ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.948.32:517.544
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-195-198

Поступила в редакцию 10.01.2019
Received 10.01.2019

О. Б. Долгополова, Э. И. Зверович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ МЕР КОМПОНЕНТ КРАЯ КОНЕЧНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. В статье предложен новый способ вычисления гармонических мер компонент края конечносвязной области.

Ключевые слова: краевая задача, краевое условие, задача Дирихле, интегральное уравнение, гармоническая функция, аналитическая функция

Для цитирования. Долгополова, О. Б. Вычисление гармонических мер компонент края конечносвязной области / О. Б. Долгополова, Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 195–198. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-195-198

O. B. Dolgopolova, E. I. Zverovich

Belarusian State University, Minsk, Belarus

CALCULATION OF HARMONIC MEASURES OF THE BOUNDARY COMPONENTS OF THE FINITELY CONNECTED DOMAIN

Summary. The article proposes a new method for calculating harmonic measures of the boundary components of the finitely connected domain.

Keywords: boundary value problem, boundary condition, Dirichlet problem, integral equation, harmonic function, analytic function

For citation. Dolgopolova O. B., Zverovich E. I. Calculation of harmonic measures of the boundary components of the finitely connected domain. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 195–198 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-195-198

Пусть $D \subset \mathbb{C} - (m+1)$-связная область ($m \in \mathbb{N}$) с простым гладким краем $\partial D = b_0 \cup b_1 \cup \ldots \cup b_m$, где $b_0, b_1, \ldots, b_m$ – связные компоненты края, причем кривая b_0 охватывает остальные кривые $b_1, \ldots, b_m$ (рис. 1).

Край ∂D ориентируется стандартно (т. е. ориентация края оставляет область D слева). Известно, что классическая задача Дирихле для нахождения гармонической функции $u = u(z)$, $z = x + iy \in D$, по условию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(t)\Big|_{t \in \partial D} = f(t), \tag{1}$$

разрешима безусловно и однозначно при любой функции $f \in C(\partial D)$. Существование решения основано на теореме о конформном отображении универсальной поверхности наложения области D на круг и одной квадратуре [1, с. 29–31]. Если область D односвязна, то решение задачи Дирихле сводится к конформному отображению области D на круг и одной квадратуре [2]. Если край односвязной области есть простая кривая Ляпунова, то решение задачи Дирихле можно искать в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью [2, 3]. В этом случае она сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимому безусловно и однозначно. Если же область многосвязна, то это интегральное уравнение имеет собственные функции, что значительно усложняет решение задачи Дирихле.

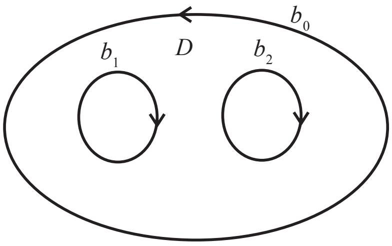

Рис. 1

Fig. 1

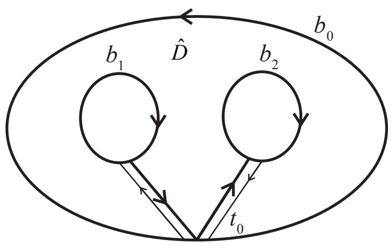

Рис. 2

Fig. 2

Наша цель – дать другой способ решения задачи (1), более удобный с точки зрения возможных приложений. С этой целью найдем сначала простой способ вычисления гармонических мер гладких компонент края области D, т. е. гармонических в области D функций $\omega_\nu(z)$, $\nu = 1,\ldots,m$, удовлетворяющих следующим краевым условиям:

$$\omega_\nu(t) = \begin{cases} 1, & t \in b_\nu, \\ 0, & t \in \partial D \setminus b_\nu. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через $\tilde{\omega}_\nu(z)$ многозначную функцию, гармонически сопряженную к $\omega_\nu(z)$. Аналитические функции $w_\nu(z) = \omega_\nu(z) + i\tilde{\omega}_\nu(z)$ многозначны, а их производные однозначны и аналитичны в D. Представим их по интегральной формуле Коши

$$w'_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\tilde{\omega}'_\nu(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D, \quad \nu = 1,\ldots,m. \tag{3}$$

Здесь учтено, что $\omega_\nu(t)$ постоянна при $t \in b_\nu$, и потому $\omega'_\nu(t) \equiv 0$ при $t \in \partial D$. Проведем в $D \cup \partial D$ и зафиксируем гладкие разрезы, соединяющие точку $t_0 \in b_0$ с точками $t_\nu \in b_\nu$, $\nu = 1,\ldots,m$, не имеющие общих внутренних точек (рис. 2).

Удалив из области D все эти разрезы, обозначим полученную таким образом односвязную область через $\hat{D}$. Комплексную координату t_0 имеют теперь несколько различных точек края области $\hat{D}$. Будем обозначать через t_0 ту из них, которая совпадает с началом кривой b_0 (см. рис. 2).

Проинтегрируем равенство (3) вдоль пути, лежащего (кроме точки t_0) в области $\hat{D}$ и соединяющего точку t_0 с точкой $z \in \hat{D}$. Так как область $\hat{D}$ – односвязная, а функция $w_\nu(z)$ – аналитическая, то этот интеграл не зависит от пути, и мы имеем

$$w_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} {\int_{t_0}^{z}}' d\zeta \int_{\partial D} \frac{\tilde{\omega}'_\nu(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \tilde{\omega}'_\nu(\tau) d\tau {\int_{t_0}^{z}}' \frac{d\zeta}{\zeta - \tau} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \tilde{\omega}'_\nu(\tau) \ln(\zeta - \tau)\Big|_{t_0}^{z} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \ln\frac{\tau - t_0}{\tau - z} \tilde{\omega}'_\nu(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Здесь штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования лежит в односвязной области $\hat{D}$, а под $\ln(\zeta - \tau)$ понимается ветвь, однозначная и аналитическая по ζ в области $\hat{D}$ (при $\tau \in \partial\hat{D}$). Таким образом, из (4) получаем

$$w_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \tilde{\omega}'_\nu(\tau) \ln\frac{\tau - t_0}{\tau - z} d\tau, \quad z \in \partial\hat{D}, \quad \nu = 1,\ldots,m. \tag{5}$$

Пусть теперь $z \to t \in \partial D$. Тогда из (5) получим

$$\omega_\nu(t) + i\tilde{\omega}_\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \ln\frac{\tau - t}{\tau - t_0} \tilde{\omega}'_\nu(\tau) d\tau, \quad t \in \partial D. \tag{6}$$

Выделив здесь вещественные части и заметив, что дифференциал $\tilde{\omega}'_\nu(\tau)d\tau$ – чисто вещественный, найдем

$$\omega_\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D} \ln\left|\frac{\tau - t}{\tau - t_0}\right| \tilde{\omega}'_\nu(\tau)d\tau, \quad t \in \partial D, \quad \nu = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Так как левые части этих равенств заданы формулами (2), то равенство (7) можно рассматривать как интегральное уравнение первого рода для нахождения вещественного дифференциала $\tilde{\omega}'_\nu(\tau)d\tau$. Ядро уравнения (7) неограниченно, но очевидно, что

$$\iint\limits_{\partial D \times \partial D} \left(\ln\left|\frac{\tau - t}{\tau - t_0}\right|\right)^2 |d\tau||dt| < +\infty.$$

Значит, правая часть равенства (7) есть вполне непрерывный оператор из $L^2(\partial D)$ в $L^2(\partial D)$, и поэтому уравнение (7) есть уравнение Фредгольма первого рода. Обе части соответствующего ему однородного уравнения

$$\int\limits_{\partial D} \ln\left|\frac{\tau - t}{\tau - t_0}\right| \varphi(\tau)d\tau = 0, \quad t \in \partial D, \tag{8}$$

однозначно продолжаются по непрерывности до гармонической в $\mathbb{C}$ функции, и мы получаем уравнение

$$\int\limits_{\partial D} \ln\left|\frac{\tau - z}{\tau - t_0}\right| \varphi(\tau)d\tau = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Добавив к нему мнимую часть, получим уравнение

$$-2\pi i\Phi(z) = \int\limits_{\partial D} \ln\frac{\tau - z}{\tau - t_0} \varphi(\tau)d\tau = i\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Дифференцируя его по z, получим

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z} \equiv 0.$$

Применив к этому равенству формулу Сохоцкого, найдем

$$\Phi'^{+}(t) - \Phi'^{-}(t) = \varphi(t) \equiv 0, \quad t \in \partial D.$$

Значит, однородное уравнение (8) имеет только нулевое решение. Поэтому оператор, стоящий в правой части равенства (7), инъективен.

Введем обозначение:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \omega_k(t), \tag{9}$$

где все $c_k \in \mathbb{R}$, и будем рассматривать уравнение (7), правая часть которого вычисляется по формуле (9):

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D} \ln\left|\frac{\tau - t}{\tau - t_0}\right| \varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \quad t \in \partial D. \tag{10}$$

В силу тождества (7) уравнение (10) имеет единственное решение, а именно, вещественный дифференциал

$$\varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{m} c_k \tilde{\omega}'_k(t)dt, \tag{11}$$

где коэффициенты c_k – те же, что и в (9).

Отсюда следует, что *сужение оператора, обратного к правой части* (7)*, на функции* (9)*, есть непрерывный оператор. Значит, уравнение* (10) *с правой частью* (9) *однозначно и безусловно разрешимо, а его решение непрерывно зависит от правой части.*

Численное решение уравнения (10) с правой частью (9) представляет собой актуальную проблему. В качестве этого решения можно предложить очевидное: заменить интеграл в (10) интегральной суммой и свести это уравнение к системе линейных алгебраических уравнений. Однако вопросы о разрешимости получаемой таким образом системы и о сходимости этого метода остаются открытыми.

Предположим теперь, что уравнения (7) решены, т. е. найдены дифференциалы $\tilde{\omega}'_\nu(\tau)d\tau$, $\nu = 1,\ldots,m.$ Тогда в равенстве (7) можно формально заменить $t \in \partial D$ на $z \in D,$ и мы получим выражения для гармонических мер компонент края области D:

$$\omega_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\ln\left|\frac{\tau - z}{\tau - t_0}\right|\tilde{\omega}'_\nu(\tau)d\tau,\ \ z \in D,\ \ \nu = 1,\ldots,m. \qquad (12)$$

Добавив сюда мнимую часть указанной выше ветви логарифма, найдем выражения для комплексных гармонических мер

$$w_\nu(z) = \omega_\nu(z) + i\tilde{\omega}_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\ln\frac{\tau - z}{\tau - t_0}\tilde{\omega}'_\nu(\tau)d\tau,\ \ z \in D,\ \ \nu = 1,\ldots,m. \qquad (13)$$

Используя найденные значения комплексных гармонических мер, можно решить задачу Дирихле для многосвязной области по формуле, найденной в работе [4].

Список использованных источников

1. Неванлинна, Р. Однозначные аналитические функции: пер. с нем. / Р. Неванлинна. − М.; Л.: Гостехиздат, 1941. – 388 с.

2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. И. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

3. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 513 с.

4. Долгополова, О. Б. Построение в явном виде оператора Шварца для многосвязной области / О. Б. Долгополова, Э. И. Зверович // Системы компьютерной математики и приложения / Смоленск. гос. ун-т. – Смоленск, 2009. – С. 175–177.

References

1. Nevanlinna R. *Eindeutigen Analytischen Funktionen*. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1941. 388 p. (in Russian).

2. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. *Methods of the Theory of Complex Variables Functions*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p. (in Russian).

3. Muskhelishvili N. I. *Syngular Integran Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p. (in Russian).

4. Dolgopolova O. B., Zverovich E. I. Construction in explicit form Schwarz operator for multiconnected domain. *System of computer mathematic and applications*. Smolensk, Smolensk State University, 2009, pp. 175–177 (in Russian).

Информация об авторах

Зверович Эдмунд Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zverovich@bsu.by

Долгополова Ольга Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: dolgopolova@tut.by

Information about the authors

Edmund I. Zverovich – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zverovich@bsu.by

Ol'ga B. Dolgopolova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: dolgopolova@tut.by