ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.9
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-288-298

Поступила в редакцию 16.05.2019
Received 16.05.2019

Т. Г. Шагова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

САМОПОДОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНЕМОФУНКЦИИ И ИХ СВЯЗЬ С АНАЛИТИЧЕСКИМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Аннотация. Рассматриваются самоподобные рациональные мнемофункции, т. е. семейства функций вида $f(x/\varepsilon)$, где f – правильная рациональная функция, не имеющая полюсов на вещественной оси. Для самоподобных рациональных мнемофункций асимптотическое разложение в пространстве распределений выписывается в явном виде и асимптотическое разложение произведения таких мнемофункций однозначно определяется по разложениям сомножителей.

Разложение самоподобных рациональных мнемофункций на простейшие порождает представление ассоциированных распределений через граничные значения аналитических в верхней и нижней полуплоскостях функций. Оно действует наподобие классического аналитического представления Коши, однако имеет более сложную структуру, так как движение к границе осуществляется по наклонным направлениям. В данной работе описано правило умножения таких представлений, которые будем называть скошенными аналитическими представлениями.

Ключевые слова: самоподобная рациональная мнемофункция, аналитическое представление распределения, скошенное аналитическое представление

Для цитирования. Шагова, Т. Г. Самоподобные рациональные мнемофункции и их связь с аналитическим представлением распределений / Т. Г. Шагова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 288–298. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-288-298

T. R. Shahava

Belarusian State University, Minsk, Belarus

AUTOMODELING RATIONAL MNEMOFUNCTIONS AND THEIR LINK TO AN ANALYTICAL REPRESENTATION OF DISTRIBUTIONS

Abstract. Mnemofunctions of the form $f(x/\varepsilon)$, where f is the proper rational function without singularities on the real line, are considered in this article. Such mnemofunctions are called automodeling rational mnemofunctions. They possess the following fine properties: asymptotic expansions in the space of distributions can be written in explicit form and the asymptotic expansion of the product of such mnemofunctions is uniquely determined by the expansions of multiplicands.

Partial fraction decomposition of automodeling rational mnemofunctions generates the so-called sloped analytical representation of a distribution, i.e. the representation of a distribution by a jump of the boundary values of the functions analytical in upper and lower half-planes. Sloped analytical representation is similar to the classical Cauchy analytical representation, but its structure is more complicated. The multiplication rule of such representations is described in this article.

Keywords: automodeling rational mnemofunction, analytical representation of distribution, sloped analytical representation

For citation. Shahava T. R. Auotomodeling rational mnemofunctions and their link to an analytical representation of distributions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 288–298 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-288-298

Введение. Появление новых обобщенных функций, или мнемофункций, было вызвано тем, что в классической теории обобщенных функций (распределений) невозможно корректно определить операцию умножения. Основной подход к решению этой проблемы заключается в построении по заданному пространству распределений E дифференциальной алгебры G, элементы которой называют новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями, и вложения R: $E \to G$, что позволяет определить произведение произвольных распределений $f, g \in E$ как элемент алгебры G по формуле

$$f \otimes_R g = R(f)R(g) \in G. \tag{1}$$

Различные методы построения алгебр мнемофункций были предложены В. К. Ивановым [1], Ю. В. Егоровым [2], Э. Розингером [3] и др. Наибольший резонанс в этом направлении вызвали работы французского математика Ж. Ф. Коломбо [4]. Общий метод построения таких алгебр был описан А. Б. Антоневичем и Я. В. Радыно [5].

По своей конструкции мнемофункция представляет собой класс эквивалентных семейств гладких функций $f_\varepsilon(x)$, зависящих от малого положительного параметра ε. Если семейство f_ε сходится в $D'(\mathbb{R})$ к f, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}),$$

то говорят, что мнемофункция – класс эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащий f_ε – *ассоциирована с распределением* $f\in D'(\mathbb{R})$. Рассматриваются вложения R пространства распределений в алгебру мнемофункций, при которых распределению f ставится в соответствие мнемофункция $R(f)=f_\varepsilon$, ассоциированная с f.

Более детально связь мнемофункции и распределения устанавливается с помощью анализа асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle$, для которых часто в пространстве $D'(\mathbb{R})$ существует асимптотическое разложение вида

$$\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle \approx \sum_{k=k_0}^{\infty}\langle u_k,\varphi\rangle\varepsilon^k,\ u_k\in D'(\mathbb{R}), \tag{2}$$

т. е. для любого N и любого $\varphi\in D(\mathbb{R})$

$$\sum_{k=k_0}^{N}\langle u_k,\varphi\rangle\varepsilon^k - \langle f_\varepsilon,\varphi\rangle = o\left(\varepsilon^N\right).$$

В общем случае произведение распределений (1) является мнемофункцией, но если мнемофункция $R(f)R(g)$ ассоциирована с некоторым распределением h, то данное распределение объявляют произведением fg, порожденным заданным способом аппроксимации R. Информацию о поведении мнемофункции $R(f)R(g)=f_\varepsilon g_\varepsilon$ дает ее асимптотическое разложение (2). Явное построение такого разложения практически невозможно получить в общем случае, поэтому представляет интерес исследование поведения произведений и их асимптотических разложений для специальных видов мнемофункций. В настоящей статье этот вопрос рассматривается для самоподобных рациональных мнемофункций.

Самоподобные мнемофункции. Пусть

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $Q(x)\neq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$, есть правильная рациональная функция. Тогда мнемофункции вида $f_\varepsilon(x)=f(x/\varepsilon)$ называются самоподобными рациональными мнемофункциями. Интерес к рассмотрению таких мнемофункций вызван тем, что, например, решение задачи Дирихле для полуплоскости $y=\varepsilon\geq 0$ есть интеграл Пуассона

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{\left(x-\tilde{x}\right)^2+y^2}f\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}. \tag{3}$$

При этом описание поведения решения вблизи границы сводится к построению асимптотического разложения самоподобной рациональной мнемофункции $\dfrac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2+x^2)}$ вида (2).

Отметим, что первые асимптотические разложения самоподобных мнемофункций были получены академиками А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским еще до появления теории новых обобщенных функций. В своей работе [6] они строили асимптотические разложения интегралов, зависящих от малого параметра. В частности, ими было получено разложение интеграла (3) с помощью метода последовательного разложения, подробно описанного в [7].

В пространстве обобщенных функций $D'(\mathbb{R})$ для самоподобных рациональных мнемофункций существует асимптотическое разложение (2), которое можно получить с помощью следующей теоремы. Она является следствием теорем Тихонова – Самарского [6] и Риекстыньша [7] об асимптотическом разложении интегралов, зависящих от малого параметра.

Т е о р е м а 1. *Пусть рациональная функция*

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\ \ Q(x)\neq 0,$$

имеет при $x\to\infty$ *асимптотическое разложение вида* $f(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_kx^{-k}$. *Тогда при* $\varepsilon\to 0$ *имеет место асимптотическое разложение в* $D'(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(a_{k+1}P\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)+\frac{(-1)^kA_k}{k!}\delta^{(k)}\right),$$

где

$$A_k=\tilde{M}_k(f):=\int\limits_{|x|>1}x^k\left[f(x)-\sum_{j=1}^{k+1}a_jx^{-j}\right]dx+\int\limits_{-1}^{1}\left[x^kf(x)-\sum_{j=1}^{k}a_jx^{k-j}\right]dx$$

– регуляризованные моменты функции f.

З а м е ч а н и е 1. Если $a_j = 0$ при $j < k + 2$, то регуляризованные моменты совпадают с обычными моментами функции f

$$A_k=M_k(f):=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^kf(x)dx.$$

Из теоремы 1 вытекает следующая зависимость главных членов разложения мнемофункции $f_\varepsilon(x)$ от свойств порождающей функции $f(x)$ [8].

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $f(x)$ *обладает при* $x\to\infty$ *асимптотическим разложением*

$$f(x)\sim\sum_{k=m}^{\infty}a_kx^{-k},\ \ m\geq 1.$$

Тогда для мнемофункции $f_\varepsilon(x)=f(x/\varepsilon)$ *справедливы следующие утверждения:*

1. Если $m = 1$, *то* $f_\varepsilon(x)\sim\varepsilon a_1P(1/x)+\varepsilon c\delta+\ldots$, *где*

$$c=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{2}dx,$$

т. е. главным членом разложения является $\varepsilon a_1P(1/x)+\varepsilon c\delta$.

2. Если $m\geq 2$, *то*

$$f_\varepsilon(x)\sim\sum_{k=0}^{m-2}\frac{(-1)^kM_k\delta^{(k)}}{k!}\varepsilon^{k+1}+\sum_{k=m-1}^{\infty}\varepsilon^{k+1}\left(a_{k+1}P\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)+\frac{(-1)^k\tilde{M}_k}{k!}\delta^{(k)}\right).$$

В частности, если $M_0\neq 0$, *то главным членом асимптотического разложения является* $M_0\varepsilon\delta$.

С л е д с т в и е 2. *Для любой рациональной функции f, такой что* $M_0 = 1$, *мнемофункция вида*

$$\frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ассоциирована с δ-функцией. Для любой нечетной рациональной функции g, такой что $m = 1$, *мнемофункция*

$$\frac{1}{\varepsilon a_1} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ассоциирована с $P(1/x)$.

Рассмотрим несколько примеров асимптотических разложений рациональных мнемофункций.

П р и м е р 1. Найдем асимптотическое разложение мнемофункции, порожденной функцией

$$f(x) = \frac{1}{x-\xi}$$

с полюсом в точке $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. При $x \to \infty$ функция f имеет разложение

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^{k-1} x^{-k},$$

и ее регуляризованные моменты задаются выражениями

$$A_k = \xi^k \left(Ln|1+\xi| - Ln|-1-\xi| \right) = i\xi^k \left(\arg(1+\xi) - \arg(-1-\xi) \right) = \begin{cases} i\xi^k \pi, \ \operatorname{Im}\xi > 0; \\ -i\xi^k \pi, \operatorname{Im}\xi < 0. \end{cases}$$

Здесь $-\pi < \arg\xi \le \pi$. Поэтому асимптотическое разложение мнемофункции $\frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ есть

$$\frac{1}{x-\xi\varepsilon} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \varepsilon^k \left(P\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right) + i\pi \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im}\xi\right) \frac{(-1)^k \delta^{(k)}}{k!} \right). \tag{4}$$

При любом $\xi \in \mathbb{C}_-$, где $\mathbb{C}_-$ – нижняя полуплоскость, мнемофункции вида $\frac{1}{x-\xi\varepsilon}$ имеют одинаковый главный член разложения, равный $P(x^{-1}) - i\pi\delta$, и отличаются только младшими членами. Это означает, что рассматриваемые мнемофункции ассоциированы с распределением $P(x^{-1}) - i\pi\delta$. Аналогично для всех $\xi \in \mathbb{C}_+$, где $\mathbb{C}_+$ – верхняя полуплоскость, мнемофункции вида $\frac{1}{x-\xi\varepsilon}$ ассоциированы с $P(x^{-1}) + i\pi\delta$.

З а м е ч а н и е 2. Главные члены разложения мнемофункций $\frac{1}{x \pm i\varepsilon}$ фактически содержатся в формулах Сохоцкого:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x \pm i\varepsilon} = \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle \mp i\pi\varphi(0),$$

из которых следует, что в пространстве распределений

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим рациональную функцию

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Семейство функций $\frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ задает аппроксимацию δ-функции. Его асимптотическое разложение имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2+x^2)} \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^{2k}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}P\left(\frac{1}{x^{2k+2}}\right)+\frac{\delta^{(2k)}}{(2k)!}\right).$$

В силу того, что

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x-i\varepsilon}-\frac{1}{x+i\varepsilon}\right),$$

асимптотическое разложение мнемофункции, порожденной $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, можно получить из асимптотических разложений мнемофункций $\dfrac{1}{x-i\varepsilon}$ и $\dfrac{1}{x+i\varepsilon}$.

Произведение самоподобных мнемофункций. Опишем произведение рациональных мнемофункций. Поскольку

$$f_\varepsilon(x)g_\varepsilon(x)=(fg)_\varepsilon(x),$$

то чтобы получить более наглядное представление о поведении произведения распределений, необходимо разложить мнемофункцию $(fg)_\varepsilon(x)$ в асимптотический ряд. Для этого, в силу теоремы 1, нужно получить асимптотическое разложение рациональной функции $fg(x)$ при $x \to \infty$ и вычислить ее регуляризованные моменты.

Асимптотическое разложение рациональной функции $fg(x)$ при $x \to \infty$ можно получить формальным перемножением асимптотических рядов, соответствующих функциям $f(x)$ и $g(x)$: если

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{-k},\ \ g(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^{-k}$$

при $x \to \infty$, то рациональная функция $fg(x)$ при $x \to \infty$ имеет асимптотическое разложение

$$fg(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-k},$$

где

$$c_k=\sum_{j=1}^{k-1} a_j b_{k-j}.$$

Основная сложность связана с определением регуляризованных моментов функции $fg(x)$, так как в общем случае интеграл от произведения нельзя выразить через интегралы от сомножителей. Ниже показано, что для самоподобных рациональных мнемофункций можно определить регуляризованные моменты произведения через моменты сомножителей и, следовательно, построить асимптотическое разложение произведения по разложениям сомножителей.

Следует отметить, что для произвольных мнемофункций асимптотическое разложение не позволяет однозначно восстановить мнемофункцию, а значит, асимптотическое разложение произведения нельзя определить по асимптотическим разложениям сомножителей. Классическим примером, иллюстрирующим это, является мнемофункция $f_\varepsilon(x) = \sin(x/\varepsilon)$, для которой все члены асимптотического разложения нулевые. Однако $(f_\varepsilon)^2 \sim 1/2$, так как $\sin^2(x/\varepsilon)=1/2-\cos(2x/\varepsilon)/2$. Но для рациональных самоподобных мнемофункций справедлива

Т е о р е м а 2. *В алгебре рациональных самоподобных мнемофункций асимптотическое разложение произведения мнемофункций однозначно определяется по асимптотическим разложениям сомножителей с помощью явных формул.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала произведение мнемофункции $\dfrac{1}{x-\xi\varepsilon}$, порожденной функцией $f(x)=\dfrac{1}{x-\xi}$, и мнемофункции $\dfrac{1}{x-\eta\varepsilon}$, порожденной $g(x)=\dfrac{1}{x-\eta}$. Согласно (4), f и g имеют регуляризованные моменты $A_k=\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\xi)i\pi\xi^k$ и $B_k=\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\eta)i\pi\eta^k$ соответственно. Тогда для произведения мнемофункций справедлива

Л е м м а 1. *Пусть*

$$f(x)=\frac{1}{x-\xi},\ \ g(x)=\frac{1}{x-\eta}.$$

При $\xi=\eta$ *произведению* $f(x)g(x)=f^2(x)$ *соответствуют регуляризованные моменты*

$$C_0=0,\ \ C_k=A_{k-1},\ \ k\ge 1,$$

и, следовательно, асимптотическое разложение мнемофункции $(x-\xi\varepsilon)^{-2}$ *есть*

$$\frac{1}{(x-\xi\varepsilon)^2}\sim\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{k-1}\varepsilon^{k-1}\left(kP\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)+i\pi\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im}\xi\right)\frac{(-1)^k\delta^{(k)}}{(k-1)!}\right).$$

При $\xi\ne\eta$ *регуляризованные моменты произведения функций fg есть*

$$C_k=\frac{1}{\xi-\eta}\left(A_k-B_k\right),$$

и асимптотическое разложение произведения мнемофункций $(x-\xi\varepsilon)^{-1}$ *и* $(x-\eta\varepsilon)^{-1}$ *имеет вид*

$$\frac{1}{(x-\xi\varepsilon)(x-\eta\varepsilon)}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\xi^j\eta^{k-j-1}P\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)+\frac{(-1)^k(A_k-B_k)}{(\xi-\eta)k!}\delta^{(k)}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу того, что

$$\frac{1}{(x-\xi\varepsilon)^2}=-\left(\frac{1}{x-\xi\varepsilon}\right)'$$

и асимптотическое разложение производной мнемофункции соответствует почленному дифференцированию асимптотического разложения мнемофункции, то, почленно дифференцируя разложение (4), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}f^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)=\frac{1}{(x-\xi\varepsilon)^2}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k\varepsilon^k\left((k+1)P\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)+i\pi\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\xi)\frac{(-1)^{k+1}\delta^{(k+1)}}{k!}\right).$$

Откуда следует, что регуляризованные моменты функции $f^2(x)$ есть $C_0=0,\ C_k=A_{k-1},\ k\ge 1.$

Для определения регуляризованных моментов произведения $f(x)g(x)$ при $\xi\ne\eta$ представим его в виде суммы простейших, т. е.

$$f(x)g(x)=c_1f(x)+c_2g(x).$$

Тогда регуляризованные моменты C_k функции $f(x)g(x)$ будут находиться по формуле

$$C_k=c_1A_k+c_2B_k.$$

Имеем

$$\frac{1}{x-\xi}\frac{1}{x-\eta}=\frac{1}{(\xi-\eta)}\left(\frac{1}{x-\xi}-\frac{1}{x-\eta}\right)=\frac{c_1}{x-\xi}+\frac{c_2}{x-\xi},$$

где $c_1=-c_2=\dfrac{1}{\xi-\eta}$.

Откуда получаем выражения для регуляризованных моментов и асимптотическое разложение произведения мнемофункций. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Произведение $(x-\xi\varepsilon)^{-1}$ и $(x-\eta\varepsilon)^{-1}$ зависит от взаимного расположения ξ и η. В случае, когда ξ и η находятся в разных полуплоскостях, главным членом разложения произведения мнемофункций является дельта-функция с бесконечно большим коэффициентом, а именно, $\frac{\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\xi-\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\eta}{(\xi-\eta)\varepsilon}\delta,$ т. е. произведение распределений, ассоциированных с мнемофункциями $(x-\xi\varepsilon)^{-1}$ и $(x-\eta\varepsilon)^{-1}$, не определено. Однако в случае, когда ξ и η находятся в верхней полуплоскости, произведение рассматриваемых мнемофункций ассоциировано с распределением $P(x^{-2})-i\pi\delta'$, когда в нижней – с $P(x^{-2})+i\pi\delta'$. Это значит, что если ξ и η находятся в одной полуплоскости, то произведение распределений, ассоциированных с мнемофункциями $(x-\xi\varepsilon)^{-1}$ и $(x-\eta\varepsilon)^{-1}$, определено. В частности, квадрат распределения, ассоциированного с мнемофункцией $(x-\xi\varepsilon)^{-1}$, существует.

П р о д о л ж е н и е д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 2. В силу того, что любую правильную рациональную функцию $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$ $Q(x)\neq 0,$ можно представить в виде суммы элементарных дробей, для мнемофункции $f_\varepsilon(x)=f(x/\varepsilon)$ справедливо разложение

$$f_\varepsilon(x)=f(x/\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\frac{B_{kj}(\varepsilon)}{\left(x-\xi_k\varepsilon\right)^j},$$

где $B_{kj}(\varepsilon)$ есть мнемочисла, т. е. семейства, не зависящие от x, в данном случае имеющие вид рациональных функций от ε. Тогда асимптотическое разложение произведения самоподобных рациональных мнемофункций сводится к определению асимптотических разложений мнемофункций, порожденных простейшими рациональными дробями, т. е. мнемофункций вида $(x-\xi_k\varepsilon)^{-j}$. И, аналогично лемме 1, при $\xi\neq\eta$ произведение $(x-\xi\varepsilon)^{-j}(x-\eta\varepsilon)^{-l}$ расписываем на сумму простейших, а при $\xi=\eta$ асимптотическое разложение мнемофункции $(x-\xi\varepsilon)^{-j-l}$ получается почленным дифференцированием разложения, соответствующего $\left(x-\xi_k\varepsilon\right)^{-1}$. Теорема доказана.

Скошенное аналитическое представление. При разложении самоподобных рациональных мнемофункций на мнемофункции, порожденные простейшими дробями, возникают выражения, представляющие собой разность предельных значений аналитических в верхней и нижней полуплоскостях функций. Например, для описанной выше мнемофункции

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

справедливо следующее представление:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon}\right),$$

т. е.

$$f_\varepsilon(x)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\left.\frac{1}{z}\right|_{z=x+i\varepsilon}-\left.\frac{1}{z}\right|_{z=x-i\varepsilon}\right),$$

и сходимость знаменателей к точке x при $\varepsilon\to 0$ осуществляется по вертикальным направлениям от точек $z_j=x\pm i,$ $j=1,2$ (рис. 1).

Для мнемофункции $\frac{1}{\varepsilon}g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$ $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)},$ которая также ассоциирована с дельта-функцией, при разложении на простейшие возникает представление в виде линейной комбинации

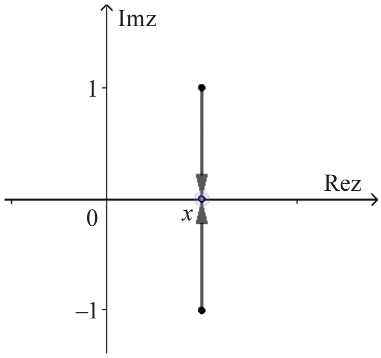

Рис. 1

Fig. 1

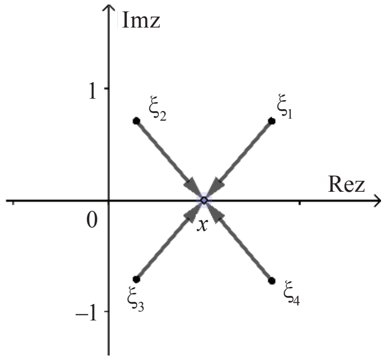

Рис. 2

Fig. 2

мнемофункций вида $\frac{1}{x-\xi_k\varepsilon}$, $\xi_k=\sqrt[4]{-1}$, $k=\overline{1,4}$, в которых стремление знаменателей к точке x осуществляется по наклонной прямой, проходящей через точку x и $x+\xi_k$ (рис. 2):

$$g_\varepsilon(x)=\frac{1+i}{4\pi}\frac{1}{x-\frac{-1-i}{2}\varepsilon}-\frac{1-i}{4\pi}\frac{1}{x-\varepsilon\frac{1-i}{\sqrt{2}}}-\left(\frac{1+i}{4\pi}\frac{1}{x-\varepsilon\frac{1+i}{\sqrt{2}}}-\frac{1-i}{4\pi}\frac{1}{x-\varepsilon\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right).$$

В первом случае такое представление есть классическое аналитическое представление Коши для дельта-функции [9]. Напомним, что *аналитическим представлением Коши* распределения f называется пара функций (f^+,f^-), где $f^\pm$ – аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, такая что f является пределом в пространстве распределений семейства гладких функций

$$R_a(f)=f_\varepsilon(x)=f^+(x+i\varepsilon)-f^-(x-i\varepsilon).$$

Если функции $f^\pm$ являются правильными рациональными функциями, то такое распределение будем называть рациональным. Например, для рациональных распределений δ и $P(x^{-1})$ аналитическое представление Коши есть

$$\delta=\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z},-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right),\quad P\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z},-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\right),$$

и соответствующие им мнемофункции, порожденные аналитическим представлением:

$$R_a(\delta)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon}\right),\ R_a\left(P\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}+\frac{1}{x-i\varepsilon}\right).$$

Во втором случае возникает некоторая модификация аналитического представления Коши. В силу того, что сходимость к точке x осуществляется по «наклонным» направлениям, такой метод аппроксимации будем называть *скошенным аналитическим представлением* (*sloped analytical representation*). По аналогии с классическим представлением Коши, скошенное представление будем обозначать парой аналитических в верхней и нижней полуплоскостях функций с индексом *sl*, т. е. $(f^+,f^-)_{sl}$, и соответствующую аппроксимацию – $R_{sl}(f^+,f^-)$.

Следует отметить, что скошенное аналитическое представление и представление Коши обладают рядом схожих свойств и, когда $\xi=-i$, $\eta=i$, совпадают. Однако первое устроено несколько сложнее. И, в то время как для рациональных распределений представление Коши определяется однозначно и порождает вложение пространства рациональных распределений в алгебру мнемофункций, скошенных представлений для заданного распределения может быть много. Так, согласно (4), у дельта-функции возникает бесконечно много скошенных представлений:

$$\delta \mapsto \left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi}, -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\eta} \right)_{sl},$$

где ξ и η – произвольные точки $\mathbb{C}_-$ и $\mathbb{C}_+$ соответственно. Поэтому для дельта-функции существует обширное множество аппроксимирующих семейств вида

$$R_{sl}(\delta) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1}^{n^+} \frac{B_k^+}{x-\xi_k\varepsilon} - \sum_{k=1}^{n^-} \frac{B_k^-}{x-\eta_k\varepsilon} \right),\ \xi_k \in \mathbb{C}_-,\ \eta_k \in \mathbb{C}_+,$$

таких, что $\sum_{k=1}^{n^+} B_k^+ = \sum_{k=1}^{n^-} B_k^- = 1$. В частности,

$$R_{sl}(\delta) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x-\varepsilon\xi} - \frac{1}{x-\varepsilon\eta} \right). \tag{5}$$

Аналогично получаем бесконечное множество скошенных представлений для $P(x^{-1})$:

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \mapsto \left(\frac{1}{2}\frac{1}{z-\xi}, -\frac{1}{2}\frac{1}{z-\eta} \right)_{sl}.$$

Как и дельта-функция, $P(x^{-1})$ также имеет обширное множество аппроксимирующих семейств.

Скошенное аналитическое представление действует по достаточно сложному правилу. Для простейших дробей имеем следующее:

$$R_{sl}\left(\frac{1}{(z-\xi)^j}, 0 \right) = \frac{1}{\varepsilon^j}\frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}-\xi\right)^j} = \frac{1}{(x-\xi\varepsilon)^j}, \quad R_{sl}\left(0, -\frac{1}{(z-\eta)^j} \right) = \frac{1}{\varepsilon^j}\frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}-\eta\right)^j} = \frac{1}{(x-\eta\varepsilon)^j}.$$

Тут и далее $\xi \in \mathbb{C}_-$, $\eta \in \mathbb{C}_+$. В общем случае, если мнемофункция f_ε ассоциирована с распределением f, то при разложении f_ε на простейшие дроби получаем скошенное представление f:

$$R_{sl}(f) = \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^+}{(x-\xi_k\varepsilon)^j} - \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^-}{(x-\eta_k\varepsilon)^j},\ \xi_k \in \mathbb{C}_-,\ \eta_k \in \mathbb{C}_+.$$

Правило умножения рациональных распределений при их вложении в алгебру мнемофункций посредством аналитического представления Коши подробно описано в [10], поэтому рассмотрим некоторые произведения мнемофункций, порожденных скошенным аналитическим представлением.

Л е м м а 2. *Пусть* $\operatorname{Im}\xi < 0$ *и* $\operatorname{Im}\eta > 0$. *Тогда*

$$R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi}, 0 \right) R_{sl}\left(0, -\frac{1}{z-\eta} \right) = c(\xi;\eta;\varepsilon)\left(R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi}, 0 \right) - R_{sl}\left(0, -\frac{1}{z-\eta} \right) \right), \tag{6}$$

где $c(\xi;\eta;\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon(\xi-\eta)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на представлении произведения мнемофункций в виде суммы простейших дробей. Так как

$$R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi}, 0 \right) = \frac{1}{x-\varepsilon\xi}, \quad R_{sl}\left(0, -\frac{1}{z-\eta} \right) = \frac{1}{x-\varepsilon\eta},$$

произведение мнемофункций распишется в виде

$$R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta}\right)=\frac{1}{x-\varepsilon\xi}\frac{1}{x-\varepsilon\eta}=\frac{1}{\varepsilon(\xi-\eta)}\frac{1}{x-\varepsilon\xi}-\frac{1}{\varepsilon(\xi-\eta)}\frac{1}{x-\varepsilon\eta}=$$

$$=\frac{c(\xi;\eta;\varepsilon)}{x-\varepsilon\xi}-\frac{c(\xi;\eta;\varepsilon)}{x-\varepsilon\eta}=c(\xi;\eta;\varepsilon)\left(R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)-R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta}\right)\right),$$

где $c(\xi;\eta;\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon(\xi-\eta)}$, что и требовалось доказать.

Проанализируем равенство (6). Вследствие того, что коэффициент $c(\xi;\eta;\varepsilon)$ является бесконечно большим при $\varepsilon \to 0$, мнемофункция в правой части не ассоциирована с распределением, однако она является аппроксимацией дельта-функции, умноженной на бесконечно большой коэффициент, так как, согласно (5),

$$R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta}\right)=-2\pi i\,c(\xi;\eta;\varepsilon)R_{sl}(\delta)=-\frac{2\pi i}{\varepsilon(\xi-\eta)}R_{sl}(\delta).$$

Для случаев, когда особенности лежат в одной полуплоскости, справедлива

Л е м м а 3. *Пусть* $\operatorname{Im}\xi_1,\ \operatorname{Im}\xi_2<0.$ *Тогда*

$$R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi_1},0\right)R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi_2},0\right)$$

ассоциировано с распределением $P(x^{-2})+i\pi\delta'.$ *Аналогично произведение*

$$R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta_1}\right)R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta_2}\right),$$

где $\operatorname{Im}\eta_1,\ \operatorname{Im}\eta_2>0,$ *ассоциировано с распределением* $P(x^{-2})-i\pi\delta'.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 1, главным членом асимптотического разложения произведения мнемофункций $(x-\xi_1\varepsilon)^{-1}$ и $(x-\xi_2\varepsilon)^{-1}$ является распределение $P(x^{-2})+i\pi\delta'.$ А для произведения мнемофункций $(x-\eta_1\varepsilon)^{-1}$ и $(x-\eta_2\varepsilon)^{-1}$ главный член разложения есть $P(x^{-2})-i\pi\delta'.$

Произведения скошенных представлений других степеней непосредственно выражаются через леммы 2 и 3. В силу того, что самоподобные рациональные мнемофункции представимы в виде линейной комбинации простейших, леммы 2 и 3 задают однозначно правило умножения скошенных аналитических представлений. Например,

$$R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi_1},0\right)R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta_1}\right)R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi_2},0\right)=\left(\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)}{x-\xi_1\varepsilon}-\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)}{x-\eta_1\varepsilon}\right)\frac{1}{x-\xi_2\varepsilon}=$$

$$=\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)}{(x-\xi_1\varepsilon)(x-\xi_2\varepsilon)}-\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)c(\xi_2;\eta_1;\varepsilon)}{x-\xi_2\varepsilon}+\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)c(\xi_2;\eta_1;\varepsilon)}{x-\eta_1\varepsilon}=$$

$$=R_{sl}\left(\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)}{(z-\xi_1)(z-\xi_2)}-\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)c(\xi_2;\eta_1;\varepsilon)}{z-\xi_2},-\frac{c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)c(\xi_2;\eta_1;\varepsilon)}{z-\eta_1}\right)=$$

$$=c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)R_{sl}\left(P(x^{-2})+i\pi\delta'\right)+2\pi i c(\xi_1;\eta_1;\varepsilon)c(\xi_2;\eta_1;\varepsilon)R_{sl}(\delta)+o(\varepsilon^{-1}).$$

Произведения других степеней получаются аналогично. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 3. *Векторное пространство, состоящее из элементов вида*

$$\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+(\varepsilon)}{(x-\xi_k\varepsilon)^j}-\sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{(x-\eta_k\varepsilon)^j},$$

где $\xi_k \in \mathbb{C}_-, \eta_k \in \mathbb{C}_+,$ *а* $B_{kj}^+(\varepsilon)$, $B_{kj}^-(\varepsilon)$ *– мнемочисла, является алгеброй относительно введенного в леммах* 2 *и* 3 *умножения.*

Список использованных источников

1. Иванов, В. К. Гиперраспределения и умножение распределений Шварца / В. К. Иванов // Докл. Акад. наук СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1045–1048.

2. Егоров, Ю. В. К теории обобщенных функций / Ю. В. Егоров // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 5 (275). – С. 3–40.

3. Rosinger, E. E. Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations / E. E. Rosinger. – North-Holland: Mathematics Studies, 1987. – 406 p.

4. Colombeau, J. F. New generalized functions and multiplication of distributions / J. F. Colombeau. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – 374 p. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(08)x7056-2

5. Антоневич, А. Б. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно // Докл. Акад. наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 2. – С. 267–270.

6. Тихонов, А. Н. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Докл. Акад. наук СССР. – 1959. – Т. 126, № 1. – С. 26–29.

7. Риекстыньш, Э. Я. Асимптотические разложения интегралов / Э. Я. Риекстыньш. – Рига: Зинатне, 1974. – Т. 1. – 392 с.

8. Шагова, Т. Г. Об асимптотических разложениях рациональных мнемофункций / Т. Г. Шагова // Тр. БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. – 2018. – Т. 206, № 1. – С. 9–11.

9. Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, 1968. – 276 с.

10. Шагова, Т. Г. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$ / Т. Г. Шагова // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 2. – С. 6–17. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17

References

1. Ivanov V. K. Hyperdistributions and the multiplication of Schwartz distributions. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1045–1048 (in Russian).

2. Egorov Yu. V. A contribution to the theory of generalized functions. *Russian Mathematical Surveys*, 1990, vol. 45, no 5, pp. 1–49. http://dx.doi.org/10.1070/RM1990v045n05ABEH002683

3. Rosinger E. E. *Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations.* North-Holland, Mathematics Studies, 1987. 406 p.

4. Colombeau J. F. *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*. Amsterdam, North-Holland, 1984. 374 p. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(08)x7056-2

5. Antonevich A. B., Radyno Ya. V. A general method for constructing algebras of generalized functions. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1991, vol. 318, no. 2, pp. 267 – 270 (in Russian).

6. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Asymptotic expansion of integrals with slowly decreasing kernel. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1959, vol. 126, no 1, pp. 26–29 (in Russian).

7. Riekstynsh A. Ya. *Asymptotic expansion of integrals. Vol 1.* Riga, Zinatne Publ., 1974. 392 p. (in Russian).

8. Shahava T. R. On the asymptotic expansions of rational mnemofunctions. *Trudy BGTU. Seriya 3, Fiziko-matematicheskie nauki i informatika = Proceedings of BSTU. Issue 3: Physics and Mathematics. Informatics*, 2018, vol. 206, no 1, pp. 9–11 (in Russian).

9. Bremermann H. *Distributions, complex variables, and Fourier transforms.* Addison-Wesley Pub., 1965. 186 p.

10. Shahava T. R. Rational mnemofunctions on $\mathbb{R}$. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no 2, pp. 6–17 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-2-6-17

Информация об авторе

Шагова Татьяна Григорьевна – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tanya.shagova@gmail.com. https://orcid.org/0000-0003-2634-4699

Information about the author

Tatsiana R. Shahava – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tanya.shagova@gmail.com. https://orcid.org/0000-0003-2634-4699