УДК 517.956.32

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С ПЕРВОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: lomovcev@bsu.by

Методами характеристик и Дюамеля в явном виде выведено единственное классическое решение смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при первой характеристической косой производной в граничном условии, в котором все коэффициенты зависят от времени. Характеристичность этой первой косой производной означает, что она направлена по критической характеристике уравнения колебаний. Найдены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные и граничное данные для однозначной везде разрешимости этой смешанной задачи во множестве классических решений.

Ключевые слова: смешанная задача, нестационарное граничное условие, характеристическая косая производная, классическое решение, необходимое и достаточное условие, условие согласования, требование гладкости.

F. E. LOMOVTSEV

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR FORCED VIBRATIONS OF A SEMIBOUNDED STRING WITH THE FIRST CHARACTERISTIC DIRECTIONAL DERIVATIVE IN THE UNSTEADY BOUNDARY CONDITION

Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: lomovcev@bsu.by

By means of the method of characteristics and the Duhamel's method we have derived a closed-form expression for a unique classical solution of a mixed problem for the inhomogeneous equation of vibration of a semibounded string with the first characteristic directional derivative in the boundary condition where all coefficients are time-dependent. The characteristic nature of this first directional derivative means that it is directed in terms of the critical characteristic of the vibration equation. We have found the necessary and sufficient conditions for the right-hand side of the equation and the initial and boundary data for single-valued everywhere solvability of this mixed problem in the set of classical solutions.

Keywords: mixed problem, unsteady boundary condition, characteristic directional derivative, classical solution, necessary and sufficient condition, reconciliation condition, smoothness requirement.

Введение. В настоящей работе методом характеристик и методом Дюамеля найдены формулы классических решений смешанной (начально-краевой) задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны в случае первой характеристической (направленной по критической характеристике уравнения) нестационарной (зависящей от времени t) косой производной в граничном условии. Этими же методами выведены необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное) этой смешанной задачи, которые обеспечивают ее однозначную везде разрешимость. Впервые достаточные условия существования единственных классических решений этой смешанной задачи в случае однородного уравнения были установлены в [1]. Затем в работе [2] эти результаты были обобщены на однородное уравнение колебаний ограниченной струны при однородной стационарной первой косой производной на ее левом конце и однородном граничном условии первого рода на ее правом конце. Формулы классических решений вместе с необходимыми и достаточными условиями их существования и единственности получены только для нехарактеристических косых производных первого и второго порядков в граничном условии для уравнения вынужденных колебаний полуограниченной струны [3, 4].

1. Постановка краевой задачи. На множестве $G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[$ ставится смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ a>0,\ \{x,t\}\in G_\infty, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x\in\mathbb{R}_+ = [0,\infty[, \tag{2}$$

$$[\alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t),\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где α, β, γ – заданные функции переменной t и нижними индексами искомой функции u обозначены ее частные производные по указанным переменным соответствующих порядков.

Требуется найти в явном виде классические решения $u\in C^2(G_\infty)$ и необходимые и достаточные условия на исходные данные этой задачи для ее однозначной везде разрешимости. Символом $C^k(\Omega)$ мы обозначаем множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω.

2. Решение краевой задачи. *Критической характеристикой* $x = at$ уравнения (1) множество G_∞ разбивается на множества $G_- = \{\{x,t\}\in G_\infty : x > at > 0\}$, $G_+ = \{\{x,t\}\in G_\infty : 0\le x\le at\}$. Для функций $u\in C^2(G_\infty)$ в граничном условии (3) и его первой производной по t мы полагаем $t=0$, вычисляем значения полученных слагаемых с помощью начальных условий (2) при $x=0$, уравнения (1) при $t=0,\ x=0$ и соответственно находим необходимые условия согласования:

$$J_1 \equiv \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} J_2 \equiv \alpha(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] + [\alpha'(0)+\gamma(0)]\psi(0) + \\ +\beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0). \end{gathered} \tag{5}$$

Методами характеристик и Дюамеля доказывается

Т е о р е м а. *Пусть в граничном условии* (3) *коэффициенты* $\alpha,\beta,\gamma\in C^2(\mathbb{R}_+)$ *и косая производная является характеристической, т. е.* $a\alpha(t) = \beta(t),\ \gamma\ne 0,\ t\in\mathbb{R}_+$. *Смешанная задача* (1)–(3) *на множестве* G_- *имеет единственное классическое решение*

$$u_-(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi\in C^2(\mathbb{R}_+),\ \psi\in C^1(\mathbb{R}_+),\ \ f\in C(G_-),\ \int_0^t f\left(x\pm a(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1(G_-), \tag{7}$$

и на множестве G_+ *единственное классическое решение*

$$\begin{gathered} u_+(x,t) = \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)dsd\tau + \\ +\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\left\{a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right) - \beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\left[a\varphi'(at-x)+\psi(at-x)\right] - \right. \\ \left. -\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int_0^{t-x/a} f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau\right\} - \frac{1}{a}\int_0^{t-x/a}\int_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)dsd\tau \end{gathered} \tag{8}$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+),\ \psi \in C^1(\mathbb{R}_+),\ \mu \in C^2(\mathbb{R}_+), \tag{9}$$

$$f \in C(G_\infty),\ \int_0^t f(|x \pm a(t-\tau)|,\tau)d\tau \in C^1(G_+), \tag{10}$$

$$\beta(t)\varphi'''(at),\ \beta(t)\psi''(at),\ \beta(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^t f\left(a(t-\tau),\tau\right)d\tau\right) \in C(\mathbb{R}_+) \tag{11}$$

и условия согласования (4), (5) *и*

$$J_3 \equiv \alpha''(0)\psi(0) + 2\alpha'(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] + \alpha(0)[a^2\psi''(0) + f_t\ (0,0)] +$$
$$+\beta''(0)\varphi'(0) + 2\beta'(0)\psi'(0) + \beta(0)[a^2\varphi'''(0) + f_x\ (0,0)] +$$
$$+\gamma''(0)\varphi(0) + 2\gamma'(0)\psi(0) + \gamma(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] = \mu''(0). \tag{12}$$

Доказательство. Методом характеристик и методом Дюамеля выводится общий вид классических решений уравнения (1) на множестве G_∞:

$$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at) + F(x,t),\ F(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)dsd\tau, \tag{13}$$

если $g,\ h$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных и $F(x,t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на G_∞.

Необходимость и достаточность в G_-. На множестве G_- классическим решением смешанной задачи (1)–(3) очевидно является единственное классическое решение задачи Коши (1), (2), которое выражается известной формулой Даламбера – Эйлера (6). Необходимость и достаточность требований гладкости (7) доказывается так же, как в [3, 4]. Условия согласования отсутствуют, потому что нет граничных условий для точек из-под критической характеристики.

Достаточность в G_+. Решения смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_+ ищутся как решения задачи Пикара для уравнения (1) с двумя следующими граничными условиями. Из естественного требования равенства решений $u_+(x,t) = u_-(x,t)$ на характеристике $x = at$ ввиду формул (6) и (13) имеем уравнение

$$g(2at) + h(0) = \frac{\varphi(2at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{2at} \psi(s)ds. \tag{14}$$

Подставляя решения (13) в граничное условие (3), получаем другое уравнение

$$a\alpha(t)\left\{g'(at) - h'(-at) + \frac{1}{a}\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau\right\} + \beta(t)\left[g'(at) + h'(-at)\right] +$$
$$+\gamma(t)\left\{g(at) + h(-at) + \frac{1}{a}\int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right\} = \mu(t). \tag{15}$$

Чтобы найти решения системы двух уравнений (14) и (15), из первого уравнения мы выражаем функцию g при $y = 2at \geq 0$:

$$g(y) = \frac{\varphi(y) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^y \psi(s)ds - h(0). \tag{16}$$

Благодаря характеристичности косой производной $a\alpha(t) = \beta(t),\ t \in [0,\infty[$, во втором уравнении (15) мы приводим подобные члены и выражаем значения функции h:

$$h(-at) = \frac{1}{\gamma(t)}\left\{\mu(t) - 2\beta(t)g'(at) - \alpha(t)\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau\right\} - g(at) - \frac{1}{a}\int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau,$$

в которой делаем замену $z = -at < 0$ и имеем функцию

$$h(z) = \gamma^{-1}\left(-\frac{z}{a}\right)\left\{\mu\left(-\frac{z}{a}\right) - 2\beta\left(-\frac{z}{a}\right)g'(-z) - \alpha\left(-\frac{z}{a}\right)\int\limits_0^{-z/a} f\left(a\left(-\frac{z}{a}-\tau\right),\tau\right)d\tau\right\} -$$

$$-g(-z) - \frac{1}{a}\int\limits_0^{-z/a}\int\limits_0^{-z-a\tau} f(s,\tau)ds\,d\tau. \tag{17}$$

Подставив в (17) значения функции g из (16), получаем функции

$$h(z) = -\frac{\varphi(-z)+\varphi(0)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-z}\psi(s)ds - \frac{1}{a}\int\limits_0^{-z/a}\int\limits_0^{-z-a\tau} f(s,\tau)dsd\tau + h(0) +$$

$$+a^{-1}\gamma^{-1}\left(-\frac{z}{a}\right)\left\{a\mu\left(-\frac{z}{a}\right) - \beta\left(-\frac{z}{a}\right)[a\varphi'(-z)+\psi(-z)] - \beta\left(-\frac{z}{a}\right)\int\limits_0^{-z/a} f(-z-a\tau,\tau)dt\right\}. \tag{18}$$

Теперь в общее решение (13) мы подставляем найденные функции g и h вида (16) и (18)

$$u_+(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(0)}{2} - \frac{\varphi(at-x)+\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds - h(0) -$$

$$-\frac{1}{a}\int\limits_0^{t-x/a}\int\limits_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)dsd\tau + h(0) + a^{-1}\gamma^{-1}\left(t-\frac{x}{a}\right)\left\{a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right) - \beta\left(t-\frac{x}{a}\right)[a\varphi'(at-x)+\psi(at-x)] -\right.$$

$$\left.-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-x/a} f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau\right\} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)dsd\tau,$$

приводим подобные члены и приходим к единственному формальному решению (8).

Покажем, что требования гладкости (9)–(11) достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости функции (8) в G_+. Требований гладкости $\varphi \in C^2(R_+)$, $\psi \in C^1(R_+)$ очевидно достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости в G_+ первых двух слагаемых функции u_+. Непрерывность правой части $f \in C(G_\infty)$ обеспечивает существование и непрерывность частного решения $F(x,t)$ из (8) и его первой частной производной по t:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^t [f(x+a(t-\tau),\tau) + f(|x-a(t-\tau)|,\tau)]\,d\tau,$$

от которой первые частные производные по x и t тоже непрерывны на G_+ в силу интегрального требования гладкости на f из (10). Следовательно, вторые частные производные $\partial^2 F(x,t)/\partial t^2$, $\partial^2 F(x,t)/\partial x\partial t$ являются непрерывными функциями на G_+. Аналогично доказывается непрерывность на G_+ вторых частных производных $\partial^2 F(x,t)/\partial x^2$ и $\partial^2 F(x,t)/\partial x\partial t$ от третьего слагаемого $F(x,t)$ формулы (8) с помощью условий (10). Дважды непрерывная дифференцируемость четвертого слагаемого в выражении (8) с фигурной скобкой следует из требований гладкости (9)–(11), так как коэффициенты $\beta, \gamma \in C^2(\mathbb{R}_+)$. В этих фигурных скобках для $f \in C(G_\infty)$ непрерывность всех первых и вторых частных производных от произведения

$$\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-x/a} f(a(t-\tau)-x,\tau)d\tau = \left[\beta(t')\int_0^{t'} f(a(t'-\tau),\tau)d\tau\right]\Bigg|_{t'=t-x/a},\ t' \geq 0,$$

на G_+ вытекает из интегрального требования на f в (10) при $x = 0$ и последнего включения для f в (11), так как функция $\beta \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и замена $t' = t - x/a$ – дважды непрерывно дифференцируема по x и t на G_+. Для дважды непрерывной дифференцируемости последнего слагаемого формулы (8) на G_+ очевидно достаточно непрерывности $f \in C(G_\infty)$ и интегрального требования на f в (10) при $x = 0$, так как правая часть $f(s,\tau)$ находится под двойным повторным интегралом по s и τ. Итак, функции (6) и (8) дважды непрерывно дифференцируемы на G_∞ вне критической характеристики $x = at$.

Ввиду условия согласования (4) функция (8) совпадает с предельным значением функции (6) на характеристике $x = at$: $u_+\big|_{x=at} - u_-\big|_{x=at} = (\mu(0) - J_1)/\gamma(0) = 0$. Остается проверить совпадение всех первых и вторых частных производных от функции (8) с соответствующими их предельными значениями от функции (6) на этой характеристике. Дифференцируя выражения (6) и (8) нужное число раз по x, t и полагая $x = at$, находим их разности:

$$\frac{\partial u_+}{\partial x}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial u_-}{\partial x}\bigg|_{x=at} = \frac{J_2 - \mu'(0)}{a\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)(\mu(0) - J_1)}{a\gamma^2(0)},$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial t}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial u_-}{\partial t}\bigg|_{x=at} = \frac{J_2 - \mu'(0)}{\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)(\mu(0) - J_1)}{\gamma^2(0)},$$

$$\frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2}\bigg|_{x=at} = \frac{J_3 - \mu''(0)}{\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)(J_2 - \mu'(0))}{\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2(\gamma'(0))^2}{\gamma^3(0)}(J_1 - \mu(0)),$$

$$\frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2}\bigg|_{x=at} = \frac{J_3 - \mu''(0)}{a^2\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)(J_2 - \mu'(0))}{a^2\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2(\gamma'(0))^2}{a^2\gamma^3(0)}(J_1 - \mu(0)),$$

$$\frac{\partial^2 u_+}{\partial x \partial t}\bigg|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x \partial t}\bigg|_{x=at} = \frac{\mu''(0) - J_3}{a\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)(\mu'(0) - J_2)}{a\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2(\gamma'(0))^2}{a\gamma^3(0)}(\mu(0) - J_1).$$

Из них видно, что если выполняются условия согласования (4), (5) и (12), то все соответствующие первые и вторые частные производные от u_+ и u_- равны на характеристике $x = at$.

Н е о б х о д и м о с т ь в G_+. Из уравнения (1) и гладкости классических решений $u \in C^2(G)$ вытекает требование гладкости $f \in C(G_+)$. Необходимость интегрального требования гладкости на правую часть f из (10) для дважды непрерывной дифференцируемости в G_+ частного решения $u_0(x,t) = F(x,t)$ уравнения (1) выводится так же, как в [3, 4]. Это требование вытекает из необходимости непрерывной дифференцируемости производных по направлению от $F = F(x,t)$ вдоль характеристик $x + at = C_1$, $x - at = C_2$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Согласно определению классических решений краевой задачи (1)–(3), общее решение (13) должно сохранять свою гладкость не только при его подстановке в уравнение (1), но и при его подстановке в граничное условие (3). Отсюда следует, что для любой функции $h \in C^2(\mathbb{R})$ частные решения $u_1(x,t) = h(x - at)$ однородного уравнения (1) тоже должны сохранять свою гладкость при их подстановке в граничное условие (3):

$$[\alpha(t)(u_1)_t + \beta(t)(u_1)_x + \gamma(t)u_1]|_{x=0} = [\beta(t) - a\alpha(t)]h'(-at) + \gamma(t)h(-at) = \mu(t), \ t \ge 0.$$

Поэтому в случае характеристической косой производной, т. е. $a\alpha(t) = \beta(t)$, $t \ge 0$, мы имеем равенство $\mu(t) = \gamma(t)h(-at)$, из которого заключаем, что граничное данное $\mu \in C^2(\mathbb{R}_+)$, так как функции $\gamma \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $h \in C^2(\mathbb{R})$.

Частное решение $u_0(x,t) = F(x,t)$ неоднородного уравнения (1) также обязано сохранять свою гладкость при его подстановке в граничное условие (3) с характеристической косой производной:

$$[\alpha(t)(u_0)_t + \beta(t)(u_0)_x + \gamma(t)u_0]|_{x=0} = \frac{1}{2a}\Bigg\{[a\alpha(t) + \beta(t)]\int_0^t f(x + a(t-\tau), \tau)d\tau +$$

$$+ [a\alpha(t) - \beta(t)]\int_0^t f(|x - a(t-\tau)|, \tau)d\tau\Bigg\}\Bigg|_{x=0} + \gamma(t)u_0(0,t) =$$

$$= \frac{\beta(t)}{a}\int_0^t f(a(t-\tau), \tau)d\tau + \frac{\gamma(t)}{a}\int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s,\tau)ds d\tau = \mu(t), t \ge 0.$$

Отсюда выводим тождество

$$\beta(t)\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau = a\mu(t)-\gamma(t)\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau,\ t\ge 0, \tag{19}$$

из которого следует включение

$$a\beta(t)\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau \in C^2(\mathbb{R}_+), \tag{20}$$

так как функции $\mu,\ \gamma\in C^2(\mathbb{R}_+)$ и интеграл в правой части этого тождества дважды непрерывно дифференцируем на $\mathbb{R}_+$. Действительно, первая производная от этого интеграла из (19) равна

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right) = a\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau \in C^1(\mathbb{R}_+), \tag{21}$$

непрерывная дифференцируемость которой для функций $f\in C(G_\infty)$ обеспечивается интегральным требованием гладкости на f из (10) при $x=0$. Тогда необходимость последнего включения для f из условий (11) вытекает из формулы Лейбница для второй производной от произведения функции и интеграла в силу гладкости этих функции $\beta\in C^2(\mathbb{R}_+)$, интеграла (21) и их произведения (20).

Поскольку ввиду необходимых условий (7) любое начальное данное $\varphi\in C^2(\mathbb{R}_+)$, то можно взять $g=\varphi,\ h=0,\ f=0$ в общем решении (13) и получить частные решения $u_2(x,t)=\varphi(x+at)$ однородного уравнения (1), которые обязаны сохранять гладкость в граничном условии (3):

$$[\alpha(t)(u_2)_t+\beta(t)(u_2)_x+\gamma(t)u_2]|_{x=0} = [a\alpha(t)+\beta(t)]\varphi'(at)+\gamma(t)\varphi(at)=\mu(t),\ t\ge 0.$$

Если в этом граничном условии косая производная является характеристической, то из этого тождества выводим включение $2\beta(t)\varphi'(at)=\mu(t)-\gamma(t)\varphi(at)\in C^2(\mathbb{R}_+)$, потому что по уже доказанному функции $\mu,\varphi\in C^2(\mathbb{R}_+)$. Это включение эквивалентно первому включению для φ из (11), так как функции $\beta,\varphi\in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Аналогичным образом ввиду необходимой гладкости любого второго начального данного $\psi\in C^1(\mathbb{R}_+)$ из (7) в общем решении (13) можно положить $g(y)=\int_0^y\psi(s)ds,\ h(z)=\int_{-z}^0\psi(s)ds,\ f=0$, иметь частные решения $u_3(x,t)=\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds$ однородного уравнения (1) и подставить их в граничное условие (3). В результате этой подстановки приходим к тождеству

$$[\alpha(t)(u_3)_t+\beta(t)(u_3)_x+\gamma(t)u_3]|_{x=0} = 2\beta(t)\psi(at)=\mu(t),\ t\ge 0,$$

из которого в силу гладкости граничного данного $\mu\in C^2(\mathbb{R}_+)$ вытекает включение $\beta(t)\psi(at)\in C^2(\mathbb{R}_+)$, эквивалентное второму включению для ψ из требований (11), так как функции $\beta\in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\psi\in C^1(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, необходимость требований гладкости (9)–(11) для классического решения (8) в G_+ доказана.

Необходимость условий согласования (4), (5) для классических решений установлена перед формулировкой теоремы. Для любой функции $f\in C^2(G_\infty)$ при всех $t\ge 0$ справедливо тождество

$$J(t)\equiv\beta(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau\right)=\beta(t)\left[f_t(0,t)+af_x(x,t)\Big|_{x=0}+a^2\int_0^t f_{xx}(x,\tau)\Big|_{x=a(t-\tau)}d\tau\right]\in C(\mathbb{R}_+).$$

Из этого тождества при $t=0$ мы получаем равенство

$$J(0)=\beta(0)\Big[f_t(0,t)\Big|_{t=0}+af_x(x,0)\Big|_{x=0}\Big]\in\mathbb{R}, \tag{22}$$

которое предельным переходом по f распространяем на все функции $f \in C(G_\infty)$, удовлетворяющие дополнительным требованиям гладкости на f из (10) и (11). Установленные выше необходимые требования гладкости (9)–(11) и существование следа (22), которое вытекает из налагаемых в них требований на f, позволяют нам взять вторую производную по t от граничного условия (3), положить $t = 0$, вычислить значения полученных слагаемых с помощью начальных условий (2) и их производных по x при $x = 0$, а также уравнения (1) и его первых частных производных по t и x при $t = 0$, $x = 0$ и установить необходимость третьего условия согласования (12) граничного условия с начальными условиями и уравнением. Теорема доказана.

3. Замечания. 1. Можно показать, что принадлежность указанных в предположениях (7) и (10) интегралов для непрерывных функций f в G_- и G_∞ соответственно множествам $C^1(G_-)$ и $C^1(G_+)$ эквивалентна их принадлежности соответственно множествам $C^{(1,0)}(G_-)$ и $C^{(1,0)}(G_+)$ или $C^{(0,1)}(G_-)$ и $C^{(0,1)}(G_+)$. Здесь $C^{(1,0)}(\Omega)$ и $C^{(0,1)}(\Omega)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2. В частном случае коэффициентов $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ эта теорема содержит формулу единственного классического решения и необходимые и достаточные условия корректности первой смешанной задачи для уравнения (1) в G_∞ с начальными условиями (2) и граничным условием $u(0,t) = \mu(t)/\gamma(t),\ t \geq 0$. Для коэффициентов $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ требования гладкости (11) исчезают, а условия (4), (5), (12) становятся условиями согласования:

$$\gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \ \ \gamma(0)\psi(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0),$$
$$\gamma''(0)\varphi(0) + 2\gamma'(0)\psi(0) + \gamma(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] = \mu''(0).$$

При дополнительных достаточных предположениях $f \in C^2([0,l] \times \mathbb{R}_+)$, $f(0,t) = f(l,t) = 0,\ t \geq 0$, первая смешанная задача для уравнения колебаний ограниченной струны решалась в [5].

Заключение. В данной работе получены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения колебаний струны, начальные данные и граничное данное зависящей от времени характеристической первой косой производной в граничном условии для корректной везде разрешимости смешанной задачи. Выведена в явно аналитическом виде формула единственного классического решения этой смешанной задачи.

Список использованной литературы

1. *Барановская, С. Н.* Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
2. *Шлапакова, Т. С.* Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т. С. Шлапакова, Н. И. Юрчук // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2013. – № 2. – С. 84–90.
3. *Ломовцев, Ф. Е.* Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 83–86.
4. *Ломовцев, Ф. Е.* Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2015. – № 4 (88). – С. 5–11.
5. *Корзюк, В. И.* Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011.

Поступила в редакцию 03.12.2015