < 0$  такая, что в области  $D$  множество  $\tilde{W}$  состоит из  $s + 2$  овалов  $\tilde{w}_i$ , окружающих цилиндр. Причем множество  $\tilde{V}$  не пересекается с овалами  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_{s+1}, \tilde{w}_{s+2}$  множества  $\tilde{W}$  и не имеет овалов, окружающих цилиндр, расположенных между овалами  $\tilde{w}_1$  и  $\tilde{w}_2$  или овалами  $\tilde{w}_{s+1}$  и  $\tilde{w}_{s+2}$ . Тогда система (1) в области  $D$  имеет точно  $s + 1$  предельных циклов.

**З а м е ч а н и е 3.** Если бы в условии теоремы 8 между овалами  $\tilde{w}_1$  и  $\tilde{w}_2$  (или овалами  $\tilde{w}_{s+1}$  и  $\tilde{w}_{s+2}$ ) существовал овал множества  $\tilde{V}$ , на котором функция  $\tilde{\Phi}$  изменяет знак, то траектории

системы (1) при возрастании  $t$  пересекали бы овалы  $\tilde{w}_1$  и  $\tilde{w}_2$  ( $\tilde{w}_{s+1}$  и  $\tilde{w}_{s+2}$ ) в одном направлении, что исключает существование предельного цикла между указанными овалами, но оставляет возможность для существования предельного цикла выше овала  $\tilde{w}_1$  (ниже  $\tilde{w}_{s+2}$ ) (рис. 4).

В случае знакопеременной функции  $\hat{\Phi}$ , определенной соотношением (6), этот способ основан на следующем утверждении.

**Теорема 9.** Пусть для системы (1) выполняются условия теоремы 2 и существует функция  $\tilde{\Psi}(x, y) \in C^1(D)$  при  $\tilde{k} < 0$  такая, что для функции  $V$  вида (5) в области  $D$  множество  $\tilde{W}$  не пересекается ни с множеством  $\hat{V}$ , ни с множеством  $W$ . Тогда множество  $\tilde{W}$  трансверсально векторному полю  $X$  и не пересекается предельными циклами системы (1), целиком расположенными в области  $D$ .

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $\tilde{W}$ . Так как множества  $\tilde{W}$  и  $\hat{V}$  не пересекаются, то на множестве  $\tilde{W}$  справедливо условие  $\hat{\Phi} > 0 (< 0)$ . В силу соотношения (6) на кривой  $\tilde{\Psi} = 0$  вдоль любого решения системы (1) выполняется условие

$$k\Psi \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} > 0 (< 0).$$

Учитывая, что множество  $\tilde{W}$  не пересекается и с множеством  $W$ , из полученного неравенства вытекает справедливость условия

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} > 0 (< 0).$$

Значит, любая траектория системы (1) пересекает кривую  $\tilde{\Psi} = 0$  трансверсально. Не теряя общности, рассмотрим случай, когда

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} > 0.$$

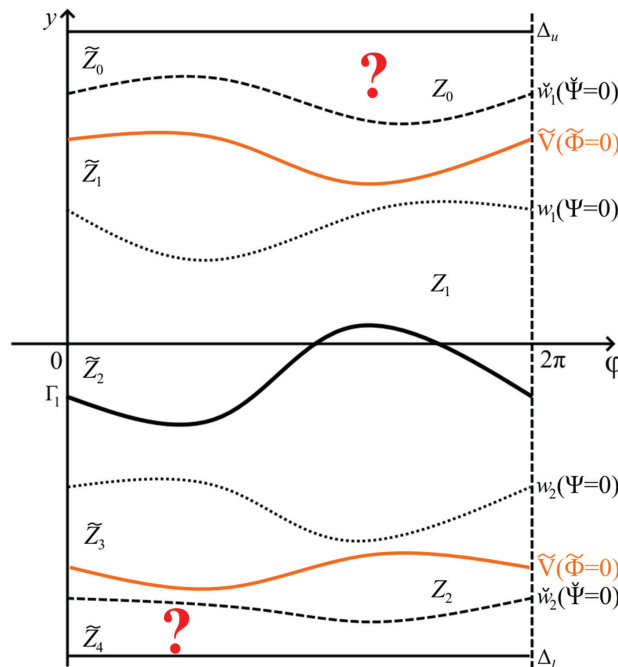


Рис. 4. Отсутствие предельного цикла между овалами  $w_1$  и  $\tilde{w}_1$  ( $w_2$  и  $\tilde{w}_2$ ) при  $s = 2$  в соответствии с замечанием 3 в случае  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$

Fig. 4. The absence of a limit cycle between the ovals  $w_1$  and  $\tilde{w}_1$  ( $w_2$  and  $\tilde{w}_2$ ) for  $s = 2$  in accordance with Remark 3 at  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$



Покажем, что предельные циклы не могут пересекать кривую  $\tilde{\Psi} = 0$ . Предположим противное, тогда точка на предельном цикле с увеличением времени может попасть на кривую  $\tilde{\Psi} = 0$  только из множества, где  $\tilde{\Psi} < 0$ , и обязательно должна уйти в множество, где  $\tilde{\Psi} > 0$ . Но, двигаясь по предельному циклу, эта точка должна снова вернуться в исходное положение в области  $\tilde{\Psi} = 0$ , что в силу  $\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} > 0$  невозможно. Полученное противоречие доказывает, что предельные циклы системы (1) не могут пересекать кривую  $\tilde{\Psi} = 0$ . Теорема 9 доказана.

В случае знакопеременной функции  $\hat{\Phi}$  из теорем 6 и 9 вытекает способ установления точного числа предельных циклов второго рода в области  $D$ , суть которого выражает

**Теорема 10.** Пусть для системы (1) выполняются условия теоремы 2 и при  $\tilde{k} < 0$  существует функция  $V$  вида (5) такая, что в области  $D$  множество  $\tilde{W}$  состоит из двух овалов  $\tilde{w}_1$  и  $\tilde{w}_2$ , между которыми расположены все овалы множества  $W$ . Если при этом множество  $\hat{V}$  не пересекается с множеством  $\tilde{W}$  и не имеет овалов, окружающих цилиндр, расположенных между овалами  $\tilde{w}_1$  и  $w_1$  или овалами  $w_s$  и  $\tilde{w}_2$ , то система (1) в области  $D$  имеет точно  $s + 1$  предельных циклов.

Если в теореме 8 функцию  $\tilde{\Psi}$  выбрать в виде  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$ , то, очевидно, она будет представлять частный случай теоремы 10, в котором  $\tilde{k} = k$ .

**3. Практическая апробация.** Покажем применение теорем 4, 8 и 10 на примере системы (1) вида

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= d_0 + d_1y + d_2y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= q_0(\varphi) + q_1(\varphi)y + q_2(\varphi)y^2 + q_3(\varphi)y^3, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ , а  $2\pi$  – периодические функции  $q_j(\varphi)$ ,  $j = 0, \dots, 3$ , являются непрерывными.

На первом шаге для системы (7) находилась функция Дюлака – Черкаса вида

$$\Psi(\varphi, y) = (y - a)(y + a), \tag{8}$$

где  $a$  – положительное действительное число. Соответствующая функция  $\Phi$  из условия (2) при  $k = -1$  принимает вид

$$\Phi = -q_3(\varphi)y^4 + [3a^2q_3(\varphi) + q_1(\varphi)]y^2 + 2[a^2q_2(\varphi) + q_0(\varphi)]y + a^2q_1(\varphi). \tag{9}$$

При выполнении условий

$$q_1(\varphi) = -3a^2q_3(\varphi), \quad q_0(\varphi) = -a^2q_2(\varphi) \tag{10}$$

функция  $\Phi$  запишется следующим образом:

$$\Phi = -q_3(\varphi)(y^4 + 3a^4) \tag{11}$$

и, очевидно, будет являться положительной (отрицательной) на всем цилиндре, если  $q_3(\varphi) < 0 (> 0)$ . При отсутствии точек покоя на цилиндре  $Z$  теорема 2 обеспечивает для системы (7) существование в области  $Z_1 = \{(\varphi, y) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -a \leq y \leq a\}$  единственного предельного цикла второго рода, который будет неустойчивым (устойчивым) в случае  $q_3(\varphi) < 0 (> 0)$ .

Для выяснения вопроса о наличии предельного цикла второго рода в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_2$  применим способы, изложенные в теоремах 4, 8 и 10. На этом шаге функция  $\tilde{\Psi}$  находилась в виде  $\tilde{\Psi} = \Psi\tilde{\Psi}$ , где  $\tilde{\Psi} = (y - b)(y + b)$  и число  $b > a$ . Для упрощения вычисления далее будем предполагать выполнение условий

$$q_3(\varphi) = a^2 - b^2, \quad q_2(\varphi) = -4a^2b, \quad a = 1, \quad b = 3. \tag{12}$$

Тогда функция  $\tilde{\Phi}$  из условия (4) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = & 216\tilde{k} - (240 + 216\tilde{k})y - (480 + 456\tilde{k})y^2 + \\ & +(288 + 240\tilde{k})y^3 + (256 + 264\tilde{k})y^4 - (48 + 24\tilde{k})y^5 - (32 + 24\tilde{k})y^6. \end{aligned} \quad (13)$$

При  $\tilde{k} = -1$  функция (13) принимает вид

$$\tilde{\Phi} = -216 - 24y - 24y^2 + 48y^3 - 8y^4 - 24y^5 - 8y^6$$

и является всегда отрицательной. В этом случае при отсутствии точек покоя и выполнении условий (10), (12) теорема 4 обеспечивает для системы (7) существование по одному устойчивому предельному циклу второго рода в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_2$  (см. рис. 3). Таким образом, эта система имеет точно три предельных цикла на всем цилиндре.

Если  $\tilde{k} = -2$ , то функция (13) принимает вид

$$\tilde{\Phi} = -432 + 192y + 432y^2 - 192y^3 - 272y^4 + 16y^6$$

и изменяет знак при  $y = -3,41672$  и  $y = 4,27279$ , что означает наличие двух овалов множества  $\tilde{V}$ , окружающих цилиндр. Расположение указанных овалов относительно овалов  $\tilde{w}_i$ ,  $w_i$  позволяет в этом случае применить теорему 8 и с ее помощью доказать для системы (7) при указанных выше условиях существование по одному устойчивому предельному циклу второго рода в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_2$  (рис. 5).

Если же  $\tilde{k} = -10$ , то функция (13) принимает вид

$$\tilde{\Phi} = -2160 + 1920y + 4080y^2 - 2112y^3 - 2384y^4 + 192y^5 + 208y^6$$

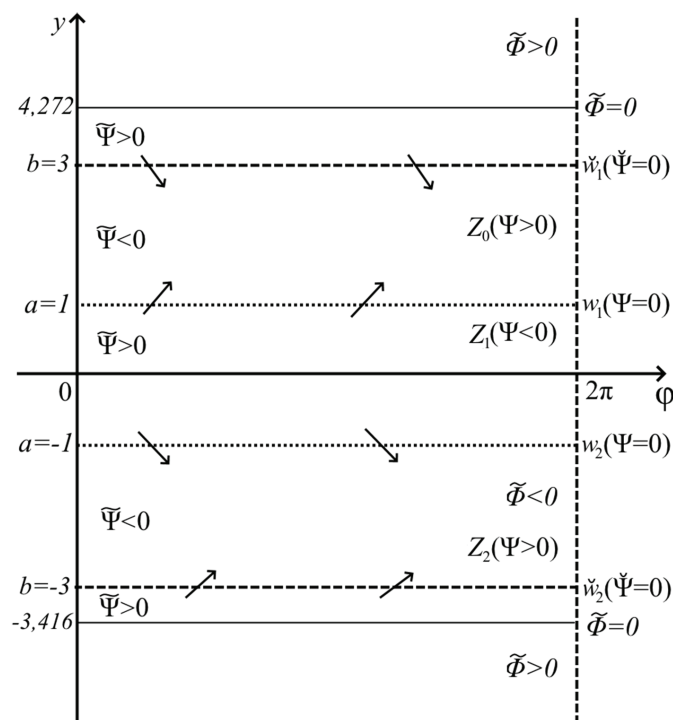


Рис. 5. Расположение двух овалов множества  $\tilde{V}$ , а также овалов  $w_1$ ,  $w_2$ , и овалов  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , с указанием направлений пересечения их траекториями системы (7) на цилиндре  $Z$

Fig. 5. The location of two ovals of the set  $\tilde{V}$ , as well as the ovals  $w_1$ ,  $w_2$ , and the ovals  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , indicating the directions of their intersection by the trajectories of the system (7) on the cylinder  $Z$

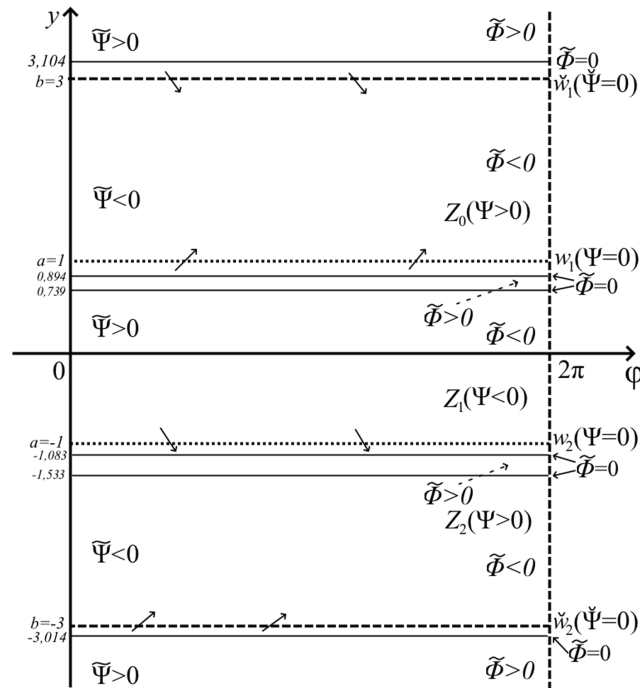


Рис. 6. Расположение шести овалов множества  $\tilde{V}$ , а также овалов  $w_1$ ,  $w_2$ , и овалов  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , с указанием направлений пересечения их траекториями системы (7) на цилиндре  $Z$

Fig. 6. The location of six ovals of the set  $\tilde{V}$ , as well as the ovals  $w_1$ ,  $w_2$ , and the ovals  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , indicating the directions of their intersection by the trajectories of the system (7) on the cylinder  $Z$

и изменяет знак при  $y = -3,04433$ ,  $y = -1,53337$ ,  $y = -1,08346$ ,  $y = 0,739118$ ,  $y = 0,89496$  и  $y = 3,104$ , что означает наличие шести овалов множества  $\tilde{V}$ , окружающих цилиндр. Расположение указанных овалов относительно овалов  $\tilde{w}_i$ ,  $w_i$  позволяет в этом случае также применить теорему 8 и с ее помощью доказать для системы (7) при указанных выше условиях существование по одному устойчивому предельному циклу второго рода в каждой из областей  $Z_0$  и  $Z_2$  (рис. 6).

**Заключение.** Таким образом, представлен новый способ для нахождения точного числа и локализации предельных циклов второго рода автономной системы (1), цилиндрическое фазовое пространство которой не содержит точек покоя. Суть способа состоит в последовательном двухшаговом применении признака Дюлака – Черкаса и его модификации или модификации признака Дюлака, где знакопостоянность вспомогательной функции заменяется условием трансверсальности кривых, на которых дивергенция обращается в нуль. Практическая эффективность разработанного способа продемонстрирована на примере системы маятникового типа, для которой в случае отсутствия точек покоя доказано существование точно трех предельных циклов второго рода на всем фазовом цилиндре.

### Список использованных источников

1. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1990. – 486 с.
2. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – 2-е изд., перераб. и испр. – М.: Наука, 1981. – 918 с.
3. Барбашин, Е. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством / Е. А. Барбашин, В. А. Табуева. – М.: Наука, 1969. – 350 с.
4. Черкас, Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 689–699.
5. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно: ГрГУ, 2013. – 489 с.
6. Черкас, Л. А. Функция Дюлака для динамических систем на цилиндре / Л. А. Черкас, А. А. Гринь // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Выліч. тэхніка і кіраванне. – 2007. – № 2. – С. 3–8.

7. Черкас, Л. А. Функция предельных циклов второго рода для автономных систем на цилиндре / Л. А. Черкас, А. А. Гринь // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 462–470.
8. Cherkas, L. A. A new approach to study limit cycles on a cylinder / L. A. Cherkas, A. A. Grin, K. R. Schneider // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Mathematical Analysis. – Vol. 18, № 6a. – 2011. – P. 839–851.
9. Гринь, А. А. Оценка числа предельных циклов для одного уравнения Абеля / А. А. Гринь, С. В. Рудевич // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Выліч. тэхніка і кіраванне. – 2015. – № 2 (192). – С. 28–35.
10. Grin, A. A. Study of the bifurcation of a multiple limit cycle of the second kind by means of a Dulac-Cherkas function / A. A. Grin, K. R. Schneider // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2016. – Vol. 26, № 14. – P. 76–85. <https://doi.org/10.1142/s0218127416502291>
11. Alvarez, M. J. New uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations / M. J. Alvarez, A. Gasull, H. A. Giacomini // J. Differential Equations. – 2007. – Vol. 234, № 1. – P. 161–176. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.11.004>
12. Grin, A. A. Construction of generalized pendulum equations with prescribed maximum number of limit cycles of the second kind / A. A. Grin, K. R. Schneider // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Mathematical Analysis. – 2019. – Vol. 26. – P. 69–88.
13. Ilyashenko, Y. Centennial history of Hilbert's 16th problem / Y. Ilyashenko // Bull. Am. Math. Soc. – 2002. – Vol. 39, № 3. – P. 301–354. <https://doi.org/10.1090/s0273-0979-02-00946-1>
14. Гринь, А. А. Признак Дюлака – Черкаса для точной оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 174–182. <https://doi.org/10.1134/s0374064117020042>
15. Гринь, А. А. Точные оценки числа предельных циклов автономных систем с тремя точками покоя на плоскости / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 7–17.
16. Кузьмич, А. А. О точном числе предельных циклов некоторых автономных систем с тремя точками покоя на плоскости / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Выліч. тэхніка і кіраванне. – 2017. – № 2. – С. 30–40.
17. Гринь, А. А. Признак Дюлака – Черкаса для установления точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре / А. А. Гринь, С. В. Рудевич // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 328–336. <https://doi.org/10.1134/s0374064119030063>

## References

1. Bautin N. N., Leontovich E. A. *Methods and Techniques for Qualitative Study of the Dynamic Systems on Plane*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 486 p. (in Russian).
2. Andronov A. A., Vitt A. *Oscillation Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1981. 918 p. (in Russian).
3. Barbashin E. A., Tabueva V. A. *Dinamicheskie sistemy s tsilindricheskim fazovym prostranstvom*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 350 p. (in Russian).
4. Cherkas L. A. Dulac function of polynomial autonomous systems on the plane. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 5, pp. 689–699 (in Russian).
5. Cherkas L. A., Grin' A. A., Bulgakov V. I. *Constructive Methods for Studying Limit Cycles of Autonomous Second-Order Systems (Numerical-Algebraic Approach)*. Grodno, Yanka Kupala State University of Grodno, 2013. 489 p. (in Russian).
6. Cherkas L. A., Grin A. A. Dulac function for dynamical systems on a cylinder. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control = Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhavnaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seriya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naiia Tekhnika i Kiravanne*, 2007, no. 2, pp. 3–8 (in Russian).
7. Cherkas L. A., Grin' A. A. The function of limit cycles of the second kind for autonomous systems on a cylinder. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 462–470 <https://doi.org/10.1134/s0012266111040021>.
8. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. R. A new approach to study limit cycles on a cylinder. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis*, 2011, vol. 18, no. 6a, pp. 839–851.
9. Grin A. A. Estimate of the number of limit cycles for one Abel equation. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control = Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhavnaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seriya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naiia Tekhnika i Kiravanne*, 2015, no. 2 (192). pp. 28 – 35 (in Russian).
10. Grin A. A., Schneider K. R. Study of the bifurcation of a multiple limit cycle of the second kind by means of a Dulac-Cherkas function. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 14, pp. 76–85. <https://doi.org/10.1142/s0218127416502291>
11. Alvarez M. J., Gasull A., Giacomini H. A. New uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations. *Journal of Differential Equations*, 2007, vol. 234, no. 1, pp. 161–176. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.11.004>
12. Grin A. A., Schneider K. R. Construction of generalized pendulum equations with prescribed maximum number of limit cycles of the second kind. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis*, 2019, no 26, pp. 69–88.
13. Ilyashenko Y. Centennial history of Hilbert's 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2002, vol. 39, no. 3, pp. 301–354. <https://doi.org/10.1090/s0273-0979-02-00946-1>

14. Grin A. A., Kuz'mich A. V. Accurate estimates of the number of limit cycles of autonomous systems with three points of rest on a plane. *Differential Equation*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 171–179. <https://doi.org/10.1134/s0012266117020033>

15. Grin A. A., Kuz'mich A. V. Accurate estimates of the number of limit cycles of autonomous systems with three points of rest on a plane. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 4, pp. 7–17 (in Russian).

16. Kuz'mich A. A., Grin A. A. On the exact number of limit cycles of some autonomous systems with three points of rest on a plane. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics. Computer Technology and its Control = Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhavnaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne*, 2017, no. 2, pp. 30–40 (in Russian).

17. Grin A. A., Rudevich S. V. Dulac – Cherkas Test for Determining the Exact Number of Limit Cycles of Autonomous Systems on the Cylinder. *Differential Equation*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 319–327. <https://doi.org/10.1134/s0012266119030054>

### Информация об авторах

**Гринь Александр Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: [grin@grsu.by](mailto:grin@grsu.by)

**Рудевич Сергей Вячеславович** – аспирант, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: [serhiorv@gmail.com](mailto:serhiorv@gmail.com)

### Information about the authors

**Aliaksandr A. Hryn** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Republic of Belarus). E-mail: [grin@grsu.by](mailto:grin@grsu.by)

**Searhei V. Rudevich** – Postgraduate Student, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Republic of Belarus). E-mail: [serhiorv@gmail.com](mailto:serhiorv@gmail.com)