ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.5 Поступила в редакцию 20.06.2019
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-263-282 Received 20.06.2019

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИИ $|x|^s$ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА

Аннотация. Исследуются аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена рядов Фурье по системе рациональных дробей Чебышева – Маркова в приближении функции $|x|^s$, $0 < s < 2$. Приведены основные результаты ранее известных работ о средних Валле Пуссена в полиномиальном и рациональном случаях, а также известные литературные сведения о приближениях функций со степенной особенностью. Вводятся в рассмотрение средние Валле Пуссена на отрезке $[-1,1]$ как метод суммирования рядов Фурье по одной системе рациональных дробей Чебышева – Маркова. Найдено интегральное представление приближений рациональными средними Валле Пуссена функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке $[-1,1]$, оценка уклонений средних Валле Пуссена от функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, в зависимости от положения точки x на отрезке, равномерная оценка уклонений на отрезке $[-1,1]$ и асимптотическое выражение ее мажоранты. Установлено оптимальное значение параметра, при котором уклонения средних Валле Пуссена от функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке $[-1,1]$ имеют наиболее высокую скорость стремления к нулю. Как следствие полученных результатов подробно исследована задача о приближениях функции $|x|^s$, $s > 0$, средними Валле Пуссена рядов Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода. Найдены поточечная оценка приближений и асимптотическая оценка.

Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Возможно применение как при чтении спецкурсов на математических факультетах, так и для решения конкретных задач вычислительной математики.

Ключевые слова: ряд Фурье, система рациональных дробей Чебышева – Маркова, средние Валле Пуссена, равномерные оценки, асимптотические оценки, точные константы, наилучшее приближение

Для цитирования. Поцейко, П. Г. О приближениях функции $|x|^s$ средними Валле Пуссена рядов Фурье по системе рациональных дробей Чебышева – Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 263–282. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-263-282

P. G. Patseika, Y. A. Rovba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

ON APPROXIMATIONS OF THE FUNCTION $|x|^s$ BY THE VALLEE POUSSIN MEANS OF THE FOURIER SERIES BY THE SYSTEM OF THE CHEBYSHEV – MARKOV RATIONAL FRACTIONS

Abstract. The approximative properties of the Valle Poussin means of the Fourier series by the system of the Chebyshev – Markov rational fractions in the approximation of the function $|x|^s$, $0 < s < 2$ are investigated. The introduction presents the main results of the previously known works on the Vallee Poussin means in the polynomial and rational cases, as well as on the known literature data on the approximations of functions with power singularity. The Valle Poussin means on the interval $[-1,1]$ as a method of summing the Fourier series by one system of the Chebyshev – Markov rational fractions are introduced. In the main section of the article, a integral representation for the error of approximations by the rational Valle Poussin means of the function $|x|^s$, $0 < s < 2$, on the segment $[-1,1]$, an estimate of deviations of the Valle Poussin means from the function $|x|^s$, $0 < s < 2$, depending on the position of the point on the segment, a uniform estimate of deviations on the segment $[-1,1]$ and its asymptotic expression are found. The optimal value of the parameter is obtained, at which the deviation error of the Valle Poussin means from the function $|x|^s$, $0 < s <2$, on the interval $[-1,1]$ has the highest velocity of zero. As a consequence of the obtained results, the problem of approximation of the function $|x|^s$, $s > 0$, by the Valle Poussin means of the Fourier series by the system of the Chebyshev first-kind polynomials is studied in detail. The pointwise estimation of approximation and asymptotic estimation are established.

The work is both theoretical and applied. Its results can be used to read special courses at mathematical faculties and to solve specific problems of computational mathematics.

Keywords: Fourier series, system of Chebyshev – Markov rational fractions, Vallee Poussin means, uniform estimates, asymptotic estimates, exact constants, better approximation

For citation. Patseika P. G., Rovba Y. A. On approximations of the function $|x|^s$ by the Vallee Poussin means of the Fourier series by the system of the Chebyshev – Markov rational fractions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 263–282 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-263-282

Введение. Метод приближений периодических функций усеченными средними тригонометрических рядов Фурье впервые рассмотрел Валле Пуссен [1, 2]. С. М. Никольский в своей работе [3] указал на интерес к этому методу суммирования рядов Фурье со стороны А. Н. Колмогорова. Там же автором было получено асимптотическое представление для констант Лебега сумм Валле Пуссена.

Изучению аппроксимативных свойств средних Валле Пуссена тригонометрических рядов Фурье на различных функциональных классах посвящено значительное число исследований (см., напр., [4–6]). А. Ф. Тиман [7] получил оценки приближений средними Валле Пуссена рядов Фурье по системам полиномов Чебышева первого рода. И. М. Ганзбург [8–9] определил асимптотическое поведение верхних граней уклонений средних Валле Пуссена рядов Фурье – Чебышева на классах функций $H^{(\alpha)}$, $0<\alpha\leq 1$. Т. О. Оматаев [10] получил оценку уклонений в приближении средними Валле Пуссена на классах функций $C_\omega[-1,1]$.

В. Н. Русаком построены и исследованы интегральные рациональные операторы типа Валле Пуссена на вещественной оси [11] и в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций [12]. Позже Н. В. Гриб [13] получил оценки приближений интегральными рациональными операторами типа Валле Пуссена в пространстве $VH_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций, имеющих ограниченную вариацию на отрезке $[0,2\pi]$ и удовлетворяющих условию Липшица $\mathrm{Lip}\alpha$, $0<\alpha<1$. Е. А. Ровбой [14] изучены аппроксимативные свойства интегральных рациональных операторов типа Валле Пуссена на классах $W^r_{[a,b]}V$, $r>0$, функций дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля. К. А. Смотрицким [15] показано, что интегральные рациональные операторы типа Валле Пуссена при некоторых дополнительных условиях осуществляют приближения порядка наилучшего на классах $V\left(M,[a,b],\omega\right)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций f, имеющих ограниченную вариацию с заданным модулем непрерывности.

Изучению приближений функции $|x|^s$, $s>0$, на отрезке $[-1,1]$ посвящен ряд работ. Так, в 1938 г. С. Н. Бернштейном [16] был опубликован замечательный результат о том, что наилучшее приближение функции $|x|^s$, $s>0$, на отрезке $[-1,1]$ полиномами степени не выше n удовлетворяет асимптотическому равенству

$$E_n\left(|x|^s,[-1,1]\right)\sim\frac{\beta_s}{n^s},\quad n\to\infty,$$

где положительная постоянная β_s – так называемая константа Бернштейна – зависит лишь от s и не зависит от n. Другими словами, для полинома q_n степени не выше n наилучшего приближения функции $|x|^s$, $s>0$, на отрезке $[-1,1]$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^s\left\||x|^s-q_n\right\|=\beta_s.$$

Р. С. Варга и А. Дж. Карпентер [17], используя методику, основанную на алгоритме Ремеза и экстраполяции Ричардсона, нашли численные значения константы Бернштейна с большой степенью точности для различных значений параметра s.

Наряду с исследованиями наилучших приближений степенной функции возникает задача изучения различных методов ее приближений. Р. А. Райцину [18] принадлежит следующий результат:

$$\lim_{n\to\infty} n^s I_n\left(|x-c|^s\right)=\frac{2}{\pi}\Gamma(s)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left(\sqrt{1-c^2}\right)^s,\quad -1<c<1,\ s>0,$$

где

$$I_n\left(f(x)\right)=\left\|f(x)-s_n(f,x)\right\|_C=\max_{|x|\le 1}|f(x)-s_n(f,x)|,$$

$s_n(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье – Чебышева функции $f(x)$.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с изучением приближений функций $|x|^s$, $0<s<2$, на отрезке [–1,1] средними Валле Пуссена рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова: установлено интегральное представление приближений, найдена точная при определенных условиях оценка приближений в зависимости от положения точки x на отрезке, равномерная оценка приближений, ее асимптотическое представление, а также оптимальное значение параметра, обеспечивающее наибольшую скорость приближений.

1. Средние Валле Пуссена рациональных рядов Фурье – Чебышева. Напомним основные сведения о системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Как известно [19], алгебраическая косинус-дробь Чебышева – Маркова на отрезке [–1,1] с двумя геометрически различными комплексно-сопряженными мнимыми параметрами имеет вид

$$M_n(x)=\cos n\arccos x\sqrt{\frac{1+p^2}{1+p^2x^2}},\quad x\in[-1,1],\quad p\ge 0,\quad n=0,1,\ldots,$$

и при $p=0$ представляет собой классический полином Чебышева первого рода.

В случае четных $n, n=2m$, $m=0,1,\ldots,$ элементы системы $M_{2m}(x)$, $m=0,1,\ldots,$ представляют собой рациональные дроби вида

$$M_{2m}(x)=\frac{t_{2m}(x)}{(1+p^2x^2)^m},\ p\ge 0,\ t_{2m}(x)\in \mathrm{P}_{2m},\ m=0,1,\ldots\ .$$

Система алгебраических дробей $M_n(x)$, $n=0,1,\ldots,$ является ортогональной на отрезке [–1,1] с весом

$$\rho(x,p)=\frac{\sqrt{1+p^2}}{(1+p^2x^2)\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1,\ p\ge 0.$$

Четной функции $f(x)$, абсолютно суммируемой с весом $\rho(x,a)$ на отрезке [–1,1], поставим в соответствие ряд Фурье по системе $M_{2n}(x)$, $n=0,1,\ldots$:

$$f(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{2n}M_{2n}(x),\quad c_{2n}=\frac{4}{\pi}\int_0^1 f(t)M_{2n}(t)\rho(t,p)dt,\ n=0,1,\ldots\ .$$

Справедлива

Т е о р е м а 1 [19]. *Для частичных сумм ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова четной функции* $f\in C[-1,1]$ *имеет место представление*

$$s_{2n}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(\cos v)\frac{\sin[(2n+1)\varphi(u,v)]}{\sin\varphi(u,v)}\lambda(v)dv,\quad x=\cos u,\tag{1}$$

где

$$\varphi(u,v)=\int_u^v\lambda(y)dy,\quad \lambda(y)=\frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2\cos 2y+\alpha^4},\quad \alpha\in[0,1).\tag{2}$$

Частичная сумма $s_{2n}(f,x)$ является рациональной функцией порядка не выше $2n$ и имеет вид

$$s_{2n}(f,x)=\frac{q_{2n}(x)}{(1+p^2x^2)^n},\quad p\ge 0,\quad p=\frac{2\alpha}{1-\alpha^2},\quad n=0,1,\ldots,$$

где $q_{2n}(x)$ – некоторый многочлен степени не выше $2n$, коэффициенты которого зависят от параметра p и функции f, причем $s_{2n}(1,x)\equiv 1$.

Сумму

$$V_{4n}(f,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}s_{2k}\left(f,x\right),\quad n=0,1,\ldots, \tag{3}$$

естественно назвать средними Валле Пуссена рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова.

Справедлива

Т е о р е м а 2. *Для средних Валле Пуссена* (3) *имеет место представление*

$$V_{4n}(f,x)=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(\cos v)\frac{\sin\left((3n+1)\varphi(u,v)\right)\sin\left((n+1)\varphi(u,v)\right)}{\sin^2\varphi(u,v)}\lambda(v)dv, \tag{4}$$

где $\varphi(u,v)$, $\lambda(v)$ *из* (2), $x=\cos u$.

Средние Валле Пуссена $V_{4n}(f,x)$ *являются рациональной функцией степени не выше* $4n$, *имеют вид*

$$\frac{p_{4n}(x)}{(1+a^2x^2)^{2n}},\quad -1\le x\le 1,\, a\ge 0,$$

где $p_{4n}(x)$ *– некоторый многочлен степени не выше* $4n$, *причем* $V_{4n}(1,x)\equiv 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе утверждение теоремы сразу же следует из представлениий (1) и (3), а также аналогичного утверждения для частичных сумм в [19]. Из точности частичных сумм (1) для единицы и представления (3) приходим к третьему утверждению. Для доказательства первого утверждения теоремы подставим (1) в (3). Тогда

$$V_{4n}(f,x)=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f(\cos v)}{\sin\varphi(u,v)}\lambda(v)\sum_{k=n}^{2n}\sin\left[(2k+1)\varphi(u,v)\right]dv.$$

Используя равенство

$$\sum_{k=n}^{2n}\sin(2k+1)t=\frac{\sin^2(2n+1)t-\sin^2 nt}{\sin t},$$

получим

$$V_{4n}(f,x)=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(\cos v)\frac{\sin^2\left[(2n+1)\varphi(u,v)\right]-\sin^2\left[n\varphi(u,v)\right]}{\sin^2\varphi(u,v)}\lambda(v)dv.$$

Теперь, чтобы прийти к формуле (4), достаточно провести несложные тригонометрические преобразования.

З а м е ч а н и е 1. Из определения средних Валле Пуссена (3) следует, что

$$V_{4n}(f,x)=\frac{1}{n+1}\left((2n+1)\sigma_{4n}(f,x)-n\sigma_{2n-2}(f,x)\right),$$

где

$$\sigma_{2n}(f,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_{2k}(f,x)$$

– средние Фейера рациональных рядов Фурье – Чебышева.

Получим еще один результат в этом направлении. Справедлива

Л е м м а 1. *Для средних Валле Пуссена* (4) *имеет место представление*

$$V_{4n}(f,x)=\frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v)\frac{\sin[(3n+1)\varphi(u,v)]\sin[(n+1)\varphi(u,v)]}{\sin^2(v-u)}dv, \quad x=\cos u. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем правую часть формулы (4). Из [19] известно, что

$$\mathrm{e}^{in\varphi(u,v)}=\sqrt{\frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)}}, \quad \omega_n(z)=\left(\frac{z^2+\alpha^2}{1+\alpha^2 z^2}\right)^n, \zeta=\mathrm{e}^{iv}, \xi=\mathrm{e}^{iu}, \ n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Тогда несложно найти, что

$$\sin^2\varphi(u,v)=\sin^2(v-u)\lambda(u)\lambda(v).$$

Подставив последнее соотношение в (4), придем к представлению (5).

З а м е ч а н и е 2. Положив в представлении (5) значение α = 0, получим

$$V_{4n}(f,x)=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v)\frac{\sin[(3n+1)(v-u)]\sin[(n+1)(v-u)]}{\sin^2(v-u)}dv, \quad x=\cos u.$$

То есть, переходя к полиномиальному случаю, функция $V_{4n}(f,x)$ представляет собой классические средние Валле Пуссена рядов Фурье – Чебышева при условии четности функции *f*. Аппроксимативные свойства последних подробно изучены в вышеупомянутых работах И. М. Ганзбурга, А. Ф. Тимана и др.

2. Оценка приближений функции $|x|^s$, $0<s<2$, на отрезке [–1,1] суммами Валле Пуссена. Рассмотрим приближения функции $|x|^s$, $0<s<2$, на отрезке [–1,1] средними Валле Пуссена (3). Найдем поточечную и равномерную оценку приближений. С этой целью положим

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha)=|x|^s-V_{4n}\left(|\cdot|^s,x\right), \quad -1\le x\le 1, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{4n}(\alpha)=\max_{-1\le x\le 1}|\varepsilon_{4n}(x,\alpha)|=\|\varepsilon_{4n}(x,\alpha)\|_{C[-1,1]}. \tag{8}$$

Т е о р е м а 3. *Для приближений функции* $|x|^s$, $0<s<2$, *на отрезке* [–1,1] *средними Валле Пуссена* (3) *справедливо соотношение*

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha)=\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)\lambda(u)}\sin\frac{\pi s}{2}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1+2t^2\cos 2u+t^4}\chi_n(t)\Big[\chi_{n+1}(t)\cos\big(\psi_n+\arg\omega_{n+1}(\xi)\big)+(-1)^n\cos\psi_n\Big]dt, \tag{9}$$

где

$$\chi_n(t)=\left(\frac{t^2-\alpha^2}{1-\alpha^2 t^2}\right)^n, \quad x=\cos u, \quad |x|\le 1, \tag{10}$$

$$\psi_n=\psi_n(x,t,\alpha)=\arg\frac{\xi^2}{(1+t^2\xi^2)^2}+n\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}, \quad x=\cos u. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем полагать, что $x\in(0,1)$. Тогда $u=\arccos x\in(0,\pi/2)$. Учитывая, что $V_{4n}(1,x)\equiv 1$, из (5) получим

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha)=\frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\cos^s u-\cos^s v\right]\frac{\sin[(3n+1)\varphi(u,v)]\sin[(n+1)\varphi(u,v)]}{\sin^2(v-u)}dv,\ \ x=\cos u.$$

Выполнив в интеграле справа замены $\zeta=\mathrm{e}^{iv}$, $\xi=\mathrm{e}^{iu}$ и приняв во внимание (6), находим, что

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha)=$$

$$=\frac{\xi^{2-s}}{2^s\pi i(n+1)\lambda(u)}\int_C\frac{\zeta^s(\xi^2+1)^s-\xi^s(\zeta^2+1)^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\left[\frac{\omega_{2n+1}(\zeta)}{\omega_{2n+1}(\xi)}-\frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)}-\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}+\frac{\omega_{2n+1}(\xi)}{\omega_{2n+1}(\zeta)}\right]d\zeta,\quad (12)$$

где $C=\left\{\zeta:\zeta=\mathrm{e}^{iv},-\pi/2\le v\le\pi/2\right\}$. Отметим, что подынтегральная функция в (13) имеет точку ветвления $\zeta=0$. Интеграл справа разобьем на четыре интеграла так, что

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha)=\frac{\xi^{2-s}}{2^s\pi i(n+1)\lambda(u)}\left[\overline{\omega_{2n+1}(\xi)}I_1-\overline{\omega_n(\xi)}I_2-\omega_n(\xi)I_3+\omega_{2n+1}(\xi)I_4\right],\quad (13)$$

где

$$I_1=\int_C\frac{\zeta^s(\xi^2+1)^s-\xi^s(\zeta^2+1)^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\omega_{2n+1}(\zeta)d\zeta,$$

$$I_2=\int_C\frac{\zeta^s(\xi^2+1)^s-\xi^s(\zeta^2+1)^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\omega_n(\zeta)d\zeta,$$

$$I_3=\int_C\frac{\zeta^s(\xi^2+1)^s-\xi^s(\zeta^2+1)^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\overline{\omega_n(\zeta)}d\zeta,$$

$$I_4=\int_C\frac{\zeta^s(\xi^2+1)^s-\xi^s(\zeta^2+1)^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\overline{\omega_{2n+1}(\zeta)}d\zeta.$$

Обратим внимание, что для интеграла (12) точка $\zeta=\xi$ является нулем второго порядка как числителя, так и знаменателя подынтегрального выражения, и, следовательно, не будет особой. Однако для интегралов $\{I_k\}_{k=1}^4$ по отдельности она уже будет особой. Чтобы избежать неопределенности, положим $\xi=\rho\mathrm{e}^{iu}$, $\rho<1$. Другими словами, поместим точку ξ внутрь единичного круга. Очевидно, чтобы впоследствии прийти к окончательному результату, следует $\rho\to1$.

Будем исследовать каждый из интегралов по отдельности. Рассмотрим интеграл I_1. Его подынтегральная функция

$$\varphi_1(\zeta,\xi)=\frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s-(\zeta^2+1)^s\xi^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\omega_{2n+1}(\zeta)$$

имеет на границе области $\mathfrak{D}=\left\{\zeta:|\zeta|<1,\ \Re\zeta>0\right\}$ точку ветвления $\zeta=0$, а внутри области – особую точку $\zeta=\xi$, являющуюся для нее простым полюсом. Применяя к I_1 интегральную теорему Коши в области, ограниченной контуром, который состоит из C, полуокружности $C_\delta=\left\{\zeta:\zeta=\delta\mathrm{e}^{i\varphi},-\pi/2\le\varphi\le\pi/2\right\}$ достаточно малого радиуса δ, огибающей точку $\zeta=0$ по часовой стрелке, и отрезка мнимой оси от точки i до $-i$ с изъятым диаметром полуокружности C_δ, найдем

$$I_1+\left(\int_i^{i\delta}+\int_{C_\delta}+\int_{-i\delta}^{-i}\right)\varphi_1(\zeta,\xi)\,d\zeta=2\pi i\operatorname*{Res}_{\zeta=\xi}\varphi_1(\zeta,\xi),\quad (14)$$

где второй и четвертый интегралы берутся по соответствующим отрезкам мнимой оси. Выполняя необходимые вычисления, находим, что

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=\xi}\varphi_1(\zeta,\xi)=r_1(\zeta,\xi)\omega_{2n+1}(\xi),\quad r_1(\zeta,\xi)=\frac{s(1+\xi^2)^{s-1}(1-\xi^2)}{4\xi^2}.$$

Исследуем интеграл по полуокружности C_δ. Положив $\zeta=\delta e^{i\varphi}$, получим

$$\int\limits_{C_\delta}\varphi_1(\zeta,\xi)d\zeta=\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{(\xi^2+1)^s(\delta e^{i\varphi})^s-\left((\delta e^{i\varphi})^2+1\right)^s\xi^s}{\left((\delta e^{i\varphi})^2-\xi^2\right)^2}(\delta e^{i\varphi})^{1-s}\omega_{2n+1}(\delta e^{i\varphi})i\delta e^{i\varphi}d\varphi.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\delta\to0$, будем иметь

$$\int\limits_{C_\delta}\varphi_1(\zeta,\xi)d\zeta\sim\frac{2i\alpha^{2n}\xi^{s-4}}{2-s}\sin\frac{\pi s}{2}\delta^{2-s},\quad \delta\to0.$$

Последнее означает, что при $0<s<2$ интеграл по полуокружности C_δ при стягивании радиуса δ в точку стремится к нулю. Таким образом, в выражении (14) при $0<s<2$ и $\delta\to0$ будем иметь

$$I_1=\left(\int\limits_{-i}^{0}+\int\limits_{0}^{i}\right)\frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s-(\zeta^2+1)^s\xi^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\omega_{2n+1}(\zeta)d\zeta+2\pi i r_1(\zeta,\xi)\omega_{2n+1}(\xi).$$

В первом интеграле выполним замену $\zeta\sim-\zeta$. Тогда

$$I_1=\xi^s\left(-1-(-1)^{1-s}\right)\int\limits_0^i\frac{(1+\zeta^2)^s\zeta^{1-s}}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\omega_{2n+1}(\zeta)d\zeta+2\pi i r_1\omega_{2n+1}(\xi).$$

Положив теперь $\zeta=it$, придем к выражению

$$I_1=-\xi^s i^{2-s}\left(-1-(-1)^{1-s}\right)\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(t^2+\xi^2)^2}\chi_{2n+1}(t)dt+2\pi i r_1\omega_{2n+1}(\xi),$$

где $\chi_{2n+1}(t)$ из (10). Заметив, что

$$i^{1-s}\left(-1-(-1)^{1-s}\right)=-2\cos\frac{\pi(1-s)}{2}=-2\sin\frac{\pi s}{2},$$

окончательно получим

$$I_1=2i\xi^s\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(t^2+\xi^2)^2}\chi_{2n+1}(t)dt+2\pi i r_1\omega_{2n+1}(\xi). \tag{15}$$

Рассуждая аналогичным образом, для интеграла I_2 находим, что

$$I_2=(-1)^{n+1}2i\xi^s\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(t^2+\xi^2)^2}\chi_{2n+1}(t)dt+2\pi i r_1\omega_n(\xi). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_3. Его подынтегральная функция

$$\varphi_3(\zeta,\xi)=\frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s-(\zeta^2+1)^s\xi^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\overline{\omega_n(\zeta)}$$

является аналитической в области $\mathfrak{D}=\{\zeta:|\zeta|>1,\ \mathfrak{Re}\zeta>0\}$, а на бесконечности имеет нуль порядка $3-s$, $0<s<2$. Применяя к I_3 теорему Коши о вычетах, находим, что

$$\int_{+i\infty}^{i}\varphi_3(\zeta,\xi)d\zeta - I_3 + \int_{-i}^{-i\infty}\varphi_3(\zeta,\xi)d\zeta = 0,$$

где первый и третий интегралы взяты вдоль соответствующих лучей мнимой оси. Следовательно,

$$I_3 = \left(\int_{+i\infty}^{i} + \int_{-i}^{-i\infty}\right)\frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s - (\zeta^2+1)^s\xi^s}{(\zeta^2-\xi^2)^2}\zeta^{1-s}\overline{\omega_n(\zeta)}d\zeta.$$

В интегралах справа выполним замену $\zeta \sim \zeta^{-1}$. Тогда

$$I_3 = \left(\int_{-i}^{0} + \int_{0}^{i}\right)\frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s - (\zeta^2+1)^s\xi^s}{(1-\xi^2\zeta^2)^2}\zeta^{1-s}\omega_n(\zeta)d\zeta.$$

Заменяя в первом интеграле $\zeta \sim -\zeta$, придем к выражению

$$I_3 = \xi^s\left(-1-(-1)^{1-s}\right)\int_0^i \frac{\zeta^{1-s}(1+\zeta^2)^s}{(1-\xi^2\zeta^2)^2}\omega_n(\zeta)d\zeta.$$

Полагая теперь $\zeta = it$, получим, что

$$I_3 = (-1)^{n+1}2\xi^s i\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1+t^2\xi^2)^2}\chi_n(t)dt. \tag{17}$$

Рассуждая аналогичным образом в отношении интеграла I_4, находим, что

$$I_4 = 2\xi^s i\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1+t^2\xi^2)^2}\chi_{2n+1}(t)dt. \tag{18}$$

Подставляя теперь (15)–(18) в (13), будем иметь

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha) = \frac{1}{2^{s-1}\pi(n+1)\lambda(u)}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s}\chi_n(t)\left[\chi_{n+1}(t)\left(\frac{\xi^2}{(t^2+\xi^2)^2}\overline{\omega_{2n+1}(\xi)} + \frac{\xi^2}{(1+t^2\xi^2)^2}\omega_{2n+1}(\xi)\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\left(\frac{\xi^2}{(t^2+\xi^2)^2}\overline{\omega_n(\xi)} + \frac{\xi^2}{(1+t^2\xi^2)^2}\omega_n(\xi)\right)\right]dt, \quad x=\cos u. \tag{19}$$

Заметим, что выражения, находящиеся в круглых скобках последнего соотношения, представляют собой суммы двух взаимно комплексно сопряженных слагаемых, а значит, являются действительнозначными. Отыщем их. Имеем

$$\frac{\xi^2}{(t^2+\xi^2)^2}\overline{\omega_n(\xi)} + \frac{\xi^2}{(1+t^2\xi^2)^2}\omega_n(\xi) = \frac{2\cos\psi_n}{1+2t^2\cos 2u + t^4},$$

а также

$$\frac{\xi^2}{(t^2+\xi^2)^2}\overline{\omega_{2n+1}(\xi)} + \frac{\xi^2}{(1+t^2\xi^2)^2}\omega_{2n+1}(\xi) = \frac{2\cos\left(\psi_n + \arg\omega_{n+1}(\xi)\right)}{1+2t^2\cos 2u + t^4},$$

где ψ_n определено в (11). Из (19) и последних соотношений следует (9).

Для исследования выражения (9) мы полагали, что $x \in (0,1)$. Однако из свойств четности функции $|x|^s$ и средних Валле Пуссена $V_{4n}(|\cdot|^s, x)$ следует, что соотношение (9) справедливо также и при $x \in (-1,0)$. Справедливость равенства (9) в точках $x = \pm 1$ и $x = 0$ следует из непрерывности левой и правой части неравенства относительно переменной x на $[-1,1]$. Теорема 3 доказана полностью.

Т е о р е м а 4. *При выполнении условий теоремы* 3 *имеет место оценка*

$$
\left|\varepsilon_{4n}(x,\alpha)\right| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)\lambda(u)} \sin\frac{\pi s}{2} \times
$$

$$
\times \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}\sqrt{1+2(-1)^n \chi_{n+1}(t) M_{2n+2}(x) + \chi_{n+1}^2(t)}}{1+2t^2\cos 2u + t^4} \left|\chi_n(t)\right| dt, \quad x \in [-1,1], \tag{20}
$$

где $M_{2n+2}(x)$ – рациональная дробь Чебышева – Маркова порядка $2n+2$. *Неравенство* (20) *является точным в том смысле, что если полюсы имеют четную кратность, то равенство достигается при* $x = 0$, *а также на концах отрезка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим квадратную скобку в подынтегральном выражении равенства (9). Используя хорошо известное неравенство

$$
|a\cos t + b\sin t| \le \sqrt{a^2+b^2}, \quad a,b \in \mathbb{R},
$$

находим, что

$$
|\chi_{n+1}(t)\cos\left(\varphi_n + \arg\omega_{n+1}(\xi)\right) + (-1)^n \cos\varphi_n| =
$$

$$
= |\cos\varphi_n\left(\chi_{n+1}(t)\cos\arg\omega_{n+1}(\xi) + (-1)^n\right) - \sin\varphi_n \chi_{n+1}(t)\sin\arg\omega_{n+1}(\xi)| \le
$$

$$
\le \sqrt{1+2(-1)^n\chi_{n+1}(t)\cos\arg\omega_{n+1}(\xi) + \chi_{n+1}^2(t)}.
$$

С учетом последнего неравенства в (9) приходим к оценке

$$
|\varepsilon_{4n}(x,\alpha)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)\lambda(u)} \sin\frac{\pi s}{2} \times
$$

$$
\times \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1+2t^2\cos 2u + t^4} \sqrt{1+2(-1)^n\chi_{n+1}(t)\cos\arg\omega_{n+1}(\xi) + \chi_{n+1}^2(t)}\, |\chi_n(t)|\, dt. \tag{21}
$$

Заметив теперь, что при $\xi = e^{iu}$, $x = \cos u$ и $n = 0,1,\ldots$

$$
\cos\arg\omega_{n+1}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\alpha^2\xi^2}{\xi^2+\alpha^2}\right)^{n+1}\right) = M_{2n+2}(x)
$$

– рациональная дробь Чебышева – Маркова степени $2n+2$, из (21) приходим к (20). Для доказательства второго утверждения теоремы подставим в оценку (20) при четных n значения $x = 0$ и $x = \pm 1$. Имеем

$$
|\varepsilon_{2n}(0,\alpha)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)} \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \sin\frac{\pi s}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1} \frac{1-\chi_{n+1}(t)}{1-t^2} \chi_n(t)\, dt,
$$

$$
|\varepsilon_{2n}(\pm 1,\alpha)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)} \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \sin\frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1+t^2)^2} \left(1+\chi_{n+1}(t)\right)\chi_n(t)\, dt.
$$

Подставляя аналогичные значения в (9), находим, что последние неравенства обращаются в равенства. Теорема 4 доказана.

3. Исследование приближений суммами Валле Пуссена в полиномиальном случае. Теоремы 2 и 3 позволяют исследовать приближения функции $|x|^s$ на отрезке [–1,1] средними Валле Пуссена при любом значении $s > 0$, ограничиваясь лишь достаточно высокой степенью n.

В соотношении (9) положим $\alpha = 0$. Тогда $\varepsilon_{4n}(x,0) = \varepsilon_{4n}(x)$ – есть приближения функции $|x|^s$, $s/2 < n+1$, на отрезке [–1,1] средними Валле Пуссена рядов Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода. Тогда

$$\varepsilon_{4n}(x) = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{2n+1-s}}{1+2t^2\cos 2u+t^4}\left[t^{2n+2}\cos\left(\psi_n^{(0)}+2(n+1)u\right)+(-1)^n\cos\psi_n^{(0)}\right]dt, \tag{22}$$

где

$$\psi_n^{(0)} = \psi_n(x,t,0) = 2\arg\frac{\xi}{1+t^2\xi^2}+2un, \quad x=\cos u.$$

Справедлива

Т е о р е м а 5. *Для приближений функции* $|x|^s$, $s>0$, $s/2<n+1$, *на отрезке* [–1,1] *средними Валле Пуссена полиномиального ряда Фурье – Чебышева имеет место оценка*

$$|\varepsilon_{4n}(x)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{2n+1-s}\sqrt{1+2(-1)^n t^{2n+2}T_{2n+2}(x)+t^{4n+4}}}{1+2t^2\cos 2u+t^4}dt, \tag{23}$$

где $T_{2n+2}(x)$ *– многочлен Чебышева первого рода степени* $2n+2$, $x=\cos u$, $\xi = e^{iu}$. *Оценка* (23) *точна. Равенство достигается при* $x = 0$, *а также на концах отрезка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться равенством (22) и рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 4.

Положим

$$\varepsilon_{4n} = \|\varepsilon_{4n}(x)\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1}|\varepsilon_{4n}(x)|.$$

С одной стороны, из (22) находим, что

$$|\varepsilon_{4n}(0)| = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{t^{2n}-t^{4n+2}}{1-t^2}dt, \quad n+1>\frac{s}{2}. \tag{24}$$

С другой стороны, воспользовавшись (3), получим

$$\max_{-1\le x\le 1}|\varepsilon_{4n}(x)| = \max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left(|x|^s - s_{2k}(|x|^s,x)\right)\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left\||x|^s - s_{2k}(|x|^s,x)\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left|\delta_{2k}(0)\right|, \tag{25}$$

где $\delta_{2k}(x) = |x|^s - s_{2k}(|x|^s,x)$ – приближения функции $|x|^s$, $s>0$, на отрезке [–1,1] частичными суммами ряда Фурье – Чебышева. Известно [20], что

$$\left|\delta_{2k}(0)\right| = \frac{1}{2^{s-2}\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}t^{2k}dt, \quad s>0, \quad s/2\le n+1, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Подставив последнее соотношение в (25), найдем

$$\max_{-1\le x\le 1}|\varepsilon_{4n}(x)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\sum_{k=n}^{2n}t^{2k}dt = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{t^{2n}-t^{4n+2}}{1-t^2}dt.$$

Из последнего неравенства и соотношения (24) следует, что

$$\varepsilon_{4n} = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left|\int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{t^{2n}-t^{4n+2}}{1-t^2}dt\right|, \quad n+1>\frac{s}{2}. \tag{26}$$

Справедлива

Т е о р е м а 6. *Пусть* $s > 0$, $n + 1 > s/2$. *Для величины* ε_{4n} *имеет место асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_{4n} \sim \frac{1}{\pi}\begin{cases} \dfrac{2^{1-s}-1}{2^{s-1}(1-s)}\left|\sin\dfrac{\pi s}{2}\right|\dfrac{\Gamma(s)}{(n+1)^s}, & s\in(0,1), \\ \dfrac{\ln 2}{n+1}, & s=1, \\ \dfrac{2^{s-1}-1}{2^{2s-2}}\left|\sin\dfrac{\pi s}{2}\right|\dfrac{\Gamma(s-1)}{(n+1)^s}, & s>1, \end{cases} \quad n\to\infty, \tag{27}$$

где $\Gamma(s)$ – *гамма-функция Эйлера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем интеграл в (26). Запишем

$$I_5 = \int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{t^{2n}-t^{4n+2}}{1-t^2}dt, \quad n+1>\frac{s}{2}. \tag{28}$$

Далее будем различать случаи. Пусть $s\in(0,1]$. Тогда воспользуемся методом, предложенным в [21]. Продифференцируем последний интеграл по параметру n. Имеем

$$\frac{\partial I_5}{\partial n} = 2I_6 - 4I_7, \tag{29}$$

где

$$I_6 = \int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{e}^{2n\ln t}dt, \quad I_7 = \int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{e}^{(4n+2)\ln t}dt.$$

Для исследования асимптотического поведения интегралов I_6 и I_7 применим метод Лапласа [22–24]. Функция $\ln t$ возрастает в промежутке $0 < t < 1$ и, следовательно, достигает своего максимального значения при $t = 1$. Используя разложения $\ln t = (t-1) + o(t-1)$ и

$$\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{\ln t}{1-t^2} \sim -2^{s-2}\left(1-t\right)^{s-1},$$

справедливые при $t \to 1$, находим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$I_6 \sim -2^{s-2}\int_{1-\varepsilon}^1 (1-t)^{s-1}\mathrm{e}^{2n(t-1)}dt, \quad I_7 \sim -2^{s-2}\int_{1-\varepsilon}^1 (1-t)^{s-1}\mathrm{e}^{(4n+2)(t-1)}dt.$$

В последних интегралах выполним замену $1 - t \sim u$. Тогда

$$I_6 \sim -2^{s-2}\int_0^\varepsilon u^{s-1}\mathrm{e}^{-2nu}du, \quad I_7 \sim -2^{s-2}\int_0^\varepsilon u^{s-1}\mathrm{e}^{-(4n+2)u}du.$$

Положив теперь в интегралах I_6 и I_7 соответственно $2nu = t$ и $(4n + 2)u = t$, при $n \to \infty$ находим

$$I_6 \sim -2^{s-2}\frac{\Gamma(s)}{(2n)^s}, \quad I_7 \sim -2^{s-2}\frac{\Gamma(s)}{(4n+2)^s}.$$

Следовательно, в соотношении (29) будем иметь

$$\frac{\partial I_5}{\partial n} \sim -\frac{1}{2}\Gamma(s)\left[\frac{1}{n^s} - \frac{2}{(2n+1)^s}\right], \quad n \to \infty.$$

Теперь, чтобы прийти к асимптотике интеграла I_5, необходимо в последнем асимптотическом равенстве произвести интегрирование по параметру n. Тогда при $n \to \infty$ для интеграла I_5 имеем

$$I_5 \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-s}-1}{2(1-s)(n+1)^{s-1}}\Gamma(s) + C_1, & s \in (0,1), \\ \dfrac{1}{2}\ln 2, & s = 1, \end{cases} \tag{30}$$

где C_1 – некоторая константа, не зависящая от n.

Пусть теперь $s > 1$ при выполнении условий $n + 1 > s/2$. Тогда в (28) получим

$$I_5 = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-2}}{t^{s-1}} t^{2n} dt - \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-2}}{t^{s-1}} t^{4n+2} dt, \quad n+1 > \frac{s}{2}.$$

Применяя методики исследования подобных интегралов, находим, что

$$I_5 \sim \frac{1}{2}\Gamma(s-1)\left[1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right]\frac{1}{(n+1)^{s-1}}, \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Из (30) и (31) приходим к (27). Теорема 6 доказана.

4. Равномерная оценка приближений средними Валле Пуссена в общем случае. Справедлива

Т е о р е м а 7. *При* $n \in \mathbb{N}$, $0 < s < 2$ *и* $0 \le \alpha < 1$ *для приближений функции* $|x|^s$ *на отрезке* $[-1,1]$ *средними Валле Пуссена в рациональном случае имеет место равномерная оценка*

$$\varepsilon_{4n}(\alpha) \le \varepsilon_{4n}^*(\alpha), \tag{32}$$

где

$$\varepsilon_{4n}^*(\alpha) = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\left[I_8 + I_9\right], \tag{33}$$

$$I_8 = \beta\int_\alpha^1 (1-t^2)^{s-1} t^{1-s}\frac{\chi_n(t) - \chi_{2n+1}(t)}{1-t^2}dt, \quad I_9 = \frac{1}{\beta}\int_0^\alpha \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1+t^2)^2}\left(|\chi_n(t)| - |\chi_{2n+1}(t)|\right)dt,$$

$\chi_n(t)$ *из* (10), $\beta = (1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что частичные суммы (1) точные для единицы, а также принимая во внимание соотношение (3), величину (7) представим в виде

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\delta_{2k}(x,\alpha), \tag{34}$$

где $\delta_{2k}(x,\alpha)$ – есть погрешность приближений функции $|x|^s$ на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами рационального ряда Фурье – Чебышева. Известно, что для величины $\delta_{2k}(x,\alpha)$ имеет место представление

$$\delta_{2n}(x,\alpha)=\frac{(-1)^n}{\pi 2^{s-2}}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\chi_n(t)\cos\eta_n\,dt,$$

$$\eta_n=\eta_n(x,t,\alpha)=\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+t^2\xi^2}+n\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}.$$

Тогда в (34) находим

$$\varepsilon_{4n}(x,\alpha)=\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\sum_{k=n}^{2n}(-1)^k\chi_k(t)\cos\eta_k\,dt,\quad x=\cos u.$$

Из последнего соотношения нетрудно получить, что

$$|\varepsilon_{4n}(x,\alpha)|\le\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\sum_{k=n}^{2n}|\chi_k(t)|\,dt,\quad x=\cos u,\ 0<s<2.$$

Заметив, что $\cos 2u=2x^2-1,$ будем иметь

$$\left|\varepsilon_{4n}(x,\alpha)\right|\le\frac{1-\alpha^2}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^{s-1}t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2}\sqrt{\frac{1+A^2x^2}{1+T^2x^2}}\sum_{k=n}^{2n}|\chi_k(t)|\,dt,\tag{35}$$

где $A=2\alpha/(1-\alpha^2),$ $T=2t/(1-t^2).$ Рассмотрим функцию

$$\gamma(x)=\sqrt{\frac{1+A^2x^2}{1+T^2x^2}}.$$

Поскольку

$$\gamma'(x)=\frac{x(A^2-T^2)}{\sqrt{(1+A^2x^2)(1+T^2x^2)^2}},$$

то при $0<t<\alpha$ функция $\gamma(x)$ возрастает, а значит, достигает максимального значения при $x=1$, что соответствует значению параметра $u=0$. В то же время при $\alpha<t<1$ функция $\gamma(x)$ убывает и, значит, ее максимальное значение будет уже при $x=0$, что соответствует значению параметра $u=\pi/2$. Тогда, разбивая интеграл в правой части (35) на два интеграла по промежуткам $[0,\alpha]$ и $[\alpha,1]$, найдем

$$\varepsilon_{4n}(\alpha)\le\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi s}{2}\left[(1-\alpha^2)\int_a^1\frac{(1-t^2)^{s-1}t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2}\sum_{k=n}^{2n}\chi_k(t)\,dt+(1+\alpha^2)\int_0^a\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1-\alpha^2t^2)(1+t^2)}\sum_{k=n}^{2n}|\chi_k(t)|\,dt\right],$$

где величина $\varepsilon_{4\pi}(\alpha)$ определена в (8). Заметив, что суммы в каждом из интегралов представляют собой геометрические прогрессии с соответствующими знаменателями, получим

$$\varepsilon_{4n}(\alpha)\le\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi s}{2}\left[\beta\int_a^1(1-t^2)^{s-1}t^{1-s}\,\frac{\chi_n(t)-\chi_{2n+1}(t)}{1-t^2}dt+\frac{1}{\beta}\int_0^a\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1+t^2)^2}\big(|\chi_n(t)|-|\chi_{2n+1}(t)|\big)dt\right].$$

Из последнего соотношения приходим к (32). Теорема 7 доказана.

5. Асимптотика равномерной оценки приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$. Исследуем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины (33). С этой целью в интегралах I_8 и I_9 выполним замену переменного интегрирования по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du \big/ \left((1+u)\sqrt{1-u^2}\right)$. Тогда

$$\varepsilon^*_{4n}(\alpha) = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\frac{\pi s}{2} \left[I_8 + I_9 \right], \tag{36}$$

где

$$I_8 = \beta \int_0^\beta \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} \left[\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n - \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{2n+1} \right] \frac{du}{u}, \quad I_9 = \frac{1}{\beta} \int_\beta^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}} \left[\left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^n - \left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^{2n+1} \right] du.$$

Изучим асимптотическое поведение при $n \to \infty$ каждого из интегралов I_8 и I_9 по отдельности. Для этого воспользуемся методом Лапласа [22–24]. Следующая теорема дает асимптотическое представление для величины (36).

Т е о р е м а 8. *Для мажоранты равномерной оценки приближений функции* $|x|^s$, $0 < s < 2$, *на отрезке* $[-1,1]$ *средними Валле Пуссена при* $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon^*_{4n}(\alpha) \sim \frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \begin{cases} \dfrac{\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{1-s} \left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^s + \dfrac{(1-\beta^2)^{1-\frac{s}{2}}}{4(\beta n)^{2-\frac{s}{2}}} \left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right), & s \in (0,1), \\ \dfrac{\beta \ln 2}{2n} + \dfrac{\sqrt{\pi(1-\beta^2)}}{4(\beta n)^{3/2}} \left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n, & s = 1, \\ \Gamma(s-1)\left(1-\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^s + \dfrac{(1-\beta^2)^{1-\frac{s}{2}}}{4(\beta n)^{2-\frac{s}{2}}} \left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right), & s \in (1,2), \end{cases} \tag{37}$$

где $\Gamma(s)$ *– гамма-функция Эйлера,* $\beta = (1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$, $0 \le \alpha < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в у теоремы 8 предпошлем две леммы. Так, для интеграла I_8 имеет место

Л е м м а 2. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_8 \sim \begin{cases} \dfrac{\beta^s \Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{(1-s)\left(2(n+1)\right)^{s-1}} + C_2, & s \in (0,1), \\ \beta \ln 2, \quad s = 1, & n \to \infty, \\ \dfrac{\beta^s \Gamma(s-1)}{\left(2(n+1)\right)^{s-1}} \left(1 - \dfrac{1}{2^{s-1}}\right), & s \in (1,2), \end{cases} \tag{38}$$

где $\Gamma(s)$ *– гамма-функция Эйлера,* C_2 *– некоторая постоянная, не зависящая от n и* β.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем различать случаи. Пусть $s \in (0,1]$. Тогда продифференцировав интеграл I_8 по параметру n, находим, что

$$\frac{\partial I_8}{\partial n} = \beta\left(I_{10} - 2I_{11}\right), \tag{39}$$

где

$$I_{10} = \int_0^\beta \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} e^{nS(u)} \ln\frac{\beta-u}{\beta+u} \frac{du}{u}, \quad I_{11} = \int_0^\beta \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} e^{(2n+1)S(u)} \ln\frac{\beta-u}{\beta+u} \frac{du}{u}, \quad S(u) = \ln\frac{\beta-u}{\beta+u}.$$

Функция $S(u)$ монотонно убывает при $0 < u < \beta$, поскольку $S'(u) = -2\beta/(\beta^2 - u^2) < 0$, и, значит, достигает максимума при $u = 0$. Используя разложения $S(u) = -2u/\beta + o(u)$ и

$$\frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}}\frac{1}{u}\ln\frac{\beta-u}{\beta+u} \sim -\frac{2}{\beta}u^{s-1},$$

справедливые при $u \to 0$, при произвольно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ находим, что

$$I_{10} \sim -\frac{2}{\beta}\int_0^{\varepsilon} u^{s-1}\mathrm{e}^{-2un/\beta}du, \quad I_{11} \sim -\frac{2}{\beta}\int_0^{\varepsilon} u^{s-1}\mathrm{e}^{-2u(2n+1)/\beta}du.$$

Положив теперь в первом из них $2un/\beta = u$, а во втором – $2u(2n + 1)/\beta = u$, будем иметь

$$I_{10} \sim -\frac{2}{\beta}\left(\frac{\beta}{2n}\right)^s \int_0^{2n\varepsilon/\beta} u^{s-1}\mathrm{e}^{-u}du, \quad I_{11} \sim -\frac{2}{\beta}\left(\frac{\beta}{2(2n+1)}\right)^s \int_0^{2(2n+1)\varepsilon/\beta} u^{s-1}\mathrm{e}^{-u}du, \quad n \to \infty.$$

Откуда окончательно получим

$$I_{10} \sim -\frac{2}{\beta}\left(\frac{\beta}{2n}\right)^s \Gamma(s), \quad I_{11} \sim -\frac{2}{\beta}\left(\frac{\beta}{2(2n+1)}\right)^s \Gamma(s), \quad n \to \infty.$$

Возвращаясь к соотношению (39), найдем

$$\frac{\partial I_8}{\partial n} \sim 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^s \Gamma(s)\left[\frac{2}{(2n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\right], \quad n \to \infty.$$

Для получения асимптотического выражения интеграла I_8 при $s \in (0,1]$, проинтегрируем последнее соотношение по параметру n. Тогда при $n \to \infty$ приходим к асимптотическому равенству

$$I_8 \sim \begin{cases} \dfrac{\beta^s\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{(1-s)\big(2(n+1)\big)^{1-s}} + C_2, & s \in (0,1), \\ \beta\ln 2, & s = 1, \end{cases} \tag{40}$$

где C_2 – некоторая константа, не зависящая от n и β.

Рассмотрим теперь случай, когда $s \in (1,2)$. Тогда интеграл I_8 можно переписать в виде

$$I_8 = \beta\int_0^{\beta}\frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}}\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n du - \beta\int_0^{\beta}\frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}}\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{2n+1} du.$$

Применяя для исследования асимптотического поведения интегралов в последнем соотношении используемые ранее методики, находим, что

$$I_8 \sim \frac{\beta^s\Gamma(s-1)}{\big(2(n+1)\big)^{s-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right), \quad s \in (1,2), \ n \to \infty. \tag{41}$$

Из асимптотических соотношений (40) и (41) немедленно следует (37). Лемма 2 доказана.

Займемся теперь интегралом I_9. Имеет место

Л е м м а 3. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_9 \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\dfrac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2}\Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right), & s \neq 1, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\beta}\left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\sqrt{\dfrac{1-\beta^2}{\beta(n+1)}}, & s = 1, \quad n \to \infty. \end{cases} \tag{42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем интеграл I_9 в виде

$$I_9 = \frac{1}{\beta}\int_{\beta}^{1} \frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}} \left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^n \left[1-\left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^{n+1}\right] du.$$

При $n \to \infty$ величина в квадратных скобках подынтегрального выражения стремится к единице. Из сказанного следует, что

$$I_9 \sim \frac{1}{\beta}\int_{\beta}^{1} \frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}} \left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^n du, \quad n \to \infty.$$

В последнем интеграле выполним замену переменного по формуле $u = \cos\theta$. Тогда

$$I_9 \sim \frac{1}{\beta}\int_{0}^{\arccos\beta} \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta \, e^{nS(\theta)} d\theta, \quad S(\theta) = \ln\frac{\cos\theta-\beta}{\cos\theta+\beta}, \quad n \to \infty.$$

Для исследования асимптотики интеграла справа воспользуемся методом Лапласа [22–24]. Функция $S(\theta)$ убывает при $0 < u < \arccos\beta$, поскольку $S'(\theta) = -2\beta\sin\theta / (\cos^2\theta - \beta^2) < 0$, а значит, достигает своего максимального значения при $\theta = 0$. Раскладывая функцию $S(\theta)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta = 0$, находим, что

$$S(\theta) = \ln\frac{1-\beta}{1+\beta} - \frac{\beta}{1-\beta^2}\theta^2 + o(\theta^2), \quad \theta \to 0.$$

Учитывая также, что при $\theta \to 0$ будет $\cos^s\theta \sin^{1-s}\theta \sim \theta^{1-s}$, при произвольно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ найдем

$$I_9 \sim \frac{1}{\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \int_0^{\varepsilon} \theta^{1-s} \exp\left(-\frac{\beta n\theta^2}{1-\beta^2}\right) d\theta, \quad n \to \infty.$$

В последнем интеграле выполним замену переменного по формуле $\beta n\theta^2 / (1-\beta^2) \sim \theta^2$. Тогда

$$I_9 \sim \frac{1}{\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2} \int_0^{\varphi(n,\varepsilon)} \theta^{1-s} e^{-\theta^2} d\theta, \quad n \to \infty,$$

где $\varphi(n,\varepsilon) = \sqrt{n\beta / (1-\beta^2)}\varepsilon \to +\infty$ при $n \to \infty$. Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \theta^{1-s} e^{-\theta^2} d\theta = -\frac{s}{4}\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right),$$

окончательно находим

$$I_9 \sim \frac{1}{2\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2} \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right), \quad n \to \infty.$$

Из последнего соотношения при различных $s, 0 < s < 2$, придем к асимптотической оценке (42). Лемма 3 доказана.

Теперь для доказательства теоремы 8 достаточно применить результаты лемм 2 и 3 к соотношению (36). Это завершает ее доказательство.

6. О порядковой оценке приближений средними Валле Пуссена. В разделе 5 нами было найдено асимптотическое представление для равномерной оценки приближений средними Валле Пуссена функции $|x|^s$, $0<s<2$. Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (37) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра $\beta=\beta^*$, другими словами – искать оценку наилучшего равномерного приближения функции $|x|^s$, $0<s<2$, средними Валле Пуссена.

Положим

$$\varepsilon_{4n}^{(*)}=\inf_{0\le\alpha<1}\varepsilon_{4n}^{(*)}(\alpha),\quad \varepsilon_{4n}=\inf_{0\le\alpha<1}\varepsilon_{4n}(\alpha).$$

Для реализации поставленной задачи будем следовать схеме, предложенной в [25].

Т е о р е м а 9. *Для любого* $0<s<2$ *при* $n\to\infty$ *справедливы асимптотические соотношения:*

$$1)\ \varepsilon_{4n}\le\varepsilon_{4n}^{(*)}\sim\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\dfrac{2^{1-s}-1}{1-s}\Gamma(s)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}, & s\in(0,1),\\[2mm] \dfrac{\ln 2}{\pi}\cdot\dfrac{\ln n}{n^2}, & s=1,\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\left(1-\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\Gamma(s-1)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}, & s\in(1,2),\end{cases}$$

$$2)\ \varepsilon_{4n}\sim\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\dfrac{2^{1-s}-1}{1-s}\Gamma(s)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}, & s\in(0,1),\\[2mm] \dfrac{\ln 2}{\pi}\cdot\dfrac{\ln n}{n^2}, & s=1,\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\left(1-\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\Gamma(s-1)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}, & s\in(1,2),\end{cases}\qquad \text{если } n \text{ четное.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства первого утверждения теоремы при известном s, $0<s<2$, в соотношении (37) положим

$$\beta=\beta^*=\frac{s\ln n}{n}. \tag{43}$$

Тогда, учитывая, что

$$\left(\frac{1-s\ln n/n}{1+s\ln n/n}\right)^n\sim\frac{1}{n^{2s}},\quad n\to\infty,$$

при $n\to\infty$ получим

$$\varepsilon_{4n}^*(\alpha^*)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\dfrac{2^{1-s}-1}{1-s}\Gamma(s)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}+o\left(\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}\right), & s\in(0,1),\\[2mm] \dfrac{\ln 2}{\pi}\cdot\dfrac{\ln n}{n^2}+o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right), & s=1,\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\left(1-\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\Gamma(s-1)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}+o\left(\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}\right), & s\in(1,2),\end{cases} \tag{44}$$

где $\alpha^*=\sqrt{(1-\beta^*)/(1+\beta^*)}$.

Для того чтобы показать, что именно при $\beta=\beta^*$ величина $\varepsilon_{4n}^*(\alpha)$ имеет асимптотически минимальное значение, достаточно воспользоваться методом, рассмотренным в [19, теорема 6] (см. также [25]). Из сказанного следует первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения теоремы воспользуемся оценкой (20), а именно тем фактом, что при четных n она точна в точке $x = 0$. Следовательно,

$$|\varepsilon_{4n}(0,\alpha)| = \frac{\beta}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 (1-t^2)^{s-1}t^{1-s}\chi_n(t)\frac{1-\chi_{n+1}(t)}{1-t^2}dt.$$

Замена переменного $t^2 = (1-u)/(1+u),\ \ dt = -du\Big/\left((1+u)\sqrt{1-u^2}\right)$ приводит последний интеграл к виду

$$|\varepsilon_{4n}(0,\alpha)| = \frac{\beta}{\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}}\left(\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n - \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{2n+1}\right)\frac{du}{u}.$$

Разобьем интеграл справа на два интеграла по промежуткам $[0,\beta]$ и $[\beta,1]$. Затем к первому из них применим результаты леммы 2, а во втором используем методики асимптотического исследования, примененные в лемме 3. В результате придем к асимптотическому соотношению при $n \to \infty$

$$|\varepsilon_{4n}(0,\alpha)| \sim \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases} \dfrac{\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{1-s}\left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^s + \dfrac{\beta(1-\beta^2)^{1-\frac{s}{2}}}{4(\beta n)^{2-\frac{s}{2}}}\left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right), & s\in(0,1), \\ \dfrac{\beta\ln 2}{2n} + \dfrac{\beta\sqrt{\pi(1-\beta^2)}}{4(\beta n)^{3/2}}\left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n, & s = 1, \\ \Gamma(s-1)\left(1-\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^s + \dfrac{\beta(1-\beta^2)^{1-\frac{s}{2}}}{4(\beta n)^{2-\frac{s}{2}}}\left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right), & s\in(1,2). \end{cases}$$

Положив в найденном асимптотическом соотношении оптимальное β^* из (43), получим

$$|\varepsilon_{4n}(0,\alpha^*)| = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\dfrac{2^{1-s}-1}{1-s}\Gamma(s)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}} + o\left(\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}\right), & s\in(0,1), \\ \dfrac{\ln 2}{\pi}\cdot\dfrac{\ln n}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right), & s=1, \\ \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^s\left(1-\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\Gamma(s-1)\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}} + o\left(\dfrac{\ln^s n}{n^{2s}}\right), & s\in(1,2), \end{cases} \qquad n\to\infty.$$

То есть асимптотическая оценка (44) достижима в точке $x = 0$ при условии четности n, а это означает, что в данном случае она является нормой уклонений средних Валле Пуссена от функции $|x|^s,\ 0 < s < 2,$ следовательно, справедливо второе утверждение теоремы 9. Доказательство теоремы 9 завершено.

З а м е ч а н и е 3. При изучении приближений функции $|x|$ на отрезке [–1,1] посредством частичных сумм ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова [19], оптимальным было значение параметра $\beta^* = \ln n/n$. Из (43) следует, что оно также является оптимальным и в случае приближений функции $|x|$ средними Валле Пуссена.

Заключение. Исследованы аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова (3) в приближениях функции $|x|^s,\ 0 < s < 2,$ на отрезке [–1,1]. Найдено интегральное представление приближений (9), точная оценка приближений в зависимости от положения точки $x \in [-1,1]$ (20), равномерная оценка (32) и ее асимптотическое представление при $n \to \infty$ (37). Установлено оптимальное значение параметра (43), обеспечивающее наибольшую скорость приближений средними Валле Пуссена (3) исследуемой функции (теорема 9). В данном случае скорость приближений является выигрышной в сравнении с полиномиальным случаем, что отражает особенности рациональной аппроксимации функций с особенностями.

Список использованных источников

1. Valleé Poussin, Ch. de La. Sur la meilleure approximation des function d'une variable reelle par des expressions d'ordre donne / Ch. de La Valleé Poussin // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I: Math. – 1918. – Vol. 166. – P. 799–802.

2. Valleé Poussin, Ch. de La. Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle / Ch. de La Valleé Poussin. – Paris, 1919. – 150 p.

3. Никольский, С. М. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами / С. М. Никольский // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. – 1940. – Т. 4, вып. 6. – С. 509–520.

4. Стечкин, С. Б. О суммах Валле Пуссена / С. Б. Стечкин // Докл. Акад. наук СССР. – 1951. – Т. 80, № 4. – С. 545–548.

5. Теляковский, С. А. Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена / С. А. Теляковский // Докл. Акад. наук СССР. – 1958. – Т. 121, № 3. – С. 426–429.

6. Ефимов, А. В. О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена / А. В. Ефимов // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. – 1959. – Т. 23, вып. 5. – С. 737–770.

7. Тиман, А. Ф. Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского / А. Ф. Тиман // Докл. Акад. наук СССР. – 1951. – Т. 81, № 4. – С. 509–511.

8. Ганзбург, И. М. Обобщение некоторых результатов С. М. Никольского и А. Ф. Тимана / И. М. Ганзбург // Докл. Акад. наук СССР. – 1957. – Т. 116, № 5. – С. 727–730.

9. Ганзбург, И. М. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами / И. М. Ганзбург, А. Ф. Тиман // Изв. Аакад. наук СССР. Сер. мат. – 1958. – Т. 22, вып. 6. – С. 771–810.

10. Оматаев, Т. О. О приближении непрерывных на отрезке функций усеченными суммами Влле Пуссена / Т. О. Оматаев // Изв. вузов. Мат. – 1977. – № 6. – С. 99–106.

11. Русак, В. Н. Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси / В. Н. Русак // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22. – № 3. – С. 375–380.

12. Русак, В. Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки / В. Н. Русак // Мат. сб. – 1985. – Т. 128, № 4. – С. 492–515.

13. Гриб, Н. В. Операторный метод приближения функций ограниченной вариации / Н. В. Гриб // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2015. – № 2. – С. 28–35.

14. Ровба, Е. А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля, рациональными операторами / Е. А. Ровба // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 6. – С. 18–22.

15. Смотрицкий, К. А. О приближении функций ограниченной вариации рациональными операторами на отрезке / К. А. Смотрицкий // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2005. – № 2. – С. 60–68.

16. Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени / С. Н. Бернштейн // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. – 1938 – Т. 2, вып. 2. – С. 169–190.

17 Varga, R. S. Some numerical results on best uniform rational approximation of x^a on [0,1] / R. S. Varga, A. J. Carpenter // Numer. Algorithms. – 1992. – Vol. 2, № 2. – P. 171–186. https://doi.org/10.1007/bf02145384

18. Райцин, Р. А. Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье – Чебышева / Р. А. Райцин // Изв. вузов. Мат. – 1980. – № 3. – С. 45–49.

19. Rouba, Y. On a system of rational Chebyshev–Markov fractions / Y. Rouba, P. Patseika, K. Smatrytski // Anal. Math. – 2018. – Vol. 44, № 1. – P. 115–140. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7

20. Поцейко, П. Г. Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции $|x|^s$ на отрезке [–1,1] / П. Г. Поцейко // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 22–38.

21. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 480 с.

22. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

23. Федорюк, М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. – М.: Либроком, 2015. – 544 с.

24. Copson, E. T. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No 55. Asymptotic Expansions / E. T. Copson. – Cambridge, 1965. – 124 p.

25. Ровба, Е. А. Константы в приближении функции $|x|$ интерполяционными рациональными процессами / Е. А. Ровба, Е. Г. Микулич // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 11–15.

References

1. Valleé Poussin Ch. de La. Sur la meilleure approximation des function d'une variable reelle par des expressions d'ordre donne. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Paris. Series I: Math.*, 1918, vol. 166, pp. 799–802.

2. Valleé Poussin Ch. de La. *Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*. Paris, 1919. 150 p.

3. Nikol'skii S. M. On some methods of approximation by trigonometric sums. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1940, vol. 4, no. 6, pp. 509–520 (in Russian).

4. Stechkin S. B. On the sums of Valle Poussin. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1951, vol. 80, no. 4, pp. 545–548 (in Russian).

5. Teliakovskii S. A. Approximation of differentiable functions by sums of Valle Poussin. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1958, vol. 121, no. 3, pp. 426–429 (in Russian).

6. Efimov A. V. On the approximation of periodic functions by sums of Valle Poussin. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1959, vol. 23, no. 5, pp. 737–770 (in Russian).

7. Timan A. F. A generalization of some results of A. N. Kolmogorov and S. M. Nikol'skii. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1951, vol. 81, no. 4, pp. 509–511 (in Russian).

8. Ganzburg I. M. A generalization of some results of S. M. Nikol'skii and A. F. Timan. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1957, vol. 116, no. 5, pp. 727–730 (in Russian).

9. Ganzburg I. M. Linear processes of approximation of functions satisfying the Lipschitz condition by algebraic polynomials. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1958, vol. 22, no. 6, pp. 771–810 (in Russian).

10. Omataev T. O. The approximation of functions that are continuous on a segment by truncated de la Vallée – Poussin sums. *Soviet Mathematics*, 1977, vol. 21, no. 6, pp. 78–83.

11. Rusak V. N. A method of approximation by rational functions on the real line. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1977, vol. 22, no. 3, pp. 699–702. https://doi.org/10.1007/bf02412498

12. Rusak V. N. Sharp order estimates for best rational approximations in classes of functions representable as convolutions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1987, vol. 56, no. 2, pp. 491–513.

13. Grib N. V. Operator method for approximation of bounded variation functions. *Vestsi BDPU. Seryya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya = BSPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography*, 2015, no. 2, pp. 28–35 (in Russian).

14. Rovba E. A. Approximation of functions differentiable in the Riemann – Liouville sense by rational operators. *Doklady Akademii nauk Belarusi = Doklady of the Academy of Sciences of Belarus*, 1996, vol. 40, no. 6, pp. 18–22 (in Russian).

15. Smotritskii K. A. On the approximation of functions of bounded variation by rational operators on a segment. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaўnaga ўniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2005, no. 2, pp. 60–68 (in Russian).

16. Bernstein S. N. Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynomes de degres tre's eleves. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1938, vol. 2, no. 2, pp. 169–190 (in Russian).

17. Varga R. S., Carpenter A. J. Some numerical results on best uniform rational approximation of x^a on [0,1]. *Numerical Algorithms*, 1992, vol. 2, no. 2, pp. 171–186. https://doi.org/10.1007/bf02145384

18. Raitsin R. A. Asymptotic properties of uniform approximations of functions with algebraic singularities by partial sums of a Fourier–Chebyshev series. *Soviet Mathematics*, 1980, vol. 24, no. 3, pp. 45–49.

19. Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. On a system of rational Chebyshev–Markov fractions. *Analysis Mathematica*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 115–140. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7

20. Potseiko P. G. On one representation of the singular Jackson integral and approximation of a function $|x|^s$ on a segment [–1,1]. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaўnaga ўniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2019, vol. 9, no. 2, pp. 22–38 (in Russian).

21. Sidorov Iu. V., Fedoriuk M. V., Shabunin M. I. *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable.* Moscow, Nauka Publ., 1989. 480 p. (in Russian).

22. Evgrafov M. A. *Asymptotic estimates and entire functions*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian).

23. Fedoriuk, M. V. *Asymptotics. Integrals and Series*. Moscow, Librokom Publ., 1987. 544 p. (in Russian).

24. Copson E. T. *Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No 55. Asymptotic Expansions*. Cambridge, 1965. 124 p.

25. Rovba E. A., Mikulich E. G. Constants in the approximation of $|x|$ using the rational interpolation processes. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 6, pp. 11–15 (in Russian).

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – аспирант, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com

Information about the authors

Pavel G. Patseika – Postgraduate Student, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500

Yauhen A. Rouba – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodna, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com