

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.63

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-207-215>

Поступила в редакцию 23.04.2019

Received 23.04.2019

Е. В. Проконина

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аннотация. Исследовано влияния структуры спектров исходной и переобусловленной матриц разностных задач для двумерных эллиптических уравнений со смешанными производными на скорость сходимости итерационных методов решения систем соответствующих сеточных уравнений. Показано, что эффективность итерационных методов семейства би-сопряженных градиентов для систем с не симметричными матрицами существенно зависит не только от границ спектра матрицы, но и от неоднородности распределения его компонент, а также от величины мнимой части комплексных собственных чисел. Для тестовых матриц с фиксированным числом обусловленности изучены три варианта спектрального распределения и получены зависимости количества итераций от размерности матриц. Показано, что неравномерность распределения собственных значений в пределах фиксированных границ спектра приводит к существенному росту числа итераций с возрастанием размерности матриц. Аналогичное влияние на скорость сходимости оказывает рост амплитуды мнимой части собственных значений. На примере модельной задачи распределения потенциала в квадратной области с анизотропной кольцевой неоднородностью проведен сравнительный анализ взаимозависимости структуры спектра матриц и скорости сходимости метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации. Показано, что преимущества переобусловливателя Фурье – Якоби связаны с более равномерным распределением спектра переобусловленной матрицы вдоль действительной оси и лучшим подавлением мнимой составляющей спектра по сравнению с переобусловливателем на основе неполной LU-факторизации.

Ключевые слова: разностные схемы, эллиптические уравнения, смешанные производные, итерационные методы би-сопряженных градиентов, переобусловливатель Фурье – Якоби, неполная LU-факторизация

Для цитирования. Проконина, Е. В. Спектральные свойства дискретных моделей многомерных эллиптических задач со смешанными производными / Е. В. Проконина // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 207–215. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-207-215>

A. U. Prakonina

Belarusian State University, Minsk, Belarus

SPECTRAL PROPERTIES OF DISCRETE MODELS OF MULTI-DIMENSIONAL ELLIPTIC PROBLEMS WITH MIXED DERIVATIVES

Abstract. The influence of the spectrum of original and preconditioned matrices on a convergence rate of iterative methods for solving systems of finite-difference equations applicable to two-dimensional elliptic equations with mixed derivatives is investigated. It is shown that the efficiency of the bi-conjugate gradient iterative methods for systems with asymmetric matrices significantly depends not only on the matrix spectrum boundaries, but also on the heterogeneity of the distribution of the spectrum components, as well as on the magnitude of the imaginary part of complex eigenvalues. For test matrices with a fixed condition number, three variants of the spectral distribution were studied and the dependences of the number of iterations on the dimension of matrices were estimated. It is shown that the non-uniformity in the eigenvalue distribution within the fixed spectrum boundaries leads to a significant increase in the number of iterations with increasing dimension of the matrices. The increasing imaginary part of the eigenvalues has a similar effect on the convergence rate. Using as an example the model potential distribution problem in a square domain, including anisotropic ring inhomogeneity, a comparative analysis of the matrix structure and the convergence rate of the bi-conjugate gradient method with Fourier – Jacobi and incomplete LU factorization preconditioners is performed. It is shown that the advantages of the Fourier – Jacobi preconditioner are associated with a more uniform distribution of the spectrum of the preconditioned matrix along the real axis and a better suppression of the imaginary part of the spectrum compared to the preconditioner based on the incomplete LU factorization.

Keywords: finite-difference schemes, elliptic equations, mixed derivatives, iterative bi-conjugate gradient methods, Fourier – Jacobi preconditioner, incomplete LU factorization

For citation. Prakonina A. U. Spectral properties of discrete models of multi-dimensional elliptic problems with mixed derivatives. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 207–215 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-207-215>

Введение. Дискретизация эллиптических дифференциальных уравнений приводит к большим системам ЛАУ, для решения которых, как правило, привлекаются итерационные методы. В случае уравнений без смешанных производных с постоянными коэффициентами дискретный оператор разностной задачи представляет собой симметрическую и положительно определенную матрицу. Для решения таких систем разработан богатый арсенал эффективных методов, например итерационные методы крыловского типа – в частности, метод сопряженных градиентов [1].

В ряде случаев, например при моделировании неоднородных анизотропных сред, приходится иметь дело с уравнениями, содержащими смешанные производные, и коэффициентами, зависящими от пространственных переменных [2]. В таких случаях матрица дискретной задачи теряет свойства симметрии, и к выбору подходящего итерационного метода следует подходить более тщательно.

Известно, что количество итераций для достижения заданной точности в методе сопряженных градиентов, явных методах с чебышевским набором итерационных параметров и других при уменьшении шага сетки растет пропорционально квадратному корню из числа обусловленности матрицы системы

$$k \geq \left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right|,$$

где $|\lambda_{\min}|$ и $|\lambda_{\max}|$ – абсолютные нижняя и верхняя границы спектра матрицы. Представляет интерес вопрос о том, какие другие спектральные свойства (кроме границ спектра) оказывают влияние на скорость сходимости итерационного метода: неравномерность распределения собственных чисел, относительная величина мнимой части комплексных собственных значений и т. п. Данная тема уже рассматривалась в работе [3], где было показано, что сокращение дисперсии собственных чисел приводит к уменьшению количества итераций, необходимых для достижения заданной точности.

В настоящей статье на примере исследования трех вариантов спектральных распределений блочной кососимметрической матрицы показано влияние амплитуды мнимой части комплексных собственных значений и структуры неоднородности спектра на эффективность итерационного метода би-сопряженных градиентов. На основе модельной задачи о распределении потенциала в кольцевом анизотропном проводнике продемонстрированы особенности трансформации структуры спектра при использовании переобусловливателей Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации. Проанализированы зависимости спектральных свойств переобусловленных матриц и их влияние на скорость сходимости итерационного метода би-сопряженных градиентов для двух вариантов разностных схем, рассмотренных ранее в работах [4–7].

Постановка задачи. Пусть в прямоугольной области Ω с границей $\partial\Omega$ задано двумерное эллиптическое уравнение с однородными условиями Дирихле на границе:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} + K_{xy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yx} \frac{\partial U}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = F, \quad \Omega = [-1; 1] \times [-1; 1], \quad U|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1)$$

Здесь коэффициенты K могут быть постоянными или функциями от двух переменных.

Разносная аппроксимация задачи (1) на сетке $\omega_h = \{(x_i, y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}\}$ приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$Au = f. \quad (2)$$

В силу большой размерности матрицы системы разностных уравнений прямые методы, как правило, уступают по эффективности и ресурсоемкости итерационным [8–10].

Вопросам построения и оптимизации параметров итерационных алгоритмов посвящена обширная литература [8–11]. В случае эллиптических уравнений без конвективных членов и смешанных производных, разностный оператор представлен симметрической и положительно определенной матрицей. Симметричный случай представляется наиболее изученным к настоящему времени [9, 10]. Наличие в уравнении смешанных производных и (или) конвективных членов ассоциируется с появлением кососимметричной составляющей матрицы и комплексными собственными значениями в спектре.

Спектр собственных значений матрицы во многом определяет скорость сходимости итерационных методов. Например, в методе сопряженных градиентов вектор погрешности оценивается следующим неравенством:

$$\|e^{(i)}\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k} - 1} \right)^i \|e^{(0)}\|_A, \quad (3)$$

где $e^{(i)}$ – вектор погрешности на i -й итерации, $\|e^{(i)}\|_A = (e^T, Ae)^{1/2}$, k – число обусловленности матрицы системы (2) в случае симметрической матрицы $k = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$.

Известно, что в общем случае число итераций, необходимых для достижения заданной точности, пропорционально корню квадратному из числа обусловленности матрицы системы \sqrt{k} [7, 11]. В свою очередь число обусловленности обратно пропорционально квадрату шага сетки $k \sim \frac{1}{h^2}$.

Помимо числа обусловленности на количество итераций могут влиять и другие факторы, например неравномерность распределения собственных значений матрицы (наличие кластеров, кратных собственных значений), амплитуда мнимой части комплексных собственных чисел и т. д. Для выяснения существенности перечисленных факторов уместно будет рассмотреть серию тестовых матриц с фиксированными границами однородного и неоднородного спектра, для которых с ростом размерности число обусловленности остается неизменным.

Влияние неоднородности спектра матрицы на скорость сходимости итераций. Рассмотрим три случая распределения комплексных собственных значений тестовых матриц:

- 1) линейное распределение;
- 2) логарифмическое распределение;
- 3) кластерное распределение.

В каждом из трех случаев тестовые матрицы строились на основе кососимметрических диагональных блоков вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

собственные значения которых равны $a \pm ib$. Отношение b/a характеризует относительную амплитуду мнимой части комплексных собственных значений.

Чтобы проверить, как влияет структура спектра матрицы на количество итераций в методе би-сопряженных градиентов, зафиксируем значения $|\lambda_{\min}|$ и $|\lambda_{\max}|$ таким образом, что число обусловленности $k = 100$, причем число обусловленности, равно как и границы спектра матрицы, сохраняются неизменными при изменении размерности матрицы.

На рис. 1 представлены диаграммы количества итераций для трех случаев распределения собственных значений в зависимости от размерности матрицы N . Отметим рост количества итераций в случае логарифмического и кластерного распределения спектра при увеличении размерности N и практически отсутствие зависимости скорости сходимости итераций от размерности при линейном распределении собственных значений.

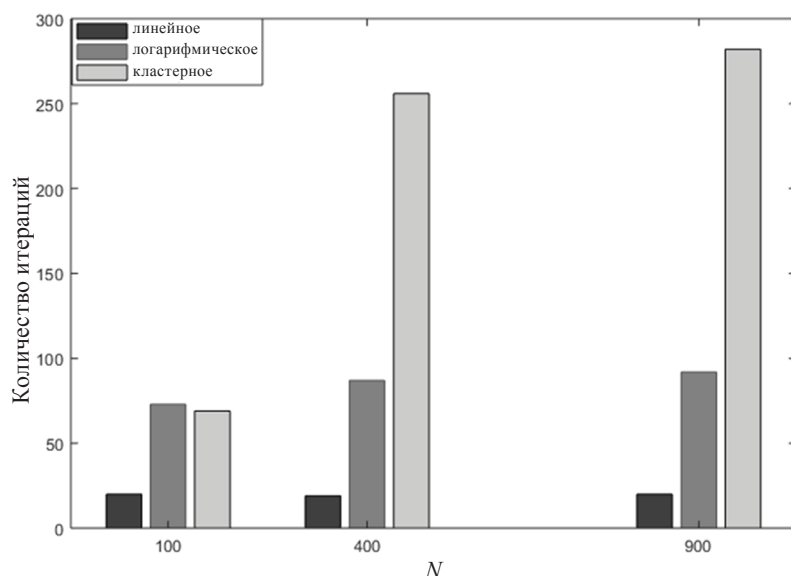


Рис. 1. Зависимость количества итераций от размерности матрицы для трех случаев распределения спектра. Параметры: $\text{Re}\{\lambda_{\min}\} = 1$, $\text{Re}\{\lambda_{\max}\} = 100$, $b/a = 1/10$
 Fig. 1. Dependence of the number of iterations on the matrix dimension for three cases of the spectral distribution. Parameters: $\text{Re}\{\lambda_{\min}\} = 1$, $\text{Re}\{\lambda_{\max}\} = 100$, $b/a = 1/10$

При увеличении относительной амплитуды спектра по мнимой оси – соотношения b/a – было отмечено увеличение количества итераций в кластерном и логарифмическом случае, в то время как для равномерного распределения скорость сходимости остается практически неизменной (рис. 2).

Таким образом, представленные результаты показывают, что неоднородность распределения собственных значений вдоль действительной оси, а также относительная амплитуда мнимой составляющей спектра кососимметричной матрицы являются существенными факторами, влияющими на скорость сходимости метода би-сопряженных градиентов.

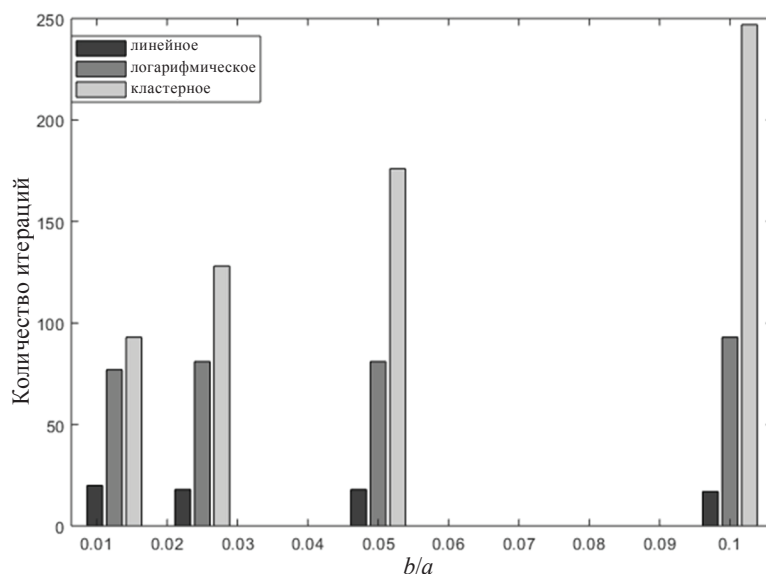


Рис. 2. Зависимость количества итераций от различной ширины мнимой части спектра для трех случаев распределения спектра. Параметры: $N = 400$, $\text{Re}\{\lambda_{\min}\} = 1$, $\text{Re}\{\lambda_{\max}\} = 100$, $b/a = \{1/10, 1/20, 1/40, 1/80\}$
 Fig. 2. Dependence of the number of iterations on the magnitude of the imaginary part of the spectrum for three cases of the spectral distribution. Parameters: $N = 400$, $\text{Re}\{\lambda_{\min}\} = 1$, $\text{Re}\{\lambda_{\max}\} = 100$, $b/a = \{1/10, 1/20, 1/40, 1/80\}$

Спектральные свойства дискретных операторов анизотропной диффузии. Вернемся к решению краевой задачи (1) для случая пространственного распределения потенциала в квадратном проводнике с кольцевой анизотропной неоднородностью. Внутренний и внешний радиусы кольцевой неоднородности полагались 0,4 и 0,6 соответственно. Проводимость кольца в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно – σ_r , σ_τ . Здесь $\sigma_\tau = \sqrt{\sigma}$, $\sigma_r = 1/\sqrt{\sigma}$, σ – параметр анизотропии.

Для аппроксимации смешанных производных использовались две схемы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \cong & \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0.5,j)} (U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j}) - \sigma_{xy}^{+(i-0.5,j)} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) \right] + \\ & + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0.5,j)} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) - \sigma_{xy}^{+(i-0.5,j)} (U_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}) \right] + \\ & + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0.5,j)} (U_{i+1,j} - U_{i+1,j-1}) - \sigma_{xy}^{-(i-0.5,j)} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) \right] + \\ & + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0.5,j)} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) - \sigma_{xy}^{-(i-0.5,j)} (U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j}) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \cong & \frac{1}{4h_x h_y} \left(\sigma_{xy}^{i+0.5,j} (U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) - \right. \\ & \left. - \sigma_{xy}^{i-0.5,j} (U_{i,j+1} - U_{i,j-1} + U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j-1}) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\sigma_{xy}^{\pm(i,j)} = \sigma_{xy}^{(i,j)} \pm \left| \sigma_{xy}^{(i,j)} \right|$.

Разностные схемы (4) и (5), ранее исследованные в работах [4–7], в дальнейшем будем называть схемами I и II соответственно. Вторые производные аппроксимировались по стандартной 5-точечной схеме второго порядка [12].

Дискретизация задачи (1) для разностных схем I и II приводит к системе линейных алгебраических уравнений с разреженной 7- и 9-диагональными матрицами соответственно:

$$Au = f. \quad (6)$$

Для решения системы (6) использовался метод би-сопряженных градиентов. Количество узлов N по каждому направлению изменялось от 32 до 96.

Было исследовано, как влияет использование переобусловливателей на спектр матрицы задачи. В качестве переобусловливателей использовался комбинированный переобусловливатель Фурье – Якоби (FJ) и переобусловливатель неполной LU-факторизации (iLU) [5–7, 12]. На рис. 3 изображен спектр собственных значений для схем I и II. Стоит отметить, что обе они имеют примерно одинаковую ширину спектра вдоль действительной оси, но при этом схема I имеет на порядок большую амплитуду мнимой составляющей собственных значений, чем схема II.

На рис. 4 приведены спектры дискретных операторов с использованием переобусловливателя Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации для двух вариантов аппроксимации смешанных производных. Можно заметить, что использование переобусловливателя Фурье – Якоби позволяет значительно сократить ширину спектра оригинальной матрицы вдоль действительной и мнимой осей как для схемы I, так и для схемы II. Переобусловливатель неполной LU-факторизации значительно меньше сжимает ширину спектра, которая для $N = 48$ остается на порядок больше как по действительной, так и по мнимой оси по сравнению со случаем переобусловливателя Фурье – Якоби.

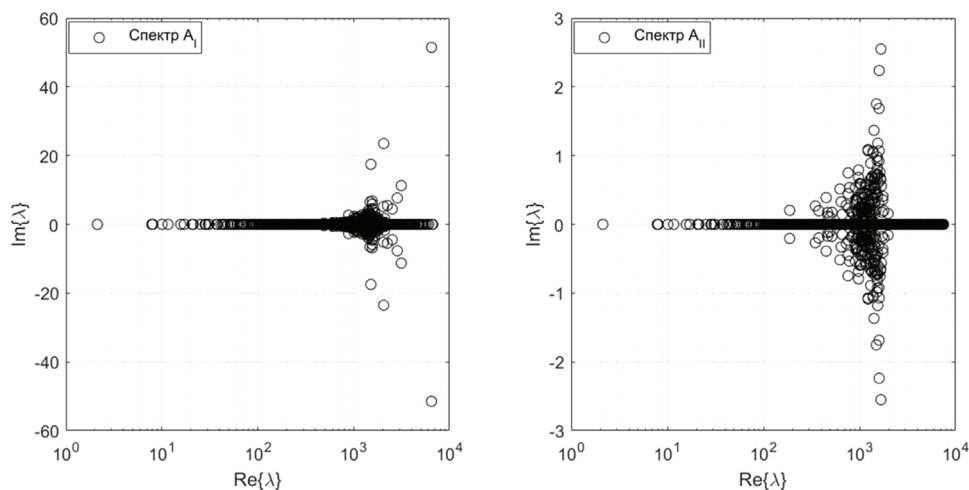


Рис. 3. Спектр матрицы A (схема I – слева, схема II – справа), $N = 48$
 Fig. 3. Spectrum of the matrix A (scheme I – left, scheme II – right), $N = 48$

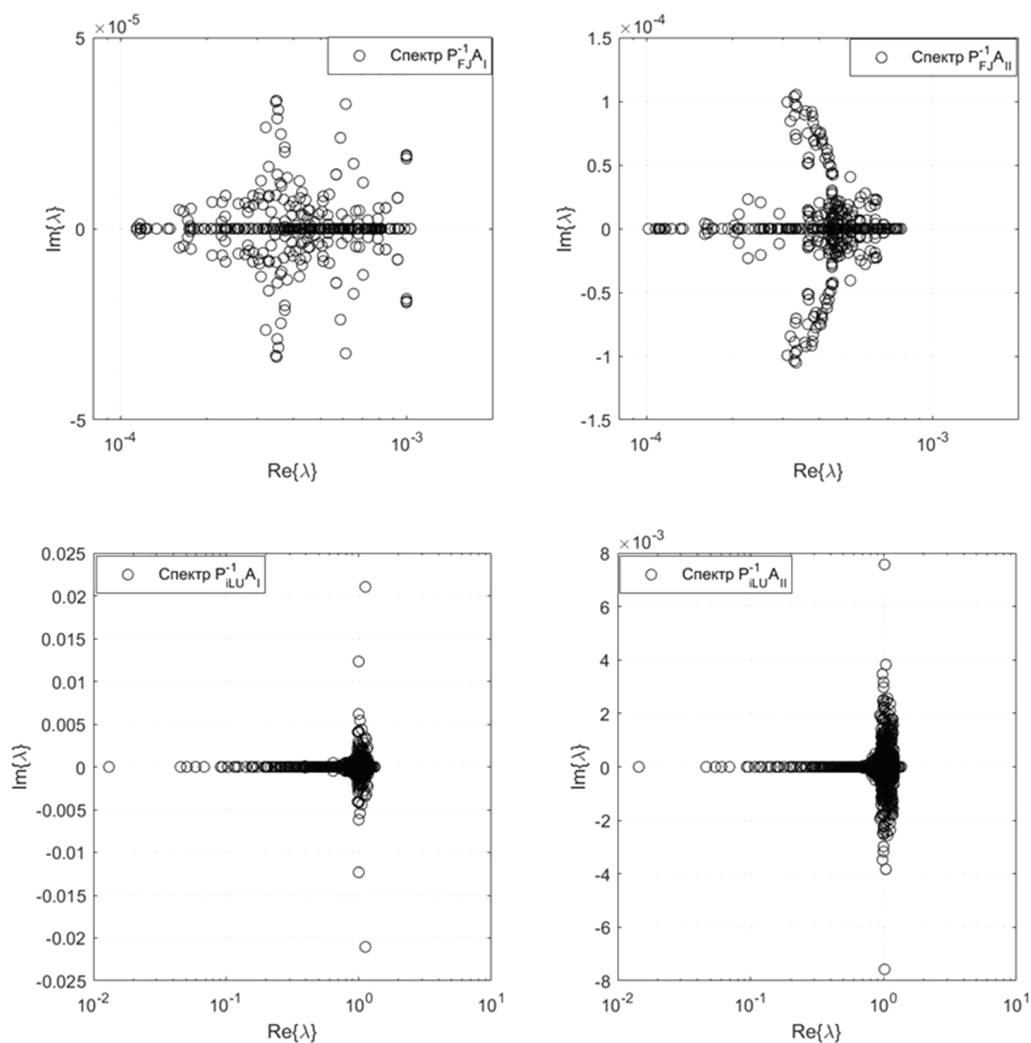


Рис. 4. Спектр переобусловленных матриц (переобусловливатель Фурье – Якоби – сверху, переобусловливатель неполной LU-факторизации – снизу) для схем I (слева) и II (справа)
 Fig. 4. Spectrum of the preconditioned matrices (above – the Fourier – Jacobi preconditioner, below – the iLU preconditioner) for schemes I (left) and II (right)

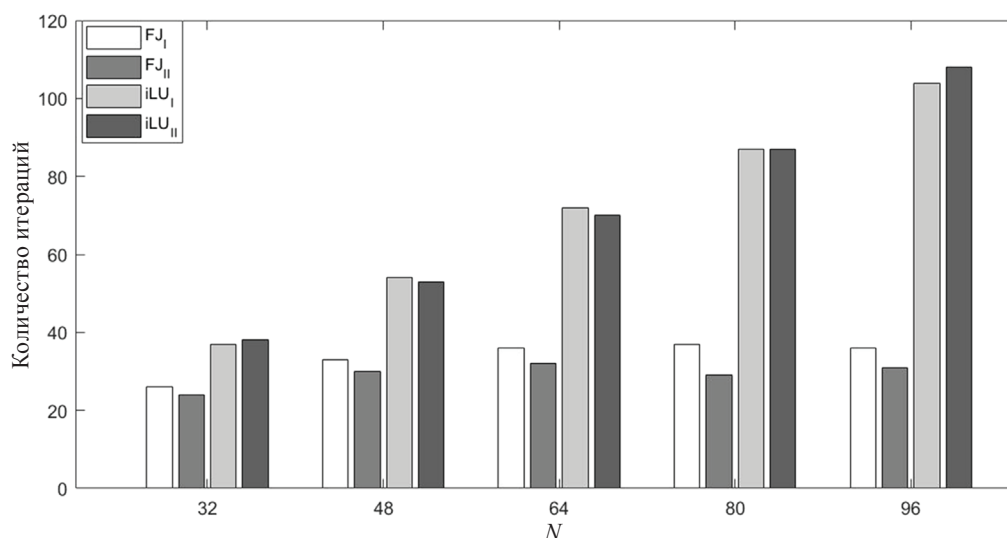


Рис. 5. Зависимость количества итераций от размерности матрицы для схем I и II с использованием переобусловливателей Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации

Fig. 5. Dependence of the number of iterations on the matrix dimensions for schemes I and II with the Fourier – Jacobi preconditioner and iLU preconditioner

На рис. 5 изображены диаграммы зависимости количества итераций с использованием двух переобусловливателей от размерности сетки для двух рассмотренных схем. Можно отметить, что при применении переобусловливателя Фурье – Якоби число итераций для обеих схем растет медленнее, чем при использовании переобусловливателя неполной LU-факторизации. С точки зрения спектральных свойств матриц, преимущества переобусловливателя Фурье – Якоби можно объяснить более равномерным распределением спектра вдоль действительной оси и лучшим подавлением амплитуды мнимой составляющей спектра, что в совокупности препятствует существенной деградации скорости сходимости с уменьшением шага сетки. Незначительные отличия в скорости сходимости рассмотренных итерационных методов для разностных схем I и II не удастся объяснить исходя из соответствующих спектральных свойств переобусловленных матриц.

Вывод. Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что скорость сходимости итерационных методов би-сопряженных градиентов при решении систем разностных уравнений для многомерных эллиптических краевых задач со смешанными производными зависит не только от границ спектра разностного оператора (оригинального или переобусловленного), но также и от степени неоднородности распределения собственных значений на комплексной плоскости. На примере тестовых матриц показано, что при фиксированных границах спектра увеличение неравномерности плотности распределения собственных значений вдоль действительной оси приводит к росту количества итераций. Это проявляется в том, что при логарифмическом и кластерном распределении собственных значений в пределах заданных границ спектра скорость сходимости метода би-сопряженных градиентов падает с ростом размерности матрицы системы уравнений. Аналогичный эффект наблюдается и с увеличением амплитуды мнимой части спектра с неоднородным распределением собственных значений при фиксированных значениях числа обусловленности и размерности матрицы.

На основе выявленных закономерностей проанализирована эффективность метода би-сопряженных градиентов при реализации разностных схем для модельной задачи распределения потенциала в квадратной области с кольцевой анизотропной неоднородностью проводимости. Установлено, что преимущества переобусловливателя Фурье – Якоби по сравнению с неполной LU-факторизацией обусловлены на порядок лучшим сжатием спектра как вдоль действительной, так и в направлении мнимой оси, а также более равномерным распределением собственных значений спектра переобусловленной матрицы.

Использование переобусловливателей Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации позволяет уменьшить границы спектра в направлениях действительной и мнимой оси в 10^3 – 10^6 раз и, как следствие, существенно сократить количество итераций, необходимых для достижения заданной точности итерационных методов. Кроме того, переобусловливатель Фурье – Якоби дает возможность снизить (а в отдельных случаях практически устранить) зависимость числа итераций от шагов сетки благодаря более равномерному распределению собственных значений переобусловленной матрицы.

Благодарности. Автор выражает благодарность В. М. Волкову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Acknowledgements. The author is grateful to V. M. Volkov for discussion of the results of the work and valuable comments.

Список использованных источников

1. Hestenes, M. R. Methods of conjugate gradients for solving linear systems / M. R. Hestenes, E. L. Stiefel // J. Res. Nat. Bur. Standards. – 1952. – Vol. 49, № 6. – P. 409–436. <https://doi.org/10.6028/jres.049.044>
2. Самарский, А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
3. Martynova, T. S. Numerical Solution of Boundary-Value Problems for Second-Order Elliptic Equations with Mixed Derivatives by Effective Iteration Methods / T. S. Martynova // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2009. – Vol. 1, № 3. – P. 370–382. <https://doi.org/10.1134/s2070048209030041>
4. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными / А. А. Самарский [и др.] // Мат. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 2. – С. 17–26.
5. 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG Forward Problem / S. Turovets [et al.] // Comput. Math. Methods in Medicine. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/426902>
6. Волков, В. М. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 454–459. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>
7. Волков, В. М. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 1. – С. 69–76.
8. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
9. Хейгеман, Л. Прикладные итерационные методы: пер. с англ. / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1986. – 448 с.
10. Saad, Y. Iterative solution of linear systems in the 20th century / Y. Saad, H. A. van der Vorst // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 123, № 1/2. – P. 1–33. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00412-x](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00412-x)
11. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods / R. Barrett [et al.]. – SIAM, 1994. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971538>
12. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

References

1. Hestenes M. R., Stiefel E. L. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1952, vol. 49, no. 6, pp.409–436. <https://doi.org/10.6028/jres.049.044>
2. Samarskii A. A., Andreev V. B. *Finite-Difference Methods for Elliptic Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 352 p. (in Russian).
3. Martynova T. S. Numerical Solution of Boundary-Value Problems for Second-Order Elliptic Equations with Mixed Derivatives by Effective Iteration Methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 370–382. <https://doi.org/10.1134/s2070048209030041>
4. Samarskii A. A., Mazhukin V. L., Matus P. P., Shishkin G. L. Monotone Difference Schemes for Equations with Mixed Derivatives. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2001, vol. 13, no. 2, pp. 17–26 (in Russian).
5. Turovets S., Volkov V., Zherdetsky A., Prakonina A., Malony A. D. 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG Forward Problem. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/426902>
6. Volkov V. M., Prakonina A. U. Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 454–459 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>

7. Volkov V. M., Prakonina A. U. Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, Informatika = Journal of Belarusian State University. Mathematics. Informatics*, 2019, no. 1, pp. 69–76 (in Russian).
8. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. *Methods of Solving Grid Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p. (in Russian).
9. Hageman L. A., Young D. M. *Applied Iterative Methods*. Elsevier Inc., 1981. 386 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-21990-8>
10. Saad Yousef, van der Vorst Henk A. Iterative solution of linear systems in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 123, no. 1–2, pp. 1–33. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00412-x](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00412-x)
11. Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., van der Vorst H. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, 1994. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971538>
12. Samarskii A. A. *The Theory of Finite Difference Schemes*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p. (in Russian).

Інфармацыя аб аўторэ

Проконіна Елена Владимировна – старшій прэподаватель кафедры веб-тэхналогій і камп’ютэрнага мадэліравання механіка-матэматычнага факультэта, Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт (пр. Незавісímості, 4, 220030, г. Мінск, Рэспубліка Беларусь). E-mail: helen.prokonina@mail.ru

Information about the author

Alena U. Prakonina – Senior Lecturer of the Department of Web-technologies and Computer Modeling of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: helen.prokonina@mail.ru