

УДК 519.688

*А. В. ЧИЧУРИН, Е. Н. ШВЫЧКИНА*

## О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ С ЗАДАНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ У СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛИ ХЕМОСТАТА

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина*

*(Поступила в редакцию 11.10.2013)*

**Введение.** Широкий круг задач, возникающих в экологии, биологии, медицине, промышленной микробиологии и т. д., решается с помощью математического моделирования динамики популяций. Все более важную роль играют методы активного искусственного воздействия на окружающую среду, позволяющие эффективным образом влиять на условия развития отдельных видов (популяций) различных биологических сообществ. В связи с этим большое значение приобретает разработка методов управления численностями популяций.

Под хемостатом будем понимать математическую модель, описывающую биологический процесс для непрерывного культивирования бактерий, который обеспечивает оптимальные температурные условия и постоянное поступление свежей питательной среды при одновременном удалении части бактериальной культуры [1]. Хемостатное культивирование позволяет изучать действие на микроорганизмы отдельно взятого фактора внешней среды при оптимальности всех остальных условий.

Наиболее известная модель взаимодействия двух популяций – это модель «хищник–жертва», для которой реализованы долговременные отношения между видами хищника и жертвы. Математически эта модель в наиболее простой форме описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x - b_1xy, \\ \frac{dy}{dt} = -a_2y + b_2xy \end{cases}$$

( $a_1, a_2, b_1, b_2$  – постоянные) и называется моделью Лотка – Вольтерра. Однако построенная модель имеет существенный недостаток: она включает параметры моделирования конкурентного влияния одной популяции на другую, которые можно оценить лишь путем совместного выращивания организмов. Это свойство сильно ограничивает прогностическую ценность модели. С помощью хемостатного культивирования соответствующие параметры выращиваемых микроорганизмов могут быть измерены по отдельности, для каждой «партии» культуры, и прогнозы об итогах конкуренции могут быть сделаны без требования проведения предварительного эксперимента [1].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим модель хемостата, содержащую две конкурирующие популяции, которые для своего роста нуждаются в питательном растворе – субстрате, концентрация которого обозначается буквой  $S$ . При непрерывном перемешивании можно считать весь объем культиватора, в котором происходит процесс взаимодействия микроорганизмов, однородно заполненным, т. е. концентрации субстрата и клеток микроорганизмов в каждой точке культиватора одинаковы. Тогда изменение этих концентраций во времени можно описать с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений, описывающую динамическую модель так называемого хемостата Михаэлиса – Ментена [1–3]:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = 1 - S(t) - \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)}, \\ \dot{x}_1(t) = \left( \frac{m_1 S(t)}{a_1 + S(t)} - 1 \right) x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = \left( \frac{m_2 S(t)}{a_2 + S(t)} - 1 \right) x_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь искомая функция  $S(t)$  обозначает плотность питательного вещества, функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – плотности микроорганизмов в момент времени  $t$ , параметры  $m_i \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ) [моль/л/с] определяют максимальную скорость роста  $i$ -й популяции, а числа  $a_i \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ) [моль/л] – константы Михаэлиса – Ментена обозначают плотность субстрата, при которой удельная скорость роста –  $\frac{m_i S}{a_i + S}$  для  $i$ -й популяции равна половине максимального значения  $m_i$  (т. е. показатель того, насколько организм процветает при низкой концентрации).

В работе ищутся решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad x_1(0) = x_1^0 \geq 0, \quad x_2(0) = x_2^0 \geq 0 \quad (2)$$

для достаточно больших промежутков времени (в том числе возможен бесконечно большой временной интервал). Начальные концентрации искоемых функций, определяемые из условий (2), неотрицательны в силу биологического характера задачи. Поэтому решения задачи Коши (1), (2) должны являться неотрицательными функциями времени, т. е.  $S(t) \geq 0$ ,  $x_1(t) \geq 0$ ,  $x_2(t) \geq 0$ ,  $t \in [0, +\infty)$ .

Основные математические результаты для хемостата Михаэлиса – Ментена приведем в виде сформулированной ниже теоремы, доказательство которой приводится, например, в монографии [1]. Предварительно определим соотношения

$$\lambda_i = \frac{a_i}{m_i - 1} \quad (i = 1, 2),$$

называемыми *безубыточными концентрациями*.

**Т е о р е м а 1.** Пусть в системе (1) выполняются соотношения

$$m_i > 1 \quad (i = 1, 2), \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1.$$

Тогда всякое решение системы (1) с начальными концентрациями  $x_1(0) > 0$ ,  $x_2(0) > 0$  удовлетворяет предельным соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lambda_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 1 - \lambda_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0.$$

Таким образом, в процессе хемостата с течением времени либо обе популяции вымирают, либо выживает только одна из них, имеющая наименьшее значение параметра  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ). При выполнении равенства  $\lambda_1 = \lambda_2$  теоретически возможно сосуществование обеих популяций, однако этот случай с биологической точки зрения считается нереализуемым [2] и обычно не рассматривается.

Теорема 1 является примером принципа конкурентного исключения, когда только один конкурент может выжить на одном ресурсе.

В настоящей работе для моделирования непрерывного хемостатного культивирования двух микроорганизмов мы применяем аналитический метод исследования дифференциальных систем третьего порядка с заданными предельными свойствами, который приведен в работах [4, 5].

**2. Применение метода к системе Михаэлиса – Ментена.** Сформулированная задача Коши (1)–(2) решается с помощью аналитического метода, основанного на редукции исходной системы к системе Брио и Буке второго порядка [4, 5], и программных модулей, позволяющих автоматизировать процесс проведения преобразований, решения возникающих систем уравнений и визуализацию решений [6].

Для решения сформулированной задачи (1)–(2) будем искать такие функции  $S(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , которые либо являются точными аналитическими решениями системы дифференциальных уравнений (1), либо удовлетворяют системе (1) в предельном отношении при  $t \rightarrow t_0$  (т. е. при подстановке этих функций в уравнения системы (1) получаем соотношения, обращающиеся в нуль при нахождении пределов, когда  $t \rightarrow t_0$ ). В обоих случаях для таких решений задачи удастся проследить направленность развития процесса хеMOSTАТНОГО культивирования.

В системе (1) сделаем замену вида

$$S = \frac{1}{u^{\mu_1}}, x_1 = \frac{V_2}{u^{\mu_2}}, x_2 = \frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \quad (3)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  – целые числа, которые находятся из условий, описанных в работах [4, 5]. Для системы (1) с помощью модуля, приведенного в работе [5], находим вектор параметров, соответствующий замене (3)

$$\mu_1 = -1, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1. \quad (4)$$

После замены (3), (4), система (1) примет вид

$$\frac{dt}{du} = -\frac{(a_1 + u)(a_2 + u)}{(a_2 + u)((u - 1)(a_1 + u) + m_1 V_2) + m_2 V_3 (a_1 + u)}, \quad (5)$$

$$u \frac{dV_2}{du} = V_2 \left( 1 - \frac{u(a_2 + u)((m_1 - 1)u - a_1)}{(a_2 + u)((u - 1)(a_1 + u) + m_1 V_2) + m_2 V_3 (a_1 + u)} \right), \quad (6)$$

$$u \frac{dV_3}{du} = V_3 \left( 1 - \frac{u(a_1 + u)((m_2 - 1)u - a_2)}{(a_2 + u)((u - 1)(a_1 + u) + m_1 V_2) + m_2 V_3 (a_1 + u)} \right).$$

Уравнение (5) определяет переменную  $t$  как функцию  $u$ . Правые части уравнений (5) и (6) представляют собой голоморфные функции переменных  $t, u, V_j$  ( $j = 2, 3$ ) в окрестности точки  $t = t_0, u = 0, V_j = \beta_j$  ( $j = 2, 3$ ), где  $t_0$  – конечное неотрицательное число. Значения  $V_2 = \beta_2, V_3 = \beta_3$  определяются как два решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} V_2(-a_1 a_2 + a_2 m_1 V_2 + a_1 m_2 V_3) = 0, \\ V_3(-a_1 a_2 + a_2 m_1 V_2 + a_1 m_2 V_3) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

и имеют вид

$$\beta_2 = \frac{a_1}{m_1} - \frac{a_1 m_2 \beta_3}{a_2 m_1} \text{ или } \beta_2 = 0, \beta_3 = 0.$$

Далее будем рассматривать только второе решение системы (7)  $\beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ , поскольку если  $\beta_2 = \frac{a_1}{m_1} - \frac{a_1 m_2 \beta_3}{a_2 m_1}$ , то знаменатели правых частей системы (6) обращаются в нуль, и эта система становится неопределенной.

Разложим правые части уравнений (6) в ряды Тейлора по степеням  $u, V_2, V_3$  в окрестности точки (0,0,0). В результате получим систему Брио и Буке вида

$$\begin{aligned} u \frac{dV_2}{du} = & V_2 - u(V_2 + \frac{m_2 V_2 V_3}{a_2} + \frac{m_2^2 V_2 V_3^2}{a_2^2} + \frac{2m_1 m_2 V_2^2 V_3}{a_1 a_2} + \frac{3m_1 m_2^2 V_2^2 V_3^2}{a_1 a_2^2} + \frac{m_1 V_2^2}{a_1}) + u^2(-V_2 + \\ & + \frac{m_1 V_2}{a_1} + \frac{m_2 V_2 V_3}{a_2^2} - \frac{2m_2 V_2 V_3}{a_2} + \frac{m_1 m_2 V_2 V_3}{a_1 a_2} + \frac{2m_2^2 V_2 V_3^2}{a_2^3} - \frac{3m_2^2 V_2 V_3^2}{a_2^2} + \frac{m_1 m_2^2 V_2 V_3^2}{a_1 a_2^2} + \frac{2m_1 m_2 V_2^2 V_3}{a_1 a_2^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2m_1m_2V_2^2V_3}{a_1^2a_2} - \frac{6m_1m_2V_2^2V_3}{a_1a_2} + \frac{2m_1^2m_2V_2^2V_3}{a_1^2a_2} + \frac{m_1V_2^2}{a_1^2} - \frac{2m_1V_2^2}{a_1} + \frac{6m_1m_2^2V_2^2V_3^2}{a_1a_2^3} + \frac{3m_1m_2^2V_2^2V_3^2}{a_1^2a_2^2} - \\
& - \frac{12m_1m_2^2V_2^2V_3^2}{a_1a_2^2} + \frac{3m_1^2m_2^2V_2^2V_3^2}{a_1^2a_2^2} + \frac{m_1^2V_2^2}{a_1^2} + \psi_2(u, V_2, V_3), \quad (8) \\
u \frac{dV_3}{du} = & V_3 - u(V_3 + \frac{m_1V_2V_3}{a_1} + \frac{m_1^2V_3V_2^2}{a_1^2} + \frac{2m_1m_2V_2V_3^2}{a_1a_2} + \frac{3m_1^2m_2V_2^2V_3^2}{a_1^2a_2} + \frac{m_2V_3^2}{a_2}) + u^2(-V_3 + \\
& + \frac{m_2V_3}{a_2} + \frac{m_1V_2V_3}{a_1^2} - \frac{2m_1V_2V_3}{a_1} + \frac{m_1m_2V_2V_3}{a_1a_2} + \frac{2m_1^2V_3V_2^2}{a_1^3} - \frac{3m_1^2V_3V_2^2}{a_1^2} + \frac{m_1^2m_2V_3V_2^2}{a_1^2a_2} + \frac{2m_1m_2V_3^2V_2}{a_1a_2^2} \\
& + \frac{2m_1m_2V_2V_3^2}{a_1^2a_2} - \frac{6m_1m_2V_2V_3^2}{a_1a_2} + \frac{2m_1m_2^2V_2V_3^2}{a_1a_2^2} + \frac{m_2V_3^2}{a_2^2} - \frac{2m_2V_3^2}{a_2} + \frac{6m_1^2m_2V_2^2V_3^2}{a_1^3a_2} + \frac{3m_1^2m_2V_2^2V_3^2}{a_1^2a_2^2} - \\
& - \frac{12m_1^2m_2V_2^2V_3^2}{a_1^2a_2} + \frac{3m_1^2m_2^2V_2^2V_3^2}{a_1^2a_2^2} + \frac{m_2^2V_3^2}{a_2^2} + \psi_3(u, V_2, V_3).
\end{aligned}$$

В системе (8) выражения  $\psi_2(u, V_2, V_3)$ ,  $\psi_3(u, V_2, V_3)$  представляют собой голоморфные функции переменных  $u, V_2, V_3$  в окрестности точки  $u = V_2 = V_3 = 0$ , которые содержат нелинейность относительно каждой из переменных  $u, V_2, V_3$  не ниже третьего порядка.

Найдем характеристические корни линейной части системы (8):  $r_2 = r_3 = 1$ .

Используем результаты работы [7] о существовании и представлении решений  $(V_2(u), V_3(u))$  системы Брио и Буке в виде сходящихся рядов, обладающих свойством  $V_j(u) \rightarrow 0$  ( $j=2,3$ ) при  $u \rightarrow 0$ . Составим формальное решение для системы (8) в виде

$$V_j = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(j)} u^k \quad (j = (2,3)), \quad (9)$$

где  $C_k^{(j)}$  – вообще говоря, комплексные числа, подлежащие определению. Подставим теперь разложение (9) в систему (8), и предположив, что имеют место соотношения

$$\psi_2(u, V_2, V_3) = \psi_3(u, V_2, V_3) = 0,$$

составим систему уравнений, для определения неизвестных коэффициентов  $C_k^{(2)}, C_k^{(3)}$ . При значении характеристических корней  $r_2 = r_3 = 1$ , согласно результатам работы [7], выполняется следующее коэффициентное условие: полиномы от коэффициентов  $C_k^{(2)}, C_k^{(3)}$ , находящихся при членах разложения  $u^{r_2}$  и  $u^{r_3}$ , тождественно обращаются в нуль. Из этих коэффициентных условий находим голоморфное решение (9) системы (8), зависящее от двух произвольных постоянных  $C_1^{(2)} = \alpha_2, C_1^{(3)} = \alpha_3$ :

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{2} u \alpha_2 \left( 2 - 2u - \frac{u^2 m_1 (\alpha_2 - 1)}{a_1} - \frac{u^2 m_2 \alpha_3}{a_2} \right) + \chi_2(u), \\
V_3 &= \frac{1}{2} u \alpha_3 \left( 2 - 2u - \frac{u^2 m_1 \alpha_2}{a_1} - \frac{u^2 m_2 (\alpha_3 - 1)}{a_2} \right) + \chi_3(u), \quad (10)
\end{aligned}$$

сходящееся в области  $0 < |u| < \rho$ ,  $\rho > 0$ . Здесь  $\chi_2(u), \chi_3(u)$  означают суммы членов ряда (9), содержащие степени переменной  $u$  выше третьего порядка.

Таким образом, доказана следующая

**Т е о р е м а 2.** Система Брио и Буке (8) имеет решения вида (10).

Используем теорему 2 для нахождения решений системы (1). Для этого подставим найденное решение (10) в уравнение (5) и разложим правую часть полученного уравнения в ряд Тейлора по степеням  $u$  в окрестности точки  $u = 0$ . Ограничимся линейной частью разложения в ряд, т. е. выражением вида

$$\frac{dt}{du} = 1 + \frac{u(a_1 a_2 + a_2 m_1 \alpha_2 + a_1 m_2 \alpha_3)}{a_1 a_2},$$

проинтегрировав последнее равенство

$$\int_{t_0}^t dt = \int_0^u \left( 1 + \frac{u(a_1 a_2 + a_2 m_1 \alpha_2 + a_1 m_2 \alpha_3)}{a_1 a_2} \right) du, \quad (11)$$

найдем функцию  $u(t)$ . Среди найденных решений (11) выберем то, которое удовлетворяет условию

$$u(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_0. \quad (12)$$

Явный вид функции  $u(t)$  найдем, обращая соотношение (11), для которого выполняется условие (12)

$$u(\tau) = \frac{\sqrt{8a_1 a_2 \tau (a_2 m_1 \alpha_2 + a_1 m_2 \alpha_3 + a_1 a_2) + 4a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2}}{2(a_2 m_1 \alpha_2 + a_1 m_2 \alpha_3 + a_1 a_2)}, \quad (13)$$

где  $\tau = t - t_0$ .

Используя замену, обратную замене (3), и положив  $\chi_2(u) = \chi_3(u) = 0$ , находим вид функций, входящих в систему (1):

$$\begin{aligned} S(\tau) &= u(\tau), \\ x_1(\tau) &= \frac{1}{2} \alpha_2 \left( 2 - 2u(\tau) - \frac{u(\tau)^2 m_1 (\alpha_2 - 1)}{a_1} - \frac{u(\tau)^2 m_2 \alpha_3}{a_2} \right), \\ x_2(\tau) &= \frac{1}{2} \alpha_3 \left( 2 - 2u(\tau) - \frac{u(\tau)^2 m_1 \alpha_2}{a_1} - \frac{u(\tau)^2 m_2 (\alpha_3 - 1)}{a_2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\tau = t - t_0$ .

Исследуем поведение полученного решения (14) для системы (1) с конкретными коэффициентами.

**П р и м е р.** Пусть коэффициенты системы (1) имеют вид

$$m_1 = 8; \quad a_1 = 0,3; \quad m_2 = 4,5; \quad a_2 = 0,4. \quad (15)$$

Тогда безубыточные концентрации будут равны  $\lambda_1 = 0,04286$ ;  $\lambda_2 = 0,11429$ . Функции (14) для коэффициентов (15) примут вид

$$\begin{aligned} S(\tau) &= \frac{0,5\sqrt{\tau(3,072\alpha_2 + 1,296\alpha_3 + 0,1152) + 0,0576} - 0,12}{3,2\alpha_2 + 1,35\alpha_3 + 0,12}, \\ x_1(\tau) &= \frac{\alpha_2}{(3,2\alpha_2 + 1,35\alpha_3 + 0,12)^2} (10,24\alpha_2^2(1-\tau) + \alpha_2(8,64\alpha_3(1-\tau) + 9,856\tau + 0,768) + \\ &+ \alpha_3(1,8225\alpha_3(1-\tau) + 4,158\tau + 0,324) - 1,66\sqrt{\tau(3,072\alpha_2 + 1,296\alpha_3 + 0,1152) + 0,0576} + \\ &+ 0,384\tau + 0,4128), \\ x_2(\tau) &= \frac{\alpha_3}{(3,2\alpha_2 + 1,35\alpha_3 + 0,12)^2} (10,24\alpha_2^2(1-\tau) + \alpha_2(8,64\alpha_3(1-\tau) + 3,936\tau + 0,768) + \\ &+ \alpha_3(1,8225\alpha_3(1-\tau) + 1,6605\tau + 0,324) - 0,735\sqrt{\tau(3,072\alpha_2 + 1,296\alpha_3 + 0,1152) + 0,0576} + \\ &+ 0,162\tau + 0,1908). \end{aligned} \quad (16)$$

Покажем, что найденные функции (16) удовлетворяют системе (1), (15). Подставим функции (16) в уравнения системы (1), (15). Для получившихся выражений найдем пределы при  $\tau \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow t_0$ ). Легко проверить, что эти пределы обращаются в нуль. Что и требовалось.

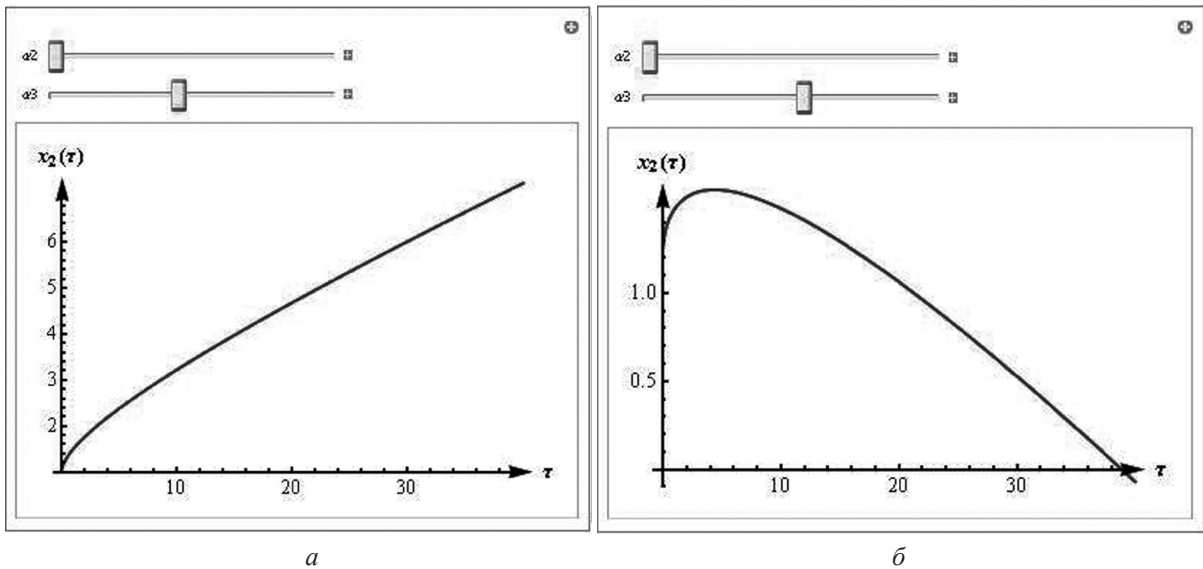


Рис. 1. При параметрах  $\alpha_2 = 0,0001$ ,  $\alpha_3 = 0,9$  второй микроорганизм выживает (а), а при параметрах  $\alpha_2 = 0,0001$ ,  $\alpha_3 = 1,1$  второй микроорганизм вымирает (б)

Используя найденный вид функций (16), смоделируем, например, поведение второго микроорганизма (функция  $x_2(\tau)$ ) в зависимости от значений параметров  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ .

Изменяя значения параметров можно получить решение, обеспечивающее выживание, например, второго микроорганизма, как это показано на рис. 1 при  $\alpha_2 = 0,0001$ ,  $\alpha_3 = 0,9$ ; или вымирание через конечный промежуток времени при  $\alpha_2 = 0,0001$ ,  $\alpha_3 = 1,1$ .

Также, изменяя параметры  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , удастся выделить множество значений  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ , для которых можно смоделировать выживание или вымирание одного или двух микроорганизмов. На рис. 2 показаны изменения концентраций (функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ) для промежутка  $t \in [0, 50]$ , что визуализирует принцип конкурентного исключения.

При начальных условиях (2), где  $x_1^0 = 0,2$ , а  $x_2^0 = 0,69$ , первый микроорганизм  $x_1(t)$  со временем увеличивает свою численность, а второй  $x_2(t)$  – через конечный промежуток времени вымирает.

Изменяя параметры  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  подобным образом, можно выделить области начальных значений, при которых оба микроорганизма вымирают. Например, подобная ситуация возникает при начальных значениях  $x_1^0 = 0,8$ ;  $x_2^0 = 0,62$ .

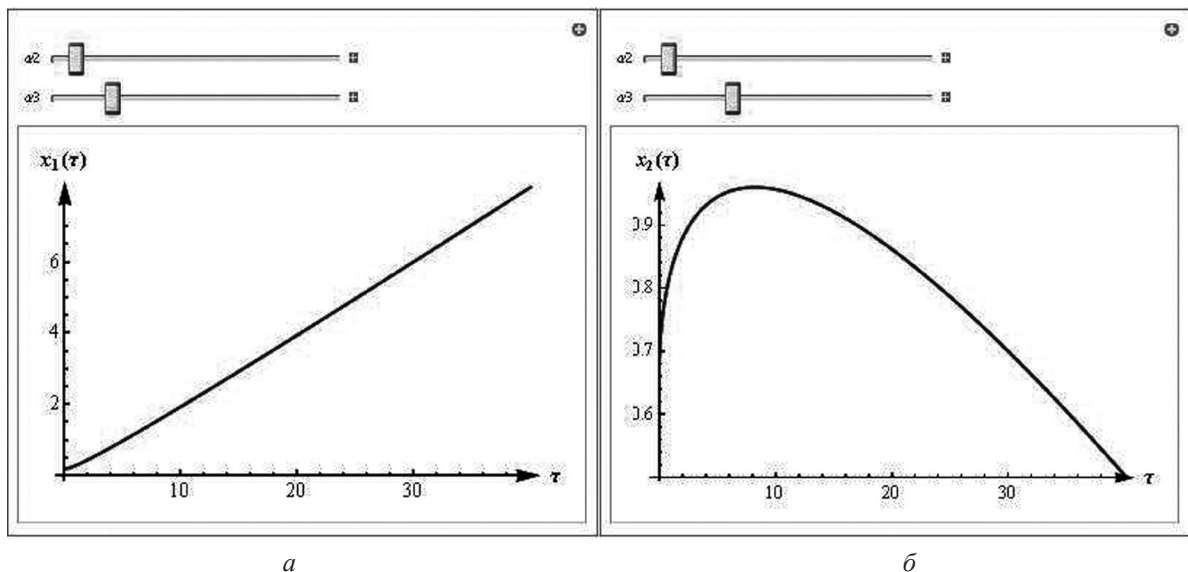


Рис. 2. При параметрах  $\alpha_2 = 0,2$ ,  $\alpha_3 = 0,6$  первый микроорганизм (функция  $x_1(t)$ ) выживает (а), а второй микроорганизм (функция  $x_2(t)$ ) вымирает (б)



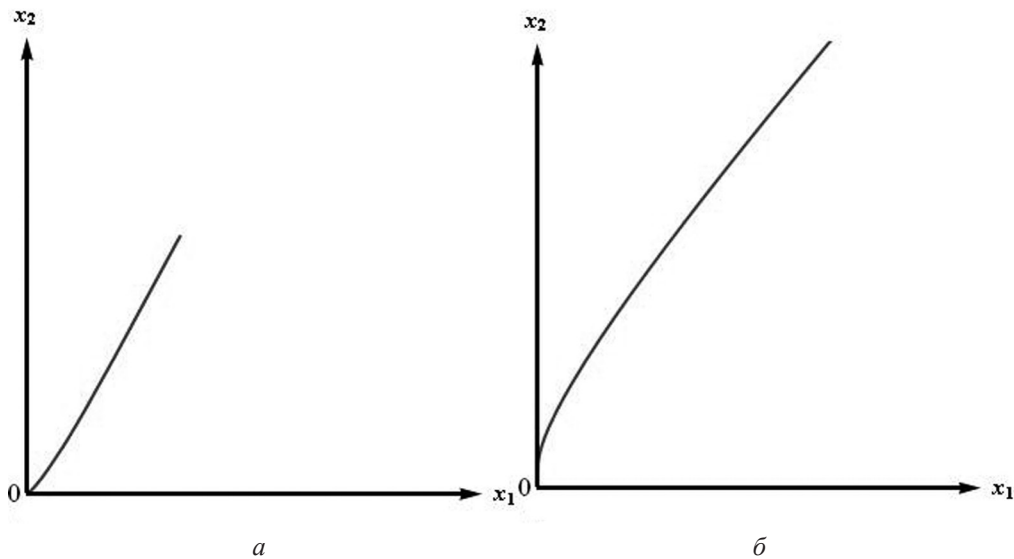


Рис. 3. Фазовая траектория на первом графике (а) получена из решения  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  системы (1) с помощью численных методов; на втором графике (б) – из решения  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  системы (1) с помощью аналитического метода

**З а м е ч а н и е 1.** Решения, построенные при заданных безубыточных концентрациях  $\lambda_1 = 0,04286$ ;  $\lambda_2 = 0,11429$ , т. е. когда  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ , демонстрируют принцип конкурентного исключения – выживает только один микроорганизм, имеющий наименьшее значение параметра  $\lambda_1$ . При этом нет таких значений  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , при которых происходит обратная ситуация, а именно, выживает первый микроорганизм и погибает второй. Таким образом, при различных значениях параметров  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  возможны следующие состояния взаимодействия популяций двух микроорганизмов, потребляющих одно питательное вещество:

- 1) краткое сосуществование;
- 2) выживает только один микроорганизм, имеющий наименьшее значение параметра  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ );
- 3) через небольшой интервал времени погибают оба микроорганизма.

Приведем визуализацию фазовых траекторий на плоскости  $x_1 O x_2$ , построенных для решений, которые найдены с помощью численных методов (рис. 3) и рассмотренного метода для другого набора параметров  $m_1 = 4$ ,  $a_1 = 0,3$ ,  $m_2 = 5$ ,  $a_2 = 0,4$ .

**З а м е ч а н и е 2.** При равных безубыточных концентрациях  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,1$  продемонстрировано кратковременное сосуществование обоих микроорганизмов.

**Заключение.** Для простой пищевой цепочки, описываемой динамической моделью хемоста-та Михаэлиса – Ментена, построено двухпараметрическое аналитическое решение. Используя найденное аналитическое решение и возможности СКА *Mathematica*, удается построить решение системы (1) в явном виде при различных значениях параметров  $m_1$ ,  $a_1$ ,  $m_2$ ,  $a_2$ . Изменяя начальные условия (2) с помощью встроенной функции *Manipulate* [8], удается выделить значения начальных условий  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ , для которых можно моделировать выживание или вымирание одного или обоих микроорганизмов. Визуализация и анимация найденных решений системы (1) аналитическим и численным методами осуществляется с помощью той же системы компьютерной математики [6].

## Литература

1. *Smith H. L., Waltman P.* The theory of chemostat: dynamics of microbial competition. Cambridge University Press, 1995.
2. *Hsu S. B., Hubbell S., Waltman P.* // *SIAM J. Appl. Math.* 1977. Vol. 32. P. 366–383.
3. *Заславский Б. Г., Полуэктов П. А.* Управление экологическими системами. М., 1988.
4. *Shvychkina A. N.* Building the third order differential system with *Mathematica* // *Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics.* Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2011. P. 136–140.
5. *Chichurin, A., Shvychkina A.* Finding the solutions with the infinite limit properties for the third order normal system of differential equations using the *Mathematica* system // 7<sup>th</sup> International Symposium on Classical and Celestial Mechanics

(CCMECH'2011) (Siedlece, 24–28 Oct. 2011): Book of the Abstracts. Wydawnictwo Collegium Mazovia, Siedlece, 2011. P. 23–24.

6. Wolfram Web Resources [Electronic resource]. Champaign, 2012. Mode of access: [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com). Date of access: 01.11.2012.

7. *Horn J.* // *J. für M.* 1896. Vol. 116. P. 265–306; 1897. Vol. 117. P. 104–128.

8. Wolfram Web Resources [Electronic resource]. Champaign, 2012. Mode of access: <http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Manipulate.html>. Date of access: 01.11.2012.

*A. V. CHICHURIN, A. N. SHVYCHKINA*

## **CONSTRUCTION OF SOLUTIONS WITH THE GIVEN LIMIT PROPERTIES FOR THE SYSTEMS DESCRIBING THE CHEMOSTAT MODELS**

### **Summary**

A system of three differential equations describing the process of continuous bacteria cultivation in a chemostat is considered. For a simple food chain described by the dynamic Michaelis–Menten chemostat model a two-parameter analytical solution is obtained. An algorithm and software allowing one to find an explicit form of solutions with the given limit properties have been constructed with the usage of the CAS *Mathematica* capabilities. Examples, in which it is possible to model the survival or extinction of one or two microorganisms and to find initial concentration ranges, provide “competitive exclusion” or coexistence of the both organisms, are given.