ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.925.7
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-199-206

Поступила в редакцию 01.02.2018
Received 01.02.2018

**В. В. Амелькин, М. Н. Василевич**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

# ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ЗАДАННЫМИ КОНЕЧНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И ПРИВОДИМОЙ ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

**Аннотация.** Рассматривается одна обратная задача аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Именно на комплексной проективной прямой строится вполне интегрируемое уравнение Фукса с четырьмя заданными конечными особыми точками и заданной приводимой группой монодромии ранга 2, т. е. такой группой монодромии, когда 2×2-матрицы монодромии (образующие группы монодромии) можно одним линейным невырожденным преобразованием одновременно привести к верхнему треугольному виду. При этом исследуется тот случай, когда собственное значение $\xi_j$ диагональной матрицы формального показателя монодромии в соответствующей фуксовой особой точке равно целому числу, отличному от нуля (имеет место резонанс).

**Ключевые слова:** уравнение Фукса, особая точка, матрица монодромии, приводимая группа монодромии, фундаментальная матрица

**Для цитирования.** Амелькин, В. В. Построение уравнения Фукса с четырьмя заданными конечными особыми точками и приводимой группой монодромии в резонансном случае / В. В. Амелькин, М. Н. Василевич // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 199–206. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-199-206

**V. V. Amel'kin, M. N. Vasilevich**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## CONSTRUCTION OF THE FUCHS EQUATION WITH FOUR GIVEN FINITE CRITICAL POINTS AND A GIVEN REDUCIBLE MONODROMY GROUP IN THE RESONANCE CASE

**Abstract.** One inverse problem of the analytic theory of linear differential equations is considered. Namely, the completely integrable Fuchs equation with four given finite critical points and a given reducible monodromy group of rank 2 on the complex projective line is constructed. Reducibility of the monodromy group of rank 2 means that 2×2-monodromy matrices (the generators of the monodromy group) can be simultaneously reduced by a linear nonsingular transformation to an upper triangular form. In so doing we study the case when the eigenvalue $\xi_j$ of the diagonal matrix of the monodromy formal exponent at a corresponding Fuchs critical point is equal to an integer different from zero (resonance takes place).

**Keywords:** Fuchs equation, critical point, monodromy matrix, reducible monodromy group, fundamental matrix.

**For citation.** Amel'kin V. V., Vasilevich M. N. Construction of the Fuchs equation with four given finite critical points and a given reducible monodromy group in the resonance case. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 199–206 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-199-206

Пусть $X = \mathbf{CP}^1$ – комплексная проективная прямая, $\alpha_j$, $j = \overline{1, n}$, – произвольные точки на прямой $X$, $\overline{M} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$. На открытом множестве $M = X \setminus \overline{M}$ рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \tag{1}$$

где $Y$ – квадратная матрица порядка $m$; $U_j$ – $m \times m$-матрицы-вычеты уравнения, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = 0. \tag{2}$$

Согласно теореме о сумме вычетов, условие (2) означает, что точки $x = \infty$ нет среди особых точек матричного уравнения (1), чего всегда можно добиться конформным преобразованием $\mathbf{CP}^1$.

Пусть $x_0$ – фиксированная (базисная) точка открытого множества $M$. В окрестности точки $x_0 \in M$ обозначим через $\Phi(x)$ фундаментальную матрицу уравнения (1), через $[\gamma_j]$ – класс гомотопных замкнутых петель $\gamma_j$ из $M$, выходящих из точки $x_0$ и охватывающих точку $\alpha_j$, $j = \overline{1, n}$. Классы гомотопных петель порождают фундаментальную группу $\pi_1(M, x_0)$ открытого множества (многообразия) $M$. Матрица $\widetilde{\Phi}(x)$, полученная из матрицы $\Phi(x)$ аналитическим продолжением вдоль петли $\gamma_j$, представляется в виде $\widetilde{\Phi}(x) = \Phi(x)V_j$, где $V_j$ – квадратная постоянная матрица порядка $m$. Постоянные матрицы $V_j$, называемые матрицами монодромии, будем в дальнейшем считать такими, что для них выполняется соотношение

$$\prod_{j=1}^{n} V_j = E, \tag{3}$$

где $E$ – единичная матрица.

При выполнении условия (3) невырожденные матрицы $V_j$ порождают мультипликативную группу, которая является подгруппой общей линейной группы $GL(m; \mathbf{C})$ и называется группой монодромии [1].

Пусть задан гомоморфизм

$$\chi : \pi_1(M, x_0) \to GL(m; \mathbf{C}) \tag{4}$$

фундаментальной группы многообразия $M$ в мультипликативную группу $GL(m; \mathbf{C})$ невырожденных комплекснозначных матриц порядка $m$.

Гомоморфизм (4) называют монодромией, или представлением монодромии уравнения (1).

Обратимся к случаю $n = 4$, $m = 2$, т. е. рассмотрим уравнение

$$dY = \left( \sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \tag{5}$$

где $Y$ – квадратная матрица порядка 2; $U_j$ – постоянные (не зависящие от $x$) $2\times2$-матрицы, удовлетворяющие условию (2) при $n = 4$.

В этом случае, как отмечалось в [2], из результатов работы [3] вытекает существование уравнения (5), (2) при $n = 4$ с заданными особыми точками $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, фундаментальная матрица которого реализует заданный гомоморфизм.

Формулируемая ниже задача связана с построением уравнения вида (5) по определенно заданной приводимой группе монодромии, фундаментальная матрица которого реализует заданный гомоморфизм в резонансном случае.

Итак, обозначим

$$A_{12} = \alpha_1 - \alpha_2, \;\; A_{23} = \alpha_2 - \alpha_3, \;\; A = \alpha_1 A_{23} - i\alpha_3 A_{12},$$

$$B = \alpha_1 A_{23} + i\alpha_3 A_{12}, \;\; C = A_{23} - iA_{12}, \;\; D = A_{23} + iA_{12}, \;\; i = \sqrt{-1}.$$

По аналогии с [4, теорема 1] доказывается

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (5) *с произвольными конечными особыми точками* $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ *и четвертой особой точкой*

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_1 A_{23} - \alpha_3 A_{12}}{A_{23} - A_{12}}, \;\; A_{23} - A_{12} \neq 0, \tag{6}$$

*приводится дробно-линейным преобразованием* $x = \dfrac{Az + B}{Cz + D}$ *к уравнению*

$$dY = \left( \sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{z - \overline{\alpha}_j} \right) Y dz \tag{7}$$

*с особыми точками* $\overline{\alpha}_1 = 1,\ \overline{\alpha}_2 = i,\ \overline{\alpha}_3 = -1,\ \overline{\alpha}_4 = -i.$

Напомним далее, что набор матриц $B_j,\ j = \overline{1, n},$ называется приводимым, если все эти матрицы могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду одним линейным невырожденным преобразованием.

Рассматривая тогда постоянные 2×2-матрицы $W_j,\ j = \overline{1, 4},$ будем предполагать, что они уже приведены к верхнетреугольному виду. А в таком случае, не умаляя общности, можно считать [5], что

$$W_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \mu_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda_j + N_j, \tag{8}$$

где

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} \xi_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_j = \begin{pmatrix} 0 & \mu_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ j = \overline{1, 4}.$$

При этом, поскольку в статье исследуется случай резонанса, собственные значения $\xi_j$ в матрицах $W_j(\Lambda_j),\ j = \overline{1, 3},$ будем в дальнейшем выбирать из множества натуральных чисел, а как будет показано ниже, должны выполняться еще и равенства

$$\xi_4 = -\sum_{j=1}^{3} \xi_j, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \mu_j = 0, \tag{10}$$

где $\mu_j$ – некоторые вещественные или комплексные числа.

Напомним также, что в резонансном случае пара $\{\Lambda_j, N_j\},\ j = \overline{1, 4},$ называется [6, с. 60] формальным показателем монодромии в фуксовой особой точке $\overline{\alpha}_j$ уравнения (7).

З а д а ч а (ср. [6, с. 59]). Заданы постоянные резонансные матрицы (8), (9), (10). Требуется построить дифференциальное уравнение (7) такое, чтобы его фундаментальная матрица $\Phi(z)$ в окрестности точки $z_0 \in M \setminus \{\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3, \overline{\alpha}_4\}$ имела в особых точках $\overline{\alpha}_j$ матрицы монодромии, совпадающие с заданными матрицами

$$V_j = e^{2\pi i N_j} = \begin{pmatrix} 1 & \nu_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\nu_j = 2\pi i \mu_j,\ j = \overline{1, 4}.$ Здесь матрицы $U_j,\ j = \overline{1, 4},$ и надо найти как функции матрицы (8). Другими словами, задача состоит в восстановлении фуксова уравнения вида (7) по его заданной резонансной монодромии.

З а м е ч а н и е. Обоснованием для выбора матриц монодромии в виде (11) является то, что в соответствии, например, с [6, с. 59] для каждой точки $\overline{\alpha}_j$ можно выбрать такую фундаментальную матрицу $\Phi(z)$ дифференциального уравнения (7) в окрестности точки $z_0$, аналитическое продолжение которой в малую окрестность точки $\overline{\alpha}_j$ имеет в этой окрестности следующий вид:

$$\Phi(z) = \widehat{\Phi}^{(j)}(z)(z - \overline{\alpha}_j)^{\Lambda_j}(z - \overline{\alpha}_j)^{N_j},\ j = \overline{1, 4}, \tag{12}$$

где $\widehat{\Phi}^{(j)}(z)$ – голоморфно обратимая матрица. А тогда непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что в соответствии с формулами (12) искомые матрицы монодромии действительно имеют вид (11).

Что же касается условия (10), то необходимость его выполнения вытекает из вида матриц (11) и условия (3) при $n = 4$.

Обращаясь к выяснению структуры матриц $U_j$, $j=\overline{1,4}$, заметим, что поскольку собственные значения матриц $W_j$, $j=\overline{1,4}$, и матриц-вычетов уравнения (7) совпадают [7, с. 159], то с учетом (8) матрицы $U_j$, $j=\overline{1,3}$, в уравнении (7) представимы [5] в виде

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ j=\overline{1,3}, \tag{13}$$

где $\theta_j$ – некоторые параметры.

Что же касается матрицы $U_4$, то ее всегда можно привести к виду

$$U_4 = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

что мы и будем считать выполненным.

А в таком случае из условия (2) при $n = 4$ следуют соотношения (9) и

$$\sum_{j=1}^{3} \theta_j = 0 \ \ (\theta_4 = 0). \tag{15}$$

Т е о р е м а 2. *Уравнение* (7) *с матрицами-вычетами* (13), (14) *вполне интегрируемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (7) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда [8, с. 41] дифференциальная 1-форма

$$\omega = \left( \frac{U_1}{z-1} + \frac{U_2}{z-i} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z+i} \right) dz$$

удовлетворяет условию

$$d\omega = \omega \wedge \omega, \tag{16}$$

где $\wedge$ – оператор внешнего дифференцирования.

Из соотношения (16) для матриц-вычетов уравнения (7) получаем тогда тождественные равенства

$$\begin{aligned} dU_1 &= [U_2, U_1]\, d\ln(1-i) + [U_3, U_1]\, d\ln(1+1) + [U_4, U_1]\, d\ln(1+i), \\ dU_2 &= [U_1, U_2]\, d\ln(i-1) + [U_3, U_2]\, d\ln(i+1) + [U_4, U_2]\, d\ln(i+i), \\ dU_3 &= [U_1, U_3]\, d\ln(-1-1) + [U_2, U_3]\, d\ln(-1-i) + [U_4, U_3]\, d\ln(-1+i), \\ dU_4 &= [U_1, U_4]\, d\ln(-i-1) + [U_2, U_4]\, d\ln(-i-i) + [U_3, U_4]\, d\ln(-i+1), \end{aligned}$$

где $[U_j, U_k]$ – матричный коммутатор, которые и означают справедливость теоремы.

Т е о р е м а 3. *Если для собственных значений матриц-вычетов* (13), (14) *уравнения* (7) *справедливо равенство* (9), *где* $\xi_j \in \mathbf{N}$, $j=\overline{1,3}$, *а параметры* $\theta_j$, $j=\overline{1,3}$, *удовлетворяют условию* (15), *то фундаментальная матрица* $\Phi(z)$ *уравнения* (7) *имеет вид*

$$\Phi(z) = E + \sum_{j=1}^{4} \varphi_j(z) U_j, \tag{17}$$

*где*

$$\varphi_j(z) = v(z)\int \frac{dz}{(z-\overline{\alpha}_j)v(z)}, \ \ j=\overline{1,4}, \tag{18}$$

$$v(z) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{3}(z-\overline{\alpha}_i)^{\xi_i}}{(z-\overline{\alpha}_4)^{\xi_1+\xi_2+\xi_3}}, \tag{19}$$

*и является нормированной в точке* $z_0 = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставив значение функции Ф из (17) в уравнение (7), имеем

$$\sum_{j=1}^{4}\varphi'_j(z)U_j = \left(\sum_{k=1}^{4}\frac{U_k}{z-\overline{\alpha}_k}\right)\left(E+\sum_{j=1}^{4}\varphi_j(z)U_j\right), \ \ ' = \frac{d}{dz}. \tag{20}$$

Учитывая же, что $U_kU_j = \xi_kU_j$, после сравнения в (20) коэффициентов при матрицах $U_j$, получим систему линейных скалярных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_j(z) - u(z)\varphi_j(z) = \frac{1}{z-\overline{\alpha}_j}, \ \ j=\overline{1,4}, \tag{21}$$

где $u(z) = \sum\limits_{l=1}^{4}\frac{\xi_l}{z-\overline{\alpha}_l}$.

А поскольку при каждом фиксированном $j$ функция $\varphi_j$, заданная равенством (18), где функция $v$ определяется равенством (19), является решением уравнения (21), то отсюда и следует, что функция Ф, определяемая посредством (17), – это фундаментальная матрица уравнения (7).

Докажем, что эта матрица нормирована в точке $z_0 = \infty$. Рассуждения здесь следующие. Перепишем формулы (18) в виде

$$\varphi_j(z) = v(z)\int f_j(z)dz, \ \ j=\overline{1,4}, \tag{22}$$

где

$$f_j(z) = \frac{(z-\overline{\alpha}_4)^{\xi_1+\xi_2+\xi_3}}{(z-\overline{\alpha}_j)\prod\limits_{i=1}^{3}(z-\overline{\alpha}_i)^{\xi_i}}, \ \ j=\overline{1,3}; \ \ f_4(z) = \frac{(z-\overline{\alpha}_4)^{\xi_1+\xi_2+\xi_3-1}}{\prod\limits_{i=1}^{3}(z-\overline{\alpha}_i)^{\xi_i}}. \tag{23}$$

Разлагая правые части равенств (23) на сумму простейших дробей, имеем

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{n_1}\frac{A_{k1}^{(j)}}{(z-1)^k} + \sum_{k=1}^{n_2}\frac{A_{k2}^{(j)}}{(z-i)^k} + \sum_{k=1}^{n_3}\frac{A_{k3}^{(j)}}{(z+1)^k}, \ \ j=\overline{1,4}, \tag{24}$$

где

$$n_1 = \xi_1+1, \ \ n_2 = \xi_2, \ \ n_3 = \xi_3, \ \ \text{если} \ \ j=1;$$

$$n_1 = \xi_1, \ \ n_2 = \xi_2+1, \ \ n_3 = \xi_3, \ \text{если} \ \ j=2;$$

$$n_1 = \xi_1, \ \ n_2 = \xi_2, \ \ n_3 = \xi_3+1, \ \text{если} \ \ j=3;$$

$$n_1 = \xi_1, \ \ n_2 = \xi_2, \ \ n_3 = \xi_3, \ \text{если} \ \ j=4.$$

Все коэффициенты разложений (24) могут быть найдены либо стандартным методом неопределенных коэффициентов, либо по формулам, по которым вычисляются вычеты полюсов соответствующих порядков рассматриваемых функций.

Что же касается точки $z_0 = \infty$, то каждая из функций (23) в этой точке аналитична, а вычеты функций $f_j$, $j=\overline{1,4}$, вычисляемые в этой точке, находятся по формуле

$$\operatorname*{res}_{\infty} f_j = \lim_{z\to\infty}\left[z^2 f_j'(z)\right],\ j=\overline{1,4},$$

и, как нетрудно проверить, равны –1.

Далее, поскольку все функции $f_j$, $j=\overline{1,4}$, аналитичны в конечной точке $z=\overline{\alpha}_4$, то $\operatorname*{res}_{\overline{\alpha}_4} f_j = 0$, $j=\overline{1,4}$. Но в таком случае по теореме о сумме вычетов сумма вычетов полюсов первого порядка в конечных особых точках $\overline{\alpha}_i$, $i=\overline{1,3}$, каждой из функций (23) равна 1, т. е.

$$\sum_{i=1}^{3}\operatorname*{res}_{\overline{\alpha}_i} f_j = 1,\ j=\overline{1,4}.$$

Тогда с учетом принятых обозначений имеем следующие равенства:

$$A_{11}^{(j)} + A_{12}^{(j)} + A_{13}^{(j)} = 1,\ A_{14}^{(j)} = 0. \tag{25}$$

Интегрируя далее простейшие дроби в (24), полагая постоянные интегрирования равными нулю, учитывая соотношения (25), равенство

$$A_{11}^{(j)}\ln(z-\overline{\alpha}_1) + A_{12}^{(j)}\ln(z-\overline{\alpha}_2) + A_{13}^{(j)}\ln(z-\overline{\alpha}_3) = \ln z + A_{11}^{(j)}\ln\left(1-\frac{\overline{\alpha}_1}{z}\right) + A_{12}^{(j)}\ln\left(1-\frac{\overline{\alpha}_2}{z}\right) +$$
$$+A_{13}^{(j)}\ln\left(1-\frac{\overline{\alpha}_3}{z}\right),$$

а также условие (2) при $n = 4$ и тот факт, что $v(\infty)=1$, после несложных преобразований приходим к выводу, что

$$\lim_{z\to\infty}\sum_{j=1}^{4}\varphi_j(z)U_j = \sum_{j=1}^{4}U_j\lim_{z\to\infty}\left(\ln z\right) = 0\cdot\lim_{z\to\infty}\left(\ln z\right) = 0,$$

где 0 – нулевая матрица, а значит, в формуле (17) матрица $\Phi(\infty) = E$. Итак, матрица $\Phi(z)$ – нормированная в точке $z_0 = \infty$ фундаментальная матрица уравнения (7). Теорема доказана.

Теорема 4. *Для того чтобы фундаментальная матрица* (17) *вполне интегрируемого дифференциального уравнения* (7), (13), (14), (9), (15) *имела заданные матрицы монодромии* (11), (10) *в представлении монодромии уравнения* (7), *необходимо и достаточно, чтобы параметры* $\theta_j$, $j=\overline{1,3}$, *удовлетворяли системе*

$$A_{1j}^{(1)}\theta_1 + A_{1j}^{(2)}\theta_2 + A_{1j}^{(3)}\theta_3 = \mu_j, \tag{26}$$

где

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_j = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Необходимость. С одной стороны, фундаментальная матрица $\Phi(z)$ уравнения (7) имеет в окрестности каждой особой точки вид (12) [6, с. 59], а значит, матрица $\widetilde{\Phi}(z)$, полученная из матрицы $\Phi(z)$ аналитическим продолжением вдоль петли $\overline{\gamma}_j$, выходящей из точки $z_0 = \infty$ и охватывающей точку $\overline{\alpha}_j$, – это матрица

$$\widetilde{\Phi}(z) = \Phi(z)V_j = \Phi(z)e^{2\pi i N_j} = \Phi(z)(E+2\pi i N_j), \tag{28}$$

где $j=\overline{1,4}$.

Отсюда следует, что $\widetilde{\Phi}(\infty) = E + 2\pi i N_j,\ \ j = \overline{1,4}.$

С другой стороны, из доказательства теоремы 3 вытекает, что

$$\widetilde{\Phi}(\infty) = E + 2\pi i\left(A_{1j}^{(1)}U_1 + A_{1j}^{(2)}U_2 + A_{1j}^{(3)}U_3 + A_{1j}^{(4)}U_4\right).$$

Таким образом, справедливы матричные равенства

$$A_{1j}^{(1)}U_1 + A_{1j}^{(2)}U_2 + A_{1j}^{(3)}U_3 + A_{1j}^{(4)}U_4 = N_j,\ \ j = \overline{1,4}, \tag{29}$$

которые можно переписать в виде скалярных соотношений

$$A_{1j}^{(1)}\xi_1 + A_{1j}^{(2)}\xi_2 + A_{1j}^{(3)}\xi_3 + A_{1j}^{(4)}\xi_4 \equiv 0, \tag{30}$$

$$A_{1j}^{(1)}\theta_1 + A_{1j}^{(2)}\theta_2 + A_{1j}^{(3)}\theta_3 = \mu_j,\ \ j = \overline{1,4}. \tag{31}$$

А тогда с учетом вторых равенств из (25) следует, что в (31) $\mu_4 = 0$ и, значит, параметры $\theta_j,\ j = \overline{1,3},$ необходимо удовлетворяют системе (26), (27).

Достаточность. Пусть параметры $\theta_j,\ j = \overline{1,3},$ удовлетворяют системе (26), (27). Тогда указанные параметры удовлетворяют и системе (31). При этом, поскольку имеют место соотношения (30) (в противном случае нарушалось бы или условие (9), или матричные равенства (29) при заданных матрицах (13), (14) и $N_j$), то на основании (25) следует выполнимость равенства (10). Ссылка на представление (12) ((28)) и доказывает теорему.

## Список использованных источников

1. Болибрух, А. А. Проблема Римана – Гильберта / А. А. Болибрух // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 2. – С. 3–47.

2. Болибрух, А. А. Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами / А. А. Болибрух // Соврем. проблемы математики. – 2003. – № 1. – С. 29–82. https://doi.org/10.4213/spm3

3. Dekkers, W. The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on P1(C) / W. Dekkers // Lecture Notes in Math. – 1979. – Vol. 712. – P. 33–43.

4. Амелькин, В. В. Построение уравнения Фукса с четырьмя заданными конечными особыми точками и заданными приводимыми 2×2-матрицами монодромии / В. В. Амелькин, М. Н. Василевич // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 3–8. https://doi.org/10.1134/s0374064118010016

5. Еругин, Н. П. Проблема Римана II / Н. П. Еругин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 779–799.

6. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А. Р. Итс [и др]. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед.; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 728 с.

7. Лаппо-Данилевский, И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И. А. Лаппо-Данилевский. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 456 с.

8. Амелькин, В. В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения / В. В. Амелькин. – 3-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2010. – 144 с.

## References

1. Bolibrukh A. A. The Riemann – Hilbert problem. *Russian Mathematical Surveys*, 1990, vol. 45, no. 2, pp. 1–58. https://doi.org/10.1070/rm1990v045n02abeh002350

2. Bolibrukh A. A. Differential equations with meromorphic coefficients. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, no. 2, pp. 13–43. https://doi.org/10.1134/s0081543811030035

3. Dekkers, W. The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on P1(C). *Lecture Notes in Mathematics*, 1979, vol. 712, pp. 33–43. https://doi.org/10.1007/bfb0062813

4. Amel'kin V. V., Vasilevich M. N. Construction of a Fuchs equation with four given finite critical points and given reducible monodromy 2×2-matrices. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 1–6. https://doi.org/10.1134/s0012266118010019

5. Erugin N. P. The Riemann Problem II. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1976, vol. 12, no. 5, pp. 779–799 (in Russian).

6. Its A. R., Kapaev A. A., Novokshenov V. Yu., Fokas A. S. *Painleve Transcendents. Method of Riemann Problem*. Moscow, Izhevsk, ICI, Regular and Chaostic Dynamics Publ., 2005. 728 p. (in Russian).

7. Lappo-Danilevskii I. A. *Application of Functions of Matrices to the Theory of Linear Systems of Ordinary Differential Equations*. Moscow, GITTL Publ., 1957. 456 p. (in Russian).

8. Amel'kin V. V. *Autonomous and Linear Multidimensional Differential Equations*. Ed. 3. Moscow, Editorial URSS Publ., 2010. 144 p. (in Russian).

## Информация об авторах

**Амелькин Владимир Васильевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vamlkn@mail.ru

**Василевич Михаил Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasilevich.m@gmail.com

## Information about the authors

**Vladimir V. Amel'kin** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Differential Equations and Systemic Analysis, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave, 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vamlkn@mail.ru

**Michail N. Vasilevich** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant professor of the Department of General Mathematics and Informatics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave, 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasilevich.m@gmail.com