

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 541.1+539.2

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-242-254>

Поступила в редакцию 11.12.2017

Received 11.12.2017

**А. Л. Гурский, Л. И. Гурский<sup>1</sup>***Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь***К 150-ЛЕТИЮ СОЗДАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Аннотация.** Приводится история открытия Д. И. Менделеевым Периодического закона химических элементов и его современная формулировка. Дан краткий обзор основных результатов, способствовавших установлению симметричных свойств Периодической системы элементов на основе использования групп симметрии. Показано, что группа  $SO(4,2)$  позволяет представить содержание Периодической системы элементов в соответствии с экспериментально установленным строением электронных оболочек их атомов, без привлечения каких-либо дополнительных квантовых чисел, характеризующих свойства атомов. Предложено обоснование использованию представлений группы динамической симметрии, изовалентной водороду квантовой системы, для математического описания свойств симметрии Периодической системы элементов. С его помощью осуществлено расщепление бесконечномерного унитарного представления группы  $SO(4,2)$  на конечномерные мультиплеты, определяющиеся квантовыми числами, которые описывают состояния электронов. Обсуждена проблема включения изотопов элементов в общую структуру Периодической системы элементов.

**Ключевые слова:** Периодическая система элементов, группы симметрии, группы Ли, группа  $SO(4,2)$ , волновые функции, правило Маделунга – Клечковского, уравнение Шредингера, уравнение Хартри – Фока, свойства симметрии

**Для цитирования.** Гурский, А. Л. К 150-летию создания Периодической системы элементов / А. Л. Гурский, Л. И. Гурский // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 242–254. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-242-254>

**A. L. Gurskii, L. I. Hursky***Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus***TO THE 150<sup>th</sup> ANNIVERSARY OF THE CREATION OF THE PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS**

**Abstract.** The results of the discovery of the Periodic law by D. I. Mendeleev are considered, and the actual formulation of this law is given. Some examples of the use of symmetry groups in modern science are given. It is shown that the  $SO(4,2)$  group allows presenting the contents of the Periodic system of elements in full coincidence with the experimentally established structure of electronic shells of corresponding atoms without involving any additional quantum numbers characterizing the properties of atoms. A dynamic substantiation of the use of representations of the dynamic symmetry group of the quantum system, isovalent to hydrogen, for a mathematical description of the properties of the symmetry of the Periodic system of elements is proposed. Using it, the splitting of the infinite-dimensional unitary representations of the group  $SO(4,2)$  into the finite-dimensional multiplets, determined by the quantum numbers describing the states of electrons, was implemented. A problem of inclusion of isotopes of elements in the Periodic system of elements is discussed.

**Keywords:** Periodic system of elements, symmetry groups, Lie groups,  $SO(4,2)$  group, wave functions, Madelung – Klechkowskij rule, Schrödinger equation, Hartree – Fok equation, symmetry properties

**For citation.** Gurskii A. L., Hursky L. I. To the 150<sup>th</sup> anniversary of the creation of the Periodic system of elements. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 242–254 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-242-254>

**Введение.** Во второй половине XIX в. учеными велось исследование по поиску закономерностей классификации химических элементов. В 1829 г. И. В. Дёберейнер предложил закон триад, согласно которому атомная масса ряда элементов по химическим свойствам близка к среднему арифметическому этих элементов. В 1862 г. А. Э. Шанкуртуа, расположив элементы по винтовой линии, отметил циклическое повторение по вертикали их свойств. В 1865 г. Д. А. Ньюлэндс классифицировал элементы с помощью музыкального «закона октав» (кратность 7). В 1864 г. была опубликована работа Ю. Л. Мейера, в которой периодическое повторение свойств элементов связывалось с валентностью, но, как известно, валентность элементов величина не постоянная.

2 марта (18 февраля по ст. ст.) 1869 г. на заседании Русского химического общества был рассмотрен доклад Д. И. Менделеева «Соотношение свойств с атомным весом элементов» [1]. В этом же году Дмитрием Ивановичем была предложена таблица классификации элементов, содержащая известные и неизвестные в то время элементы. Первым подтверждением предложенной классификации стало открытие в 1875 г. П. Лекоком де Буободраном галлия, свойства которого и место в Периодической системе элементов под названием «экаалюминий» предсказал Д. И. Менделеев. Периодический закон Д. И. Менделеев сформулировал следующим образом: «...если все элементы расположить в порядке по величине их атомного веса, то получится периодическое повторение свойств. Это выражается законом периодичности: свойства простых тел, также формы и свойства соединений элементов, находятся в периодической зависимости (или, выражаясь алгебраически, образуют периодическую функцию) от величины атомных весов элементов» [2]. В 1870 г. была опубликована работа немецкого ученого Ю. Л. Мейера, содержащая результаты, близкие к результатам Д. И. Менделеева. В 1913 г. английский ученый Г. Мозли установил взаимозависимость частот спектральных линий рентгеновского излучения  $\nu$  и атомных номеров  $Z$  излучающих элементов:  $\sqrt{\nu/R} = (Z - S_n)/n$ , где  $\nu$  – частота,  $R$  – постоянная Ридберга,  $S_n$  – константа экранирования электронов атома,  $n$  – главное квантовое число.

Термин «периодическая зависимость» (или по Д. И. Менделееву – «...выражаясь алгебраически, образуют периодическую функцию...») с математической точки зрения требует пояснений. В математике к периодическим функциям относятся функции  $f(x)$ , значения которых не изменяются при добавлении к аргументу определенного, но не равного нулю, числа – периода функции  $T$ . При любом действительном значении  $x \in X$  числа  $x \pm T$  также принадлежат множеству  $X$  и выполняется равенство  $f(x \pm T) = f(x)$ . Числа  $\pm nT$ , где  $n$  – натуральное число, также являются периодом функции  $f(x)$ . Периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi}{T} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} x \right).$$

С этих позиций математические условия, определяющие расположение элементов в Периодической системе, не выполняются. Не удалось это сделать и с помощью почти периодических функций, например функции  $\cos x + \cos \sqrt{2}x$ , для которой периоды являются несоизмеримыми и которым сопоставляется ряд Фурье:  $f(x) \sim \sum e^{i\lambda_n x}$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – любая последовательность действительных чисел  $X_n$ ,  $X_n = M \{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}$ , при этом  $M$  определяется равенством Парсеваля

$$\left( \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right),$$

являющимся аналогом теоремы Пифагора в векторном пространстве со скалярным произведением [3].

Целью настоящей статьи является анализ использования группы симметрии  $SO(4,2)$  с применением динамического правила для построения Периодической системы элементов. Основное содержание статьи разбито на десять разделов: 1) анализ исследований, обусловивших современную формулировку периодической зависимости свойств химических элементов; 2) использование групп симметрии в науке; 3) элементарные частицы и группы симметрии С. Ли; 4) анализ результатов, описывающих свойства симметрии Периодической системы элементов; 5) лексикографическое упорядочение энергетических уровней электронных оболочек элементов по правилам Маделунга – Клечковского; 6) анализ численных решений уравнения Шредингера в рамках одноэлектронного приближения Хартри – Фока; 7) динамическое правило описания состава электронных оболочек многоэлектронных атомов; 8) водородоподобные атомы и группа  $SO(4,2)$ ; 9) построение Периодической системы элементов с использованием бесконечномерного унитарного представления группы динамической симметрии водородоподобного атома  $SO(4,2)$ ; 10) изотопы химических элементов.

**Группы симметрии и Периодическая система элементов. 1. Анализ исследований, обусловивших современную формулировку периодической зависимости свойств химических эле-**

**ментов.** Периодическая система элементов, установленная на основе гениальных обобщений Д. И. Менделеева, Н. Бора, А. Зоммерфельда [1, 2, 4, 5 и др.] в течение более 150 лет является объектом исследований химиков, физиков и ученых других специальностей в ее фундаментальных и прикладных аспектах. Сегодня Периодическая система элементов формулируется следующим образом: «...*периодическая зависимость свойств элементов определяется числом положительных зарядов ядра атома или же числом электронов в свободном атоме*». В математике и физике широко применяются подходы, основанные на использовании групп симметрии. Поиску групп симметрии, описывающих Периодическую систему элементов, посвящен ряд работ [6–17]. В [13] для построения Периодической системы элементов вводятся новые квантовые числа ( $\nu, \delta, \lambda, \iota_\lambda, \varkappa$ ) и на их основе строится новое лексикографическое правило описания электронных конфигураций атомов элементов, отличающееся от правила Моделунга – Клечковского [18, 19]. В [13] утверждается, что «...*в принципе невозможно описывать многоэлектронные атомы по образцу атома водорода “водородными” квантовыми числами  $n, l, m, m_s$ ... Вместо многоэлектронного атома мы имеем дело с его неадекватной боровской моделью образца 1921 года, которая без каких-либо оснований выдается за истинное устройство атома...*». Авторы статьи не разделяют приведенную точку зрения, что будет обосновано в настоящей статье.

**2. Использование групп симметрии в науке.** Известно, что в математике и теоретической физике широко применяются методы, основанные на использовании групп и алгебр Ли, основы теории которых заложены в исследованиях, выполненных в 1840–1910 гг. С. Ли, В. Киллингом, Э. Картаном и обобщенных во многих работах, например [20, 21].

В разное время и при решении различных задач в науке применялись группа вращений, группа Галилея, группа Лоренца и группа Пуанкаре. Инвариантность относительно группы вращений позволила установить закон сохранения углового момента  $J$  [22]. В. А. Фок использовал группу  $O(4)$  для определения состояний атома водорода [23]. С помощью группы Галилея сформулирован основной принцип классической механики – инвариантность законов механического движения относительно замены инерционных систем отсчетов (принцип относительности Галилея) [24]. Группа Лоренца описывает симметрию пространства-времени без учета гравитации [25]. Группа Лоренца является подгруппой группы Пуанкаре. Группа Пуанкаре позволяет с использованием неприводимого унитарного представления описывать свойства частиц, а именно, значения массы  $m$ , спина  $s$  и знака энергии при  $m^2 > 0$ . Представления об однородности и изотропии пространства-времени приводят к тому, что для любой замкнутой системы действие должно быть инвариантно относительно преобразований группы Пуанкаре. Это с учетом теоремы Нётер приводит к существованию 10 фундаментальных сохраняющихся величин: энергии, трех компонент импульса и шести компонент 4-момента [26].

Фундаментальные основы квантовой механики, заложенные в работах Луи де Бройля, В. Гейзенберга, В. Паули, Э. Маделунга, В. Клечковского, Ф. Хунда (Гунда), являются основой современных представлений о природе вещества [18, 19, 27–31]. В соответствии с ними наименьшими структурными единицами химических веществ являются их атомы. Для определения состояний атома используются дискретные значения четырех физических величин: энергии  $E$ , орбитального момента  $M_p$ , проекции  $M_{I_z}$  орбитального момента  $M_I$  на произвольное направление  $Z$ , проекции  $M_{s_z}$  спинового момента  $M_s$  на произвольное направление  $Z$  [4].

**3. Элементарные частицы и группы симметрии С. Ли.** Сильное взаимодействие элементарных частиц, рассмотренное на примере октета барионов, является первым семейством элементарных частиц, описанным Гелл-Маном и Нейманом с помощью группы симметрии  $SU(3)$  [31–33]. По данным 1961 г. экспериментально было обнаружено девять частиц. В работах [31–33] рассматривается 10 частиц, при этом для десятой – гипотетической частицы – предсказаны ее параметры. Десятая гипотетическая частица является синглетом, т. е. не имеет «изотопически родственных» частиц, и ее заряд равен  $(-1)$ . Она была экспериментально обнаружена в 1964 г., и ее свойства соответствовали предсказанным. Эта частица обозначается символом  $\Omega^-$  (омега-минус-гиперон). Успехи использования теории линейных представлений групп Ли при классификации элементарных частиц позволяют предположить перспективность их применения при поиске теоретического обоснования Периодического закона.

**4. Анализ результатов, описывающих свойства симметрии Периодической системы элементов.** Поиски групп симметрии для классификации химических элементов начались в 1970-х гг. В 1971 г. Ю. Б. Румер и А. И. Фет использовали группу  $SO(4)$  для описания Периодической системы элементов [13]. В 1972 г. конформная группа  $SO(4,2)$  была независимо предложена для описания химических элементов А. О. Барутом [6] и О. А. Новаро, М. Баррондо [7]. В этом же году Б. Г. Конопельченко [8] применил в качестве группы симметрии Периодической системы элементов также группу  $SO(4,2)$ , расширив представление Фока до представления конформной группы. Такой подход был впервые применен И. А. Малкиным и В. И. Манько к атому водорода [34], при этом группой, содержащей  $SO(4)$ , оказалась так называемая конформная группа, или  $SO(4,2)$  группа. Группа  $SO(4,2)$ , как указано в работе [13], использовалась еще в 1937 г. П. Дираком, но для других целей.

Группа  $SO(4,2)$  конформных сохраняющих углы преобразований пространства Минковского – это 15-параметрическая группа непрерывных ортогональных преобразований с детерминантом, равным единице, оставляющих инвариантными «квадраты расстояния» в шестимерном пространстве:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2$ . Группа  $SO(4,2)$  является группой динамической симметрии изовалентных водороду квантовых систем [10–17]. Это значит, что все решения уравнения Шредингера для водородоподобного атома, принадлежащие дискретному спектру, переходят друг в друга под действием представлений этой группы. Волновая функция рассчитывается по волновому уравнению Шредингера в рамках одноэлектронного приближения Хартри – Фока. Точное описание электронного строения атомных систем из «первых принципов» с использованием уравнения Шредингера даже для сравнительно простых случаев является практически неразрешимой задачей, несмотря на достижения вычислительной техники. Если же численное решение уравнения Шредингера с достаточно высокой точностью удастся найти, то это решение будет являться принципиально ограниченным в приложении к анализу реальных физических систем. Это обусловлено следующими причинами: 1) численные решения не позволяют исследовать свойства физических систем в широком диапазоне параметров; 2) численные решения не позволяют выявлять в различных внешних условиях качественные закономерности реальных физических систем; 3) численные решения уравнения Шредингера в приближении Хартри – Фока оставляют открытой проблему систематизации одноэлектронных состояний.

В настоящее время известны 126 химических элементов, из которых только 90 обнаружены в природе. Анализ классификации химических элементов выполняется на основе данных заполнения энергетических уровней электронных оболочек элементов, обобщающих результаты экспериментального изучения строения атомов, представленных в многочисленных вариантах Периодической системы элементов, например в [30].

Общепринятым при обсуждении строения атомов является использование представлений модели независимых частиц [30, 37]. В соответствии с правилом Паули [29] при классификации элементов для них указываются значения главного  $n$  и орбитального  $l$  квантовых чисел, где  $2l + 1$  – число проекций орбитального момента на заданное направление, удвоение  $2(2l + 1)$  обусловлено числом возможных ориентаций спина электрона. Энергии этих электронов при сферической симметрии самосогласованного поля будут одинаковыми, вследствие чего  $2l + 1$  клеток располагаются на одном уровне и указывается атомный номер элемента  $Z$  и равное номеру элемента количество электронов.

Расположение элемента определяется занятостью электронами последнего и всех предшествующих состояний, при этом стрелками ( $\uparrow$  и  $\downarrow$ ) указывается ориентация спина (« $\uparrow$  – вверх», « $\downarrow$  – вниз»). Электронные оболочки элементов разделяются горизонтальными линиями, а расположение на разной высоте электронных состояний элементов отражает различие в энергиях этих состояний.

Как известно, свойства элементов определяются особенностями строения электронных оболочек их атомов. Распределение электронов внешней оболочки обусловлено, прежде всего, значениями орбитального квантового числа  $l$ . Эти закономерности учитываются во всех вариантах Периодической системы элементов, например приведенной в [30]. Атомы, размещенные в одном вертикальном столбце, обладают подобными химическими свойствами. Так, атомы элементов

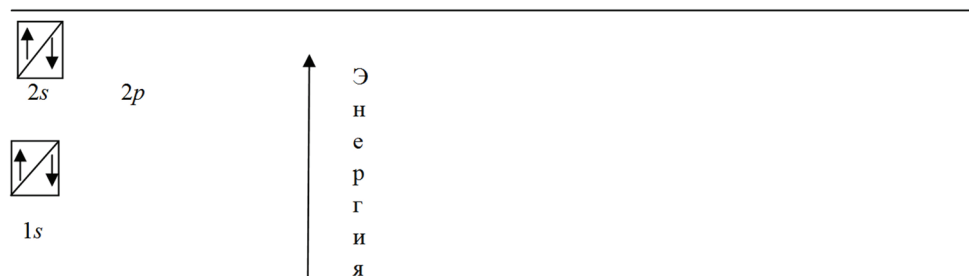
$_{10}\text{Ne}$ ,  $_{18}\text{Ar}$ ,  $_{36}\text{Kr}$ ,  $_{54}\text{Xe}$ ,  $_{86}\text{Rn}$ , размещенные в столбцах, – инертные газы; элементов  $_{3}\text{Li}$ ,  $_{11}\text{Na}$ ,  $_{19}\text{K}$ ,  $_{37}\text{Rb}$ ,  $_{55}\text{Cs}$ ,  $_{87}\text{Fr}$  – щелочные металлы; элементов  $_{29}\text{Cu}$ ,  $_{47}\text{Ag}$ ,  $_{79}\text{Au}$  – благородные металлы и т. д.

**5. Лексикографическое упорядочение энергетических уровней электронных оболочек элементов по правилам Маделунга – Клечковского.** Наборы состояний водородоподобной системы, т. е. представление группы  $SO(4,2)$ , и наборы состояний в электронных оболочках атомов, приведенные во всех вариантах Периодической системы элементов, – это наборы, между которыми можно установить некоторое соответствие. Последнее можно улучшить с помощью правил лексикографического упорядочения Маделунга – Клечковского [18, 19], если произвести реорганизацию мультиплетов, на которые расщепляется представление группы  $SO(4,2)$ , исключив группу  $O(4)$  из списка подгрупп этой группы [10–12, 14–17]. Однако полного совпадения количества и состава мультиплетов, образующих электронную оболочку, с экспериментальными результатами не получилось: в Периодической системе элементов отсутствуют два первых периода, содержащие по два элемента в каждом (табл. 1), т. е. отсутствует удвоение первого периода.

Отказ от использования при классификации состояний квантовых чисел, относящихся к одному электрону, и переход на формальную точку зрения (с оставлением проблемы интерпретации квантовых чисел на будущее) не устранил уже упоминавшегося удвоения первого периода [10–12, 14–17]. Одна из главных причин, объясняющих особенности диаграммы (табл. 1), заключается в том, что у этих эмпирических правил, с помощью которых изменялось представление группы  $SO(4,2)$ , нет теоретического обоснования и, более того, его не может быть, так как квантовое число  $n$  является собственным значением одного из генераторов группы  $SO(4,2)$ , а квантовое число  $l$  и сумма чисел  $n + l$  не могут быть собственными значениями каких-либо эрмитовых операторов потому, что число  $l$  возникает только при определении собственных значений оператора квадрата орбитального момента  $l(l + 1)$ .

Таблица 1. Лексикографическое упорядочение энергетических уровней электронных оболочек элементов по правилам Маделунга – Клечковского (приведены только первые два периода) [18, 19]

Table 1. Lexographical ordering of energy levels of electron shells of elements according to the Madelunga – Klechkovskogo rules (only first two periods are presented) [18, 19]



Таким образом, на основании изложенного нельзя однозначно сделать вывод о невозможности осуществления необходимых изменений представлений группы  $SO(4,2)$  для приведения их к эмпирическому составу электронных оболочек и определению установленного порядка их заполнения. Эти вопросы рассматриваются далее в настоящей работе с использованием динамического правила, определяющего состав электронных оболочек многоэлектронных атомов.

**6. Анализ численных решений уравнения Шредингера в рамках одноэлектронного приближения Хартри – Фока.** При обсуждении закономерностей симметрии Периодической системы элементов, классификации электронных состояний и их отношений к представлениям группы динамической симметрии водородоподобного атома вопрос – какими волновыми функциями в рамках модели независимых частиц описываются электроны в атомах – не рассматривался. В многоэлектронном атоме движение электрона происходит не только в кулоновском поле ядра, но и в поле остальных электронов. В результате энергия электрона определяется не только главным квантовым числом, но и орбитальным, что и объясняет структуру Периодической системы элементов.

Для определения явного вида наиболее оптимальной волновой функции в модели независимых частиц необходимо найти решение уравнения Шредингера в рамках одноэлектронного приближения Хартри – Фока для рассматриваемого атома. Приведенное рассуждение позволяет утверждать, что волновые функции электрона в многоэлектронном атоме должны значительно отличаться от водородоподобных волновых функций, а следовательно, состояния, принадлежащие представлению группы  $SO(4,2)$ , могут и не иметь отношения к состояниям электронов в атомах, отличающихся от атома водорода.

Однако, как показал М. Крегар [35, 36], при рассмотрении эффективных зарядов электронных состояний в  ${}_{55}\text{Cs}^+$  «водородоподобные» волновые функции являются удивительно хорошим приближением к функциям, рассчитанным методом Хартри – Фока (табл. 2). Этот вывод основан на вычислении эффективных зарядов для поля, действующего на электрон, из значений моментов хартри-фоковских волновых функций:

$$\langle r^k \rangle = \int_0^\infty dr r^{k+2} |R_{nl}(r)|^2. \tag{1}$$

При этом эффективные заряды однозначно определяются любым из моментов:

$$Z_{\text{эфф (a)}} = n \sqrt{\frac{5n^2 + 1 - 3l(l+1)}{2\langle r^2 \rangle}}; \quad Z_{\text{эфф (б)}} = \frac{3n^2 - l(l+1)}{2\langle r \rangle}; \quad Z_{\text{эфф (в)}} = n^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle; \quad Z_{\text{эфф (г)}} = n \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right) \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle}. \tag{2}$$

Если хартри-фоковские волновые функции действительно хорошо представляются водородоподобными волновыми функциями, то эффективные заряды, вычисленные по формулам (2) через моменты одной и той же хартри-фоковской волновой функции, не должны сильно отличаться. Это подтверждается для различных  $s$ -,  $p$ - и  $d$ -состояний атомов Cs (табл. 2).

Таблица 2. Эффективные заряды электронных состояний в  ${}_{55}\text{Cs}^+$  [35, 36]

Table 2. Effective charges of the electron states in  ${}_{55}\text{Cs}^+$  [35, 36]

$Z_{\text{эфф}}$	(а) ( $r^2$ )	(б) ( $r$ )	(в) ( $r^{-1}$ )	(г) ( $r^{-2}$ )	Среднее значение $Z_{\text{эфф}}$
$Z_{1s}$	54,2	54,30	54,47	54,55	54,38±0,10
$Z_{2s}$	50,4	50,60	50,22	50,58	50,56±0,10
$Z_{2p}$	49,1	49,49	50,15	50,51	49,83±0,40
$Z_{3s}$	43,2	43,42	41,70	42,13	42,62±0,75
$Z_{3p}$	41,2	41,36	40,97	42,02	41,05±0,16
$Z_{3d}^7$	37,8	38,44	39,73	40,45	39,12±0,60
$Z_{4s}^9$	33,1	33,20	30,45	30,31	31,79±1,3
$Z_{4p}^2$	30,6	30,62	28,87	29,91	30,00±0,06
$Z_{4d}^8$	25,0	25,26	25,25	26,74	25,33±0,20
$Z_{5s}^5$	20,3	20,39	17,48	16,13	18,58 ±1,8
$Z_{5p}^1$	17,3	17,37	15,21	15,12	16,25±1,0

**7. Динамическое правило описания состава электронных оболочек многоэлектронных атомов.** В квантовомеханических расчетах каждой физической величине ставится в соответствие оператор. Явный вид оператора физической величины зависит от содержания решаемой проблемы. Расположение химических элементов в Периодической системе элементов обусловлено принципом Паули, а также закономерностями вычисления орбитального момента электронов, который является важным параметром, определяющим состояние атома. Для решения проблемы теоретического обоснования Периодической системы элементов необходимо изменить характер вырождения собственных значений одноэлектронного гамильтониана водородоподобной системы, однако: 1) без изменения его собственных функций; 2) с сохранением эффективных зарядов почти вырожденных состояний; 3) с использованием группы  $SO(4,2)$  в качестве группы

динамической симметрии. Решение этой проблемы требует ввода в гамильтониан члена, выражающегося через операторы группы  $SO(4,2)$  и нарушающего симметрию относительно преобразований из подгруппы  $O(4)$  этой группы. Для этого достаточно включить в гамильтониан член, содержащий оператор квадрата орбитального момента электронов, т. е. сделать допущение, что состояние электрона в многоэлектронном атоме моделируется следующим уравнением:

$$(\omega/2)(2 + N + 2f(\hat{I}^2)) |\psi\rangle = Z_{эфф} |\psi\rangle. \quad (3)$$

Значение функции  $f(\hat{I}^2)$  в уравнении (3) должно соответствовать или быть максимально приближенным к экспериментальному характеру вырождения одноэлектронных состояний в многоэлектронных атомах.

Идея внесения в гамильтониан нарушающих симметрию членов доказала свою эффективность при классификации элементарных частиц [31–34] (см. также раздел 3). Предлагаемый способ нарушения симметрии относительно преобразований из подгруппы  $O(4)$  впервые указывает на возможность остаться в рамках представления группы динамической симметрии  $SO(4,2)$ , используя операторы Казимира подгрупп этой группы в качестве нарушающих симметрию операторов. Оператор Казимира является центральным элементом специального вида в универсальной обертывающей алгебре при квантовомеханических расчетах с использованием групп симметрии Ли.

После представления уравнения (3) в обычных трехмерных координатах для «физических» состояний получается следующее уравнение:

$$\left\{ -(1/2)\Delta + (\omega/r) f(\hat{I}^2) - (Z_{эфф}/r) \right\} \psi(r) = E\psi(r). \quad (4)$$

Необычная зависимость от  $r$  в члене  $(\omega/r)f(\hat{I}^2)$  обусловлена тем, что одночастичное уравнение типа (4) получается обычно в предположении, что влияние поля ядра и поля других электронов можно отобразить с помощью введения операторов одночастичных потенциалов  $\varphi(r_i)$  в виде:  $(-\Delta_i/2 + \varphi(r_i))\psi_i(r_i) = E_i\psi_i(r_i)$ , где  $i$  – номер электрона. Для систем частиц с кулоновским взаимодействием имеет место тождество  $W = \sum_i r_i F_i = U$ , где  $U$  – полная потенциальная энергия системы  $U = -\sum_i Z/r_i + (1/2)\sum_{i \neq j} 1/|r_i - r_j|$  и  $F_i = -(\partial U/\partial r_i)$  – сила, действующая на  $i$ -й электрон.

Вириал  $W$  выглядит формально как сумма одночастичных слагаемых [10], что дает возможность моделировать одночастичное уравнение Шредингера выражением  $(-\Delta_i/2 + r_i F_i)\psi_i(r_i) = E_i\psi_i(r_i)$ . Сравнивая уравнения  $(-\Delta_i/2 + \varphi(r_i))\psi_i(r_i) = E_i\psi_i(r_i)$  и  $(-\Delta_i/2 + r_i F_i)\psi_i(r_i) = E_i\psi_i(r_i)$  в предположении, что сила определяется как  $F_i = -(\partial\varphi_i/\partial r_i)$ , получаем уравнение  $-r_i(\partial\varphi_i/\partial r_i) = \varphi_i$ . С учетом того, что оператор  $\hat{I}_i^2$  коммутирует с оператором  $r_i(\partial/\partial r_i)$ , среди решений данного уравнения имеется и решение вида  $\varphi_i = -(Z_{эфф}/r_i) + (1/r_i)f(\hat{I}_i^2)$ .

Таблица 3. Состояния, принадлежащие последовательным значениям  $n^*(n,l)$  при  $\Delta_d \ll 1,0, \Delta_f \ll 1$

Table 3. States belonging to the sequential values of  $n^*(n,l)$  at  $\Delta_d \ll 1,0, \Delta_f \ll 1$

№	$n^*$ из (5)	Состояния $nl$	№	$n^*$ из (5)	Состояния $nl$
1	1	1s	5	$5,5 + \Delta_d$ $16/3 + (5\Delta_d - \Delta_f)/9$	5s, 4d 5p
2	$2$ $7/3 + (5\Delta_d - \Delta_f)/9$	2s 2p	6	$6,6 + \Delta_f$ $6 + \Delta_d$ $19/3 + (5\Delta_d - \Delta_f)/9$	6s, 4f, 5d 6p
3	$3$ $10/3 + (5\Delta_d - \Delta_f)/9$	3s 3p	7	$7,7 + \Delta_f$ $7 + \Delta_d$ $22/3 + (5\Delta_d - \Delta_f)/9$	7s, 5f, 6d 7p
4	$4,4 + \Delta_d$ $13/3 + (5\Delta_d - \Delta_f)/9$	4s, 3d 4p			

Из приведенных эффективных зарядов в уравнениях (2) следует, что линейные комбинации состояний  $\varphi_i = -Z_{эфф}/r_i + (1/r_i)f(\hat{I}_i^2)$ , отвечающие собственным значениям квадрата орбиталь-

ного момента, принадлежат энергии  $E$ :  $E = -Z_{\text{эф}}^2 / 2 [n + f(l(l+1))]^2$ . Согласно этому уравнению энергии состояний определяются числами

$$n^*(n, l) = n + f(l(l+1)), \quad (5)$$

значения которых приведены в табл. 3. Значения этих чисел могут быть близкими для состояний со значениями чисел  $n$  и  $l$ . Если считать, что  $f(l(l+1)) = \alpha l(l+1) - \beta l^2(l+1)^2$ , где  $\beta = (2\Delta_d - \Delta_f) / 72$ ,  $\alpha = 1/6 + (4\Delta_d - \Delta_f) / 12$ ,  $\Delta_d$  и  $\Delta_f$  – малые числа, удовлетворяющие условию  $\Delta_d > \Delta_f > 0$ , то данные табл. 3 показывают, какие состояния для этого случая являются почти вырожденными. Объединяя эти состояния с ближайшими к ним  $p$ -состояниями по значениям чисел  $n^*(n, l)$ , образуем оболочки, указанные цифрами 1–7 (см. табл. 3). После сравнения их содержания с содержанием оболочек многоэлектронных атомов, обнаруживаем их соответствие между собой.

**8. Водородоподобные атомы и группа  $SO(4,2)$ .** В качестве математического дополнения к полученным результатам приведем формулировку задачи об изовалентной водороду квантовой системе, которая в компактном и явном виде демонстрирует все свойства симметрии этой системы. Рассмотрим уравнение Шредингера для изотропного гармонического осциллятора в двумерном пространстве с комплексными координатами  $\xi_s (s = 1, 2)$ , которые представляют собой компоненты спинора:

$$H\psi = \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_s^* \partial \xi_s} + \frac{1}{2} \omega^2 \xi_s^* \xi_s \right) \psi = K\psi. \quad (6)$$

В уравнении (6) звездочка обозначает операцию комплексного сопряжения, под дважды повторяющимся индексом подразумевается суммирование,  $\omega$  – вещественное положительное число,  $K$  – собственное значение оператора  $H$ . Из свойств симметрии уравнения (6), помимо тех, что заключены в определении ( $\xi_s$  – двухкомпонентный спинор), отметим существенную для дальнейшего инвариантность относительно преобразований  $\xi_s \rightarrow \xi_s e^{i\varphi}$  и  $\xi_s^* \rightarrow \xi_s^* e^{-i\varphi}$ , следствием которой является равенство нулю коммутатора оператора  $H$  с оператором  $Q = \xi_s^* \partial / \partial \xi_s^* - \xi_s \partial / \partial \xi_s$ . Введем новые переменные:  $x_\lambda = \xi_s^* (\sigma_\lambda)_{st} \xi_t$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ),  $\chi = \arctg(\xi_1'' / \xi_1')$ , где  $(\sigma_\lambda)_{st}$  обозначают элементы матриц Паули  $\sigma_\lambda$ ,  $\xi_s' = \text{Re} \xi_s$  и  $\xi_s'' = \text{Im} \xi_s$ . Вследствие заданных свойств  $\xi_s$  вещественные числа  $x_\lambda$  являются компонентами трехмерного вектора  $r$ . В этих переменных уравнение (6) принимает вид

$$-1/2 \left[ r\Delta - \frac{1}{r+x_3} 1/r + x_3 (x_1(\partial/\partial x_2) - x_2(\partial/\partial x_1)) \partial/\partial \chi + 1/2(r+x_3) \partial^2/\partial \chi^2 \right] \psi + 1/2(\omega^2 r\psi) = Z\psi, \quad (7)$$

где  $r = |r|$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

К «физическим» решениям уравнения (7) относятся только те решения, которые не зависят от  $\chi$  и принадлежат нулевому собственному значению оператора  $Q$ . Оператор  $Q$  имеет в переменных (7) вид  $Q = i(\partial/\partial \chi)$ . Согласно уравнению (7), эти «физические» решения являются решениями трехмерного уравнения Шредингера для частицы, движущейся в кулоновском поле ядра с зарядом  $Z$  и энергией  $E = -\omega^2 / 2$ . Здесь масса частицы, ее заряд и постоянная Планка  $\hbar$  приняты за единицы измерения.

Устанавливаемая таким образом связь между уравнением Шредингера, описывающим водородоподобный атом, и уравнением Шредингера для изотропного гармонического осциллятора в двумерном комплексном пространстве, позволяет придать решениям этих уравнений простую алгебраическую форму, делающую очевидными свойства их симметрии. Будем считать, что скалярное произведение волновых функций в  $\xi$ -пространстве определяется соотношением  $\langle \phi | \psi \rangle = \int d^4 \xi \phi^* (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_1, \xi_2) \psi (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_1, \xi_2)$ , где  $d^4 \xi = d\xi_1' d\xi_1'' d\xi_2' d\xi_2''$ . Введем операторы  $a_s = \sqrt{\omega/2} (\xi_s + 1/\omega(\partial/\partial \xi_s^*))$ ,  $b_s = \sqrt{\omega/2} (\xi_s^* + 1/\omega(\partial/\partial \xi_s))$  и эрмитово-сопряженные к ним отно-



сительно скалярного произведения  $\langle \phi | \psi \rangle = \int d^4 \xi \phi^* (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_1, \xi_2) \psi (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_1, \xi_2)$  операторы  $a_s^+ = \sqrt{\omega/2} (\xi_s^* - (1/\omega)(\partial/\partial \xi_s))$  и  $b_s^+ = \sqrt{\omega/2} (\xi_s - (1/\omega)(\partial/\partial \xi_s^*))$ . Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям  $[a_s, a_t^+] = \delta_{st}$ ,  $[b_s, b_t^+] = \delta_{st}$ . Выражая операторы, входящие в уравнение (6), с помощью введенных операторов, получаем уравнение  $\omega/2(2 + a_s^+ a_s + b_s^+ b_s) | \psi \rangle = Z | \psi \rangle$ , решения которого легко находятся. Определяя состояние «вакуума» уравнениями  $a_s | 0 \rangle = b_s | 0 \rangle = 0$ , убеждаемся в том, что соотношение  $| n_1^a n_1^b n_2^a n_2^b \rangle = (a_1^+)^{n_1^a} (b_1^+)^{n_1^b} (a_2^+)^{n_2^a} (b_2^+)^{n_2^b} | 0 \rangle$ , где  $n_1^a, n_1^b, n_2^a, n_2^b$  – неотрицательные целые числа, которые являются собственными векторами взаимно коммутирующих операторов  $a_1^+ a_1, b_1^+ b_1, a_2^+ a_2, b_2^+ b_2$ , будут решениями уравнения  $\omega/2(2 + a_s^+ a_s + b_s^+ b_s) | \psi \rangle = Z | \psi \rangle$ , если  $\omega = 2Z / (2 + n_1^a + n_1^b + n_2^a + n_2^b)$ . Тогда из уравнения для энергии  $E = -\omega^2 / 2$  вытекает, что  $E = -2Z^2 / (2 + n_1^a + n_1^b + n_2^a + n_2^b)^2$ . «Физические» решения отбираются условием равенства нулю собственного значения интеграла движения  $Q$ :  $Q = a_s^+ a_s - b_s^+ b_s$ . Это значит, что «физическими» являются значения чисел  $n_1^a, n_1^b, n_2^a, n_2^b$ , удовлетворяющие условию  $n_1^a + n_2^a = n_1^b + n_2^b$ . Определяя, наконец, операторы, коммутирующие с оператором  $Q$ ,  $m_\lambda = (\sigma_\lambda)_{st} a_t b_s$  и  $m_\lambda^+ = (\sigma_\lambda)_{st} a_s^+ b_t^+$ ;  $n_\lambda^a = (\sigma_\lambda)_{st} a_s^+ a_t$  и  $n_\lambda^b = (\sigma_\lambda)_{st} b_t^+ b_s$ ;  $M = a_s b_s$  и  $M^+ = a_s^+ b_s^+$ ;  $2 + N = 2 + a_s^+ a_s + b_s^+ b_s$ , получаем, что эти пятнадцать операторов образуют замкнутую алгебру, изоморфную алгебре Ли группы  $SO(4,2)$  [38]. Под действием операторов  $m_\lambda = (\sigma_\lambda)_{st} a_t b_s$  и  $m_\lambda^+ = (\sigma_\lambda)_{st} a_s^+ b_t^+$ ;  $n_\lambda^a = (\sigma_\lambda)_{st} a_s^+ a_t$  и  $n_\lambda^b = (\sigma_\lambda)_{st} b_t^+ b_s$ ;  $M = a_s b_s$  и  $M^+ = a_s^+ b_s^+$ ;  $2 + N = 2 + a_s^+ a_s + b_s^+ b_s$  состояния  $| n_1^a n_1^b n_2^a n_2^b \rangle = (a_1^+)^{n_1^a} (b_1^+)^{n_1^b} (a_2^+)^{n_2^a} (b_2^+)^{n_2^b} | 0 \rangle$ , удовлетворяющие условию  $n_1^a + n_2^a = n_1^b + n_2^b$ , переходят друг в друга, образуя бесконечномерное унитарное представление  $SO(4,2)$ .

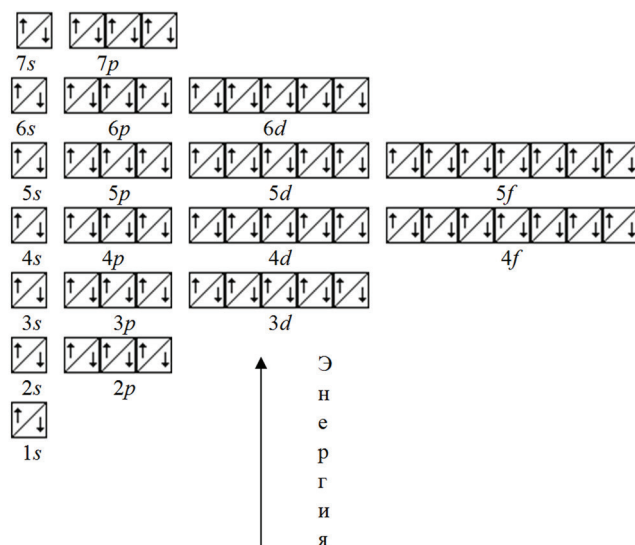
Связь состояний  $| n_1^a n_1^b n_2^a n_2^b \rangle = (a_1^+)^{n_1^a} (b_1^+)^{n_1^b} (a_2^+)^{n_2^a} (b_2^+)^{n_2^b} | 0 \rangle$  с принятой в спектроскопии классификацией состояний водородоподобного атома устанавливается следующим образом:  $l_\lambda = (n_\lambda^a - n_\lambda^b) / 2$  (нормировочные множители не указаны),  $l = 0; (M^+)^k | 0 \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $l = 1: m_\lambda^+ (M^+)^k | 0 \rangle$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , которые являются линейными комбинациями состояний  $a_s | 0 \rangle = b_s | 0 \rangle = 0$ .

**9. Построение Периодической системы элементов с использованием бесконечномерного унитарного представления группы динамической симметрии водородоподобного атома  $SO(4,2)$ .** Подводя итог обсуждению связи состояний водородоподобного атома с представлением группы  $SO(4,2)$ , приведем диаграмму (табл. 4), на которой изображено это представление с указанием доступных для атома состояний с учетом спина электрона. Диаграмма демонстрирует еще одну особенность водородоподобной системы – набор ее состояний расщеплен на мультиплеты, принадлежащие заданной энергии. Эти мультиплеты – конечномерные представления группы  $O(4)$ , являющейся подгруппой группы  $SO(4,2)$  и группой симметрии уравнения Шредингера. Наличие такой симметрии очевидно при представлении последнего в форме (6). Табл. 4 является результатом построения с использованием бесконечномерного унитарного представления группы динамической симметрии водородоподобного атома  $SO(4,2)$  конечномерных мультиплетов, определяющихся квантовыми числами, которые описывают состояния электронов. При этом важно отметить, что критерии совпадения группы симметрии Периодической системы элементов и группы  $SO(4,2)$  динамической симметрии изовалентной водороду квантовой системы не являются случайными и могут эффективно использоваться при введении однопараметрического нарушения симметрии относительно подгруппы  $O(4)$ . Это позволило сформировать мультиплеты, приведенные в табл. 4, содержание которых находится в полном соответствии с экспериментально наблюдаемым содержанием электронных оболочек всех атомов Периодической системы элементов.

**10. Изотопы химических элементов.** Одной из важных проблем при анализе свойств симметрии Периодической системы элементов, которая в настоящей статье с использованием группы

Таблица 4. Бесконечномерное унитарное представление группы  $SO(4,2)$  – группы динамической симметрии водородоподобного атома

Table 4. Infinite unitary representation of the group  $SO(4,2)$  – the dynamic symmetry group of hydrogen-like atom



симметрии  $SO(4,2)$  представлена на плоскости (табл. 4), является проблема, обусловленная существованием изотопов химических элементов. Заряды ядер у изотопов химических элементов такие же, как и у соответствующих элементов, но другие значения масс и строения ядер.

На март 2017 г. известно 3437 изотопов химических элементов [42]. Учитывая такое количество изотопов, построить объемный вариант Периодической системы элементов вряд ли возможно.

Отметим, что ряд идей и подходов, применяемых для построения Периодической системы элементов с применением динамической симметрии, в том числе с использованием группы  $SO(4,2)$ , можно найти в монографиях [40, 41].

**Заключение.** Подводя итоги обсуждению использования групп симметрии для классификации химических элементов и их расположения в Периодической системе элементов, полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

1. Предложено обоснование использованию представлений группы динамической симметрии изовалентной водороду квантовой системы для математического описания свойств симметрии Периодической системы элементов.

2. Осуществлено расщепление бесконечномерного унитарного представления группы  $SO(4,2)$  на конечномерные мультиплеты, определяющиеся квантовыми числами, которые описывают состояния электронов.

3. Показано, что критерии совпадения группы симметрии Периодической системы элементов и группы  $SO(4,2)$  динамической симметрии изовалентной водороду квантовой системы не являются случайными и могут эффективно использоваться при введении однопараметрического нарушения симметрии относительно подгруппы  $O(4)$ , что позволяет установить порядок заполнения электронных оболочек элементов в полном соответствии с экспериментальными результатами, обобщенными в различных вариантах Периодической системы элементов.

### Список использованных источников

1. Меншуткин, Н. А. (от имени Д. И. Менделеева). Соотношение свойств с атомным весом элементов / Н. А. Меншуткин // Журн. Рус. хим. о-ва. – 1869. – Т. 1. – С. 60–77.
2. Менделеев, Д. И. Основы химии: в 2 т. / Д. И. Менделеев. – М.; Л.: Госхимиздат, 1947. – 2 т.
3. Левитан, Б. М. Почти периодические функции / Б. М. Левитан. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – 396 с.
4. Bohr, N. Atomic Theory and the Description of Nature / N. Bohr. – Cambridge: Cambridge University Press, 1934. – 120 p.
5. Зоммерфельд, А. Строение атомов и спектры: в 2 т. / А. Зоммерфельд. – М.: Гостехиздат, 1956. – 2 т.

6. Barut, A. O. Group Structure of the Periodic System / A. O. Barut // Structure of Matter, Rutherford Centennial Symposium. – New Zealand, 1972. – P. 169–179.
7. Novaro, O. A. Approximate symmetry of the periodic table / O. A. Novaro, M. Barrondo // J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys. – 1972. – Vol. 5, № 6. – P. 1104–1110. <https://doi.org/10.1088/0022-3700/5/6/012>
8. Конопельченко, Б. Г. Группа  $SO(2,4) + R$  и таблица Менделеева / Б. Г. Конопельченко. – Новосибирск, 1972. – 7 с. – (Препринт / СО АН СССР. Ин-т ядерной физики).
9. Zhuvikin, G. V. Symmetry principles for periodic systems of molecules. Joint Report SC/ SPBU-1. Southern College, Collegedale, Tennessee, USA, and Saint Petersburg University, Russia / G. V. Zhuvikin, R. Hefferlin. – [S. l.], 1994. – 84 p.
10. Гурский, Л. И. Вириал в статистической модели атома / Л. И. Гурский, Л. И. Комаров // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 4. – С. 49–52.
11. Гурский, Л. И. Группа симметрии периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева / Л. И. Гурский, Л. И. Комаров, А. М. Солодухин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 2. – С. 58–65.
12. Gurskii, L. I. Group of symmetry of the Periodic system of chemical elements / L. I. Gurskii, L. I. Komarov, A. M. Solodukhin // Int. J. Quantum Chem. – 1999. – Vol. 72, № 5. – P. 499–508. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-461x\(1999\)72:5<499::aid-qua3>3.0.co;2-e](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-461x(1999)72:5<499::aid-qua3>3.0.co;2-e)
13. Фет, А. И. Группа симметрии химических элементов / А. И. Фет. – Новосибирск: Наука, 2010. – 238 с.
14. Гурский, Л. И. Группа динамической симметрии изовалентных водорода квантовых систем и симметричные свойства многоэлектронных атомов / Л. И. Гурский // Вестн. фонда фундам. исслед. – 2004. – № 3 (29). – С. 61–79.
15. Гурский, А. Л. Групповая классификация элементов и периодический закон Д. И. Менделеева / А. Л. Гурский, Л. И. Гурский // Докл. БГУИР. – 2015. – № 8 (94). – С. 38–43.
16. Фундаментальные проблемы естествознания – теоретическая основа профессионального образования специалистов для микро-, микро- и радиоэлектроники по дисциплинам математического цикла: в 5 ч. – Нижний Новгород, 2015. – Ч. 2. – С. 403–407; Ч. 3. – С. 407–411; Ч. 4. – С. 411–415; Ч. 5. – С. 415–419.
17. Гурский, А. Л. Группа  $SO(4,2)$  и симметричные свойства Периодической системы элементов Д. И. Менделеева / А. Л. Гурский, Л. И. Гурский // Докл. БГУИР. – 2016. – № 48 (98). – С. 73–79.
18. Маделунг, Э. Математический аппарат физики / Э. Маделунг. – М.: Физматгиз, 1961. – 620 с.
19. Клечковский, В. М. Распределение атомных электронов и правило последовательного заполнения  $(n + 1)$ -групп / В. М. Клечковский. – М.: Атомиздат, 1968. – 433 с.
20. Петрашень, М. И. Применение теории групп в квантовой механике / М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов. – М.: Наука, 1967. – 308 с.
21. Фок, В. А. Атом водорода и неевклидова геометрия / В. А. Фок // Изв. АН СССР. Сер. VII, Отд-ние мат. и естеств. наук. – 1935. – № 2. – С. 169–179.
22. Фок, В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – Изд. 2-е, доп. – М.: Физматгиз, 1961. – 568 с.
23. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
24. Эллиот, Дж. Симметрия в физике: в 2 т. / Дж. Эллиот, П. Добер. – М.: Мир, 1983. – 2 т.
25. Барут, А. Теория представлений групп и ее приложения: в 2 т. / А. Барут, Р. Рончка. – М.: Мир, 1980. – 2 т.
26. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли: пер. с фр. / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1972–1978. – Гл. 4–6. – 1972. – 334 с.; Гл. 1–3. – 1976. – 495 с.; Гл. 7–8. – 1978. – 342 с.
27. Джеммер, М. Эволюция понятий квантовой механики / М. Джеммер. – М.: Наука, 1985. – 384 с.
28. Гейзенберг, В. Избранные труды / В. Гейзенберг. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 616 с.
29. Паули, В. Общие принципы волновой механики / В. Паули. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 332 с.
30. Борн, М. Атомная физика / М. Борн. – М.: Мир, 1967. – 496 с.
31. Gell-Mann, M. The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry. Report No. CTSL-20, California Institute of Technology. March 15, 1961.
32. Néeman, Y. Derivation of strong interactions from a gauge invariance / Y. Néeman // Nucl. Phys. – 1961. – Vol. 26, № 2. – P. 222–229. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(61\)90134-1](https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90134-1)
33. Gell-Mann, M. Symmetries of Barions and Mesons / M. Gell-Mann // Phys. Rev. – 1962. – Vol. 125, № 3. – P. 1067–1084. <https://doi.org/10.1103/physrev.125.1067>
34. Малкин, И. А. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем / И. А. Малкин, В. И. Манько. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
35. Kregar, M. The Virial and the Independent Particle Models of the Atom / M. Kregar // Phys. Scr. – 1984. – Vol. 29, № 5. – P. 438–447. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/29/5/005>
36. Kregar, M. The Virial as the Atomic Model Potential Energy Operator / M. Kregar // Phys. Scr. – 1985. – Vol. 31, № 4. – P. 246–254. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/31/4/005>
37. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1989. – Т. 5, ч. 1: Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – 768 с.
38. Komarov, L. I. The algebraic method of solution of the Dirac equation for a particle in a Coulomb potential / L. I. Komarov, T. S. Romanova // J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys. – 1985. – Vol. 18, № 5. – P. 859–865. <https://doi.org/10.1088/0022-3700/18/5/007>
39. The NUBASE2016 evaluation of nuclear properties / G. Audi [et al.] // Chin. Phys. C. – 2017. – Vol. 41, № 3. – P. 03001. <https://doi.org/10.1088/1674-1137/41/3/030001>

40. Thyssen, P. Shattered Symmetry Group Theory from the Eightfold Way to the Periodic Table / P. Thyssen, A. Ceulemans. – New York: Oxford University Press, 2017. – 511 p.

41. Kibler, M. R. A Group-Theoretical Approach to the Periodic Table of Chemical Elements: Old and New Developments / M. R. Kibler // *The Mathematics of the Periodic Table*. – New York: Nova Science Publishers, 2005. – P. 237–264.

## References

1. Menshutkin N. A. (named after D. I. Mendeleev). The ratio of properties with the atomic weight of elements. *Zhurnal Russkogo khimicheskogo obshchestva* [Journal of the Russian Chemical Society], 1869, vol. 1, pp. 60–77 (in Russian).
2. Mendeleev D. I. *Basic Chemistry*. 2 vol. Moscow, Leningrad, Goskhimizdat Publ., 1947 (in Russian).
3. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions*. Moscow, Gostekhteorizdat Publ., 1953. 396 p. (in Russian).
4. Bohr N. *Atomic Theory and the Description of Nature*. Cambridge, Cambridge University Press, 1934. 120 p.
5. Zommerfeld A. *Atom Structure and Spectra*. 2 vol. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956 (in Russian).
6. Barut A. O. Group Structure of the Periodic System. *Structure of Matter, Rutherford Centennial Symposium*, New Zealand, 1972, pp. 169–179.
7. Novaro O. A., Barrondo M. Approximate symmetry of the periodic table. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 1972, vol. 5, no. 6, pp. 1104–1110. <https://doi.org/10.1088/0022-3700/5/6/012>
8. Konopelchenko B. G. *Group  $SO(2,4) + R$  and Mendeleev Table*. Novosibirsk, 1972. 7 p. (in Russian).
9. Zhuvikin G. V., Hefferlin R. *Symmetry principles for periodic systems of molecules*. JR-PHYS-SC/SPBU 1. Joint Report №1 of the Physics Departments Southern College, Collegedate, USA, St. Petersburg University. St. Peterburg, Russia, 1994. 84 p.
10. Hurski L. I., Komarov L. I. Virial in atom statistical model. *Doklady Akademii nauk Belarusi = Doklady of the Academy of Sciences of Belarus*, 1997, vol. 41, no. 4, pp. 49–52 (in Russian).
11. Hurski L. I., Komarov L. I., Solodukhin A. M. The symmetry group of the Mendeleev periodic element system // *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1998, no. 2, pp. 58–65 (in Russian).
12. Gurskii A. L., Komarov L. I., Solodukhin A. M. Group of symmetry of the Periodic system of chemical elements. *International Journal of Quantum Chemistry*, 1999, vol. 72, no. 5, pp. 499–508. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-461x\(1999\)72:5<499::aid-qua3>3.0.co;2-e](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-461x(1999)72:5<499::aid-qua3>3.0.co;2-e)
13. Fet A. I. *Chemical Symmetry Group*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2010. 238 p. (in Russian).
14. Hurski L. I. Dynamic symmetry group of the quantum system isovalent to hydrogen and symmetry properties of multielectron atoms. *Vestnik fonda fundamental'nykh issledovanii = Vestnik of the Foundation for Fundamental Research*, 2004, no. 3 (29), pp. 61–79 (in Russian).
15. Gurskii A. L., Hurski L. I. Group classification of the elements and D. I. Mendeleev's periodic law. *Doklady BGUIR*, 2015, no. 8 (94), pp. 38–43 (in Russian).
16. *Fundamental Problems of Natural Science is the Theoretical Basis of Professional Education of Specialists in Nano-, Micro-, and Radioelectronics According to Mathematics Disciplines*. Nizhny Novgorod, 2015, Part 2, pp. 403–407; Part 3, pp. 407–411; Part 4, pp. 411–415; Part 5, pp. 415–419 (in Russian).
17. Gurskii A. L., Hurski L. I. Group  $SO(4,2)$  and symmetry properties of D. I. Mendeleev's Periodic system elements. *Doklady BGUIR*, 2016, no. 48 (98), pp. 73–79 (in Russian).
18. Madelung E. *Mathematical Apparatus of Physics*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 620 p. (in Russian).
19. Klechkovskii V. M. *Distribution of Atom Electrons and Rule of Sequential Filling of  $(n + l)$ -groups*. Moscow, Atomizdat Publ., 1968. 433 p. (in Russian).
20. Petrashen M. I., Trifonov E. D. *Application of Group Theory in Quantum Mechanic*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 308 p. (in Russian).
21. Fok V. A. Hydrogen Atom and Non-Euclidean Geometry. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya VII. Matematicheskikh i estestvennykh nauk* [News of the Academy of Sciences of the USSR. Series VII. Department of Mathematical and Natural Sciences], 1935, no. 2, pp. 169–179 (in Russian).
22. Fok V. A. *Theory of Space, Time and Gravity*. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 568 p. (in Russian).
23. Fedorov F. I. *Lorentz Group*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 384 p. (in Russian).
24. Elliot J., Dober P. *Symmetry in Physics*. London, Macmillan, 1979.
25. Barut A., Ronchka R. *Theory of Group Representations and its Applications*. Warszawa, PWN – Polich Scientific Publishers, 1986. <https://doi.org/10.1142/0352>
26. Bourbaki N. *Lie groups and Lie algebras*. Berlin, Springer Verlag, 1989.
27. Jemmer M. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1966. 412 p.
28. Heisenberg W. *Gesammelte Werke = Collected works Werner*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1984. 947 p.
29. Pauli W. *General Principles of Quantum Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1980. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61840-6>
30. Born M. *Atomic Physics*. 8<sup>th</sup> ed. Blackie & Son Ltd, 1969. 269 p.
31. Gell-Mann M. *The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry*. Report No. CTSL-20, California Institute of Technology. March 15, 1961.
32. Néeman Y. Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance. *Nuclear Physics*, 1961, vol. 26, no. 2, pp. 222–229. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(61\)90134-1](https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90134-1)

33. Gell-Mann M. Symmetries of Barions and Mesons. *Physical Review*, 1962, vol. 125, no. 3, pp. 1067–1084. <https://doi.org/10.1103/physrev.125.1067>
34. Malkin I. A., Man'ko V. I. *Dynamic Symmetries and Coherent States of Quantum Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian).
35. Kregar M. The Virial and the Independent Particle Models of the Atom. *Physica Scripta*, 1984, vol. 29, no. 5, pp. 438–447. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/29/5/005>
36. Kregar M. The Virial as the Atomic Model Potential Energy Operator. *Physica Scripta*, 1985, vol. 31, no. 4, pp. 246–254. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/31/4/005>
37. Landau L. D., Lifshits E. M. *Theoretical physics. Vol. 5, pt. 1. Quantum mechanics. Nonrelativistic theory*. 4<sup>th</sup> ed. Moscow, Nauka Publ., 1989. 768 p. (in Russian).
38. Komarov L. I., Romanova T. S. The algebraic method of solution of the Dirac equation for a particle in a Coulomb potential *Journal of Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics*, 1985, vol. 18, no. 5, pp. 859–865. <https://doi.org/10.1088/0022-3700/18/5/007>
39. Audi G., Kondev F. G., Wang M., Huang W. J., Naimi S. The NUBASE2016 evaluation of nuclear properties. *Chinese Physics C*, 2017, vol. 41, no. 3, pp. 03001. <https://doi.org/10.1088/1674-1137/41/3/030001>
40. Thyssen P., and A. Ceulemans. *Shattered Symmetry Group Theory from the Eightfold Way to the Periodic Table*. New York, Oxford University Press, 2017. 511 p.
41. Kibler M. R. A Group-Theoretical Approach to the Periodic Table of Chemical Elements: Old and New Developments. *The Mathematics of the Periodic Table*. New York, Nova Science Publishers, 2005, pp. 237–264.

### Информация об авторах

**Гурский Леонид Ильич** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [lhur@bsuir.by](mailto:lhur@bsuir.by)

**Гурский Александр Леонидович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры защиты информации, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [gurskii@bsuir.by](mailto:gurskii@bsuir.by)

### Information about the authors

**Leonid I. Hurski** – Corresponding Member, Dr. Sc. (Engineering), Professor, Senior Researcher, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [lhur@bsuir.by](mailto:lhur@bsuir.by)

**Alexander L. Gurskii** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Information Security, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [gurskii@bsuir.by](mailto:gurskii@bsuir.by)