УДК 517+530.1

С. В. ЖЕСТКОВ

**О СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО
 НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

(Поступила в редакцию 13.09.2013)

Известно [1; 2], что принадлежность солитона к тому или иному классу определяется его поведением на бесконечности. В частности, если выполняется равенство

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi),$$

где ξ – фазовая переменная, то решение $v(\xi)$ называется уединенной волной (solitary wave solution) или нетопологическим солитоном. Известно [2], что с нетопологическим солитоном уравнения Захарова – Кузнецова связывается анзац вида

$$v(\xi) = A \operatorname{ch}^{-p}(\xi), \quad p > 0, \quad (1)$$

где $A > 0$ представляет собой амплитуду солитона. Очевидно, что тогда

$$v(-\infty) = v(+\infty) = 0.$$

Для нелинейного уравнения Шредингера функция $v(\xi)$ является огибающей солитона, поэтому естественно назвать такой солитон нетопологическим солитоном уравнения Шредингера.

Цель работы – обобщение результатов [3–5], где построены стационарные солитоны, на случай нестационарных нетопологических солитонов для семейства уравнений Шредингера с дисперсионными и нелинейными членами высших порядков и обоснование выбора анзаца (1) для этого семейства.

1. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера со степенным законом нелинейности

$$i(u_t + a_1 u_x + a_2 u_{xxx}) + a_3 u_{xx} + a_4 u_{xxxx} + a_5 |u|^{2m} u = 0, \quad m > 0, \quad (2)$$

и произвольными действительными коэффициентами a_1, a_5 . В отличие от уравнений из работы [3], в (2) содержится член $ia_2 u_{xxx}$, который обеспечивает существование нестационарных солитонов. Солитонные решения уравнения (2) будем строить в виде

$$u(t, x) = v(\xi) \exp\{i\eta\}, \quad \xi = \alpha t + \beta x + \varphi, \quad \eta = \gamma t + \varepsilon x + \psi, \quad (3)$$

где $v(\xi)$ – неизвестная функция, $\alpha, \beta, \varphi, \gamma, \varepsilon, \psi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (3) в (2), найдем

$$i[(\alpha v' + i\gamma v) + a_1(\beta v' + i\varepsilon v) + a_2(\beta^3 v''' + 3i\varepsilon\beta^2 v'' - 3\varepsilon^2\beta v' - i\varepsilon^3 v)] + a_3[\beta^2 v'' + 2i\varepsilon\beta v' - \varepsilon^2 v] + a_4[\beta^4 v'''' + 4i\varepsilon\beta^3 v''' - 6\varepsilon^2\beta^2 v'' - 4i\varepsilon^3\beta v' + \varepsilon^4 v] + a_5 v^{2m+1} = 0. \quad (4)$$

Приравнивая нулю мнимую и действительную части уравнения (4), получим

$$(a_2\beta^3 + 4a_4\varepsilon\beta^3)v''' + (\alpha + a_1\beta - 3a_2\varepsilon^2\beta + 2a_3\varepsilon\beta - 4a_4\varepsilon^3\beta)v' = 0, \quad (5)$$

$$a_4\beta^4 v'''' + (a_3\beta^2 - 3a_2\varepsilon\beta^2 - 6a_4\varepsilon^2\beta^2)v'' - (\gamma + a_1\varepsilon - a_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^2 - a_4\varepsilon^4)v + a_5 v^{2m+1} = 0. \quad (6)$$

Предположим, что

$$a_2 + 4a_4\varepsilon = 0. \quad (7)$$

Тогда с учетом (7) уравнение (5) примет вид

$$(\alpha + a_1\beta - 2a_2\varepsilon^2\beta + 2a_3\varepsilon\beta)v' = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда $v'(\xi) \equiv 0$. Тогда $v(\xi) = \text{const} = d$. Уравнение (8) превратится в тождество. Из уравнения (6) найдем

$$a_5d^{2m} = \gamma + a_1\varepsilon - a_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^2 - a_4\varepsilon^4 \equiv h$$

или

$$d^{2m} = \frac{h}{a_5}.$$

Если

$$\frac{h}{a_5} > 0, \quad (9)$$

то

$$|d| = \left[\frac{h}{a_5} \right]^{\frac{1}{2m}}. \quad (10)$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Пусть выполнены условия (7), (9). Тогда уравнение (2) имеет решение вида

$$u(t, x) = d_* \exp\{i\eta\},$$

где d_* – корень уравнения (10). Это решение является периодическим по t, x .

Рассмотрим случай, когда

$$\alpha + a_1\beta - 2a_2\varepsilon^2\beta + 2a_3\varepsilon\beta = 0. \quad (11)$$

Тогда уравнение (8) превратится в тождество для любой гладкой функции $v(\xi)$, которая определяется из уравнения (6). Перепишем уравнение (6) в виде

$$v^{(m)}(\xi) + av''(\xi) = bv(\xi) + cv^{2m+1}(\xi), \quad (12)$$

где

$$a = \frac{1}{a_4\beta^4}(a_3\beta^2 - 3a_2\varepsilon\beta^2 - 6a_4\varepsilon^2\beta^2), \quad b = \frac{1}{a_4\beta^4}h, \quad c = -\frac{a_5}{a_4\beta^4}.$$

Следуя работе [5], можно рассматривать уравнение (12) как линейную комбинацию второй и четвертой производных, которая должна быть полиномом по v степени не выше $(2m+1)$. Это условие выполняется, если взять вторую производную в виде

$$v''(\xi) = A_1v(\xi) - A_2v^{m+1}(\xi), \quad (13)$$

где A_1, A_2 – произвольные действительные числа. Интегрируя уравнение (13) с учетом краевых условий

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0,$$

получим

$$v(\xi) = \left[\frac{(m+2)A_1}{2A_2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ch}^{-\frac{2}{m}} \left\{ \frac{1}{2} m \sqrt{A_1} (\xi - \xi_0) \right\}, \quad (14)$$

если $A_1 > 0, A_2 > 0$; ξ_0 – произвольная постоянная. Решение (14) совпадает с формой (1), используемой для описания нетопологических солитонов. Чтобы получить законы распространения нетопологических солитонов вида (14) и выразить A_1, A_2 через a, b, c , подставим в уравнение (12) следующий анзац:

$$v(\xi) = \Gamma \text{ch}^{-\frac{2}{m}} \{ \chi(\xi - \xi_0) \}. \quad (14a)$$

где $\Gamma > 0$ – амплитуда солитона; χ – произвольный параметр. В результате получим следующее соотношение:

$$\chi_1 \operatorname{ch}^4(\theta) + \chi_2 \operatorname{ch}^2(\theta) \operatorname{sh}^2(\theta) + \chi_3 \operatorname{sh}^4(\theta) = c\Gamma^{2m}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \chi(\xi - \xi_0), \chi_1 = \lambda_2 \chi^4 - a\mu \chi^2 - b, \chi_2 = a\mu(\mu + 1)\chi^2 - \lambda_1 \chi^4, \chi_3 = \lambda \chi^4, \\ \lambda &= \mu(\mu + 1)(\mu + 2)(\mu + 3), \lambda_1 = \mu(\mu + 1)(6\mu + 8), \lambda_2 = 3\mu^2 + 2\mu, \mu = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

Из (15) найдем

$$\chi_1 = \chi_3, \chi_2 = -2\chi_3, \chi_3 = c\Gamma^{2m}. \quad (16)$$

Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 2. Для того чтобы уравнение (12) имело решение вида (14а), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (16).

На основании теоремы 2 устанавливаем следующий результат.

Т е р е м а 3. Пусть выполнены условия (7), (11), (16). Тогда уравнение (2) имеет нетопологический солитон вида

$$u(t, x) = \Gamma \operatorname{ch}^{\frac{2}{m}}(\theta) \exp\{i\eta\}.$$

Законы (16) можно переписать в виде

$$\lambda_2 \chi^4 - a\mu \chi^2 - b = \lambda \chi^4, a\mu(\mu + 1) - \lambda_1 \chi^2 = -2\lambda \chi^2, \lambda \chi^4 = c\Gamma^{2m}. \quad (17)$$

Они связывают коэффициенты a, b, c уравнения (12) с параметрами χ, Γ солитона. Если $c > 0, a > 0$, то из (17) следует, что

$$\chi^2 = \frac{a\mu(\mu + 1)}{\lambda_1 - 2\lambda} = -\frac{a}{2(\mu^2 + 2\mu + 2)}, \Gamma^{2m} = \chi^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{c}}, b = (\lambda_2 - \lambda) \frac{c}{\lambda} \Gamma^{2m} - a\mu \chi^2. \quad (18)$$

Соотношения (7), (11), (18) играют ключевую роль для существования нетопологических солитонов уравнения (2).

Выразим неизвестные коэффициенты A_1, A_2 уравнения (13) через a, b, c . Из определения χ, Γ и формулы (14) найдем

$$\chi = \frac{1}{2} m \sqrt{A_1}, \Gamma^m = \frac{(m + 2)A_1}{2A_2}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в равенство $\chi_3 = c\Gamma^{2m}$, получим

$$A_2 = \frac{2(m + 2)\sqrt{c}}{m^2 \sqrt{\lambda}}.$$

Найдем коэффициент A_1 . Из соотношения

$$\chi^2 = -\frac{a}{2(\mu^2 + 2\mu + 2)}$$

имеем

$$A_1 = -\frac{2a}{m^2(\mu^2 + 2\mu + 2)} > 0.$$

II. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера с законом нелинейности удвоенной степени

$$i(u_i + a_1 u_x + a_2 u_{xxx}) + a_3 u_{xx} + a_4 u_{xxxx} + a_5 |u|^{2m} u + a_6 |u|^{4m} u = 0, m > 0, \quad (20)$$

и произвольными действительными коэффициентами a_1, a_6 . Солитонное решение уравнения (20) строится в виде (3). Подставляя (3) в (20), найдем

$$\begin{aligned}
& i[(\alpha v' + i\gamma v) + a_1(\beta v' + i\varepsilon v) + a_2(\beta^3 v''' + 3i\varepsilon\beta^2 v'' - 3\varepsilon^2\beta v' - i\varepsilon^3 v)] + \\
& + a_3[\beta^2 v'' + 2i\varepsilon\beta v' - \varepsilon^2 v] + a_4[\beta^4 v'''' + 4i\varepsilon\beta^3 v''' - 6\varepsilon^2\beta^2 v'' - 4i\varepsilon^3\beta v' + \varepsilon^4 v] + \\
& + a_5 v^{2m+1} + a_6 v^{4m+1} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Из (21) получим

$$(a_2\beta^3 + 4a_4\varepsilon\beta^3)v''' + (\alpha + a_1\beta - 3a_2\varepsilon^2\beta + 2a_3\varepsilon\beta - 4a_4\varepsilon^3\beta)v' = 0, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
a_4\beta^4 v'''' + (a_3\beta^2 - 3a_2\varepsilon\beta^2 - 6a_4\varepsilon^2\beta^2)v'' = (\gamma + a_1\varepsilon - a_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^2 - a_4\varepsilon^4)v - \\
- a_5 v^{2m+1} - a_6 v^{4m+1}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Пусть выполнено условие (7). Тогда уравнение (22) запишется в виде (8).

Рассмотрим случай, когда $v'(\xi) \equiv 0$. Тогда $v(\xi) = \text{const} = d$. Из уравнения (23) найдем

$$a_5 d^{2m} + a_6 d^{4m} = h. \tag{24}$$

Это квадратное уравнение относительно величины d^{2m} . Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. Пусть выполнено условие (7) и d_* – корень уравнения (24). Тогда уравнение (20) имеет периодическое решение вида

$$u(t, x) = d_* \exp\{i\eta\}.$$

Рассмотрим случай, когда выполнено условие (11). Тогда уравнение (22) превратится в тождество для любой гладкой функции $v(\xi)$, которая определяется из уравнения (23). Перепишем его в виде

$$v''''(\xi) + av''(\xi) = bv(\xi) - cv^{2m+1}(\xi) - dv^{4m+1}(\xi), \tag{25}$$

где

$$a = \frac{a_3\beta^2 - 3a_2\varepsilon\beta^2 - 6a_4\varepsilon^2\beta^2}{a_4\beta^4}, \quad b = \frac{\gamma + a_1\varepsilon - a_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^2 - a_4\varepsilon^4}{a_4\beta^4}, \quad c = \frac{a_5}{a_4\beta^4}, \quad d = \frac{a_6}{a_4\beta^4}.$$

Из (25) следует, что линейная комбинация второй и четвертой производных должна быть полиномом по v степени не выше $4m + 1$. Это условие выполняется, если взять вторую производную в виде

$$v''(\xi) = A_1 v(\xi) - A_2 v^{2m+1}(\xi), \tag{26}$$

где A_1, A_2 – произвольные действительные числа. Интегрируя уравнение (26) с учетом краевых условий

$$v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0,$$

получим

$$v(\xi) = \left[\frac{A_1(m+1)}{A_2} \right]^{\frac{1}{2m}} \left[\text{ch} \left\{ \sqrt{A_1 m} (\xi - \xi_0) \right\} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \tag{27}$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Решение (27) совпадает с формой (1) нетопологического солитона. Чтобы получить законы распространения солитонов вида (27) и выразить A_1, A_2 через a, b, c, d , подставим в уравнение (25) следующий анзац:

$$v(\xi) = \Gamma \text{ch}^{\frac{1}{m}} \{ \chi (\xi - \xi_0) \}, \tag{28}$$

где $\Gamma > 0$ – амплитуда солитона; χ – произвольный параметр. В результате получим следующее соотношение:

$$\chi_1 \text{ch}^4(\theta) + \chi_2 \text{ch}^2(\theta) \text{sh}^2(\theta) + \chi_3 \text{sh}^4(\theta) + c\Gamma^{2m} \text{ch}^2(\theta) + d\Gamma^{4m} = 0, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
\theta = \chi(\xi - \xi_0), \quad \chi_1 = \lambda_2 \chi^4 - a\mu \chi^2 - b, \quad \chi_2 = a\mu(\mu+1)\chi^2 - \lambda_1 \chi^4, \quad \chi_3 = \lambda \chi^4, \\
\lambda = \mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3), \quad \lambda_1 = \mu(\mu+1)(6\mu+8), \quad \lambda_2 = 3\mu^2 + 2\mu, \quad \mu = \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Из (29) найдем

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \chi_1 - \chi_3 + c\Gamma^{2m} = 0, 3\chi_1 - \chi_2 + 3\chi_3 + 8d\Gamma^{4m} = 0. \quad (30)$$

Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 5. Для того чтобы уравнение (25) имело решение вида (28), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (30).

Соотношения (30) являются законами распространения нетопологических солитонов уравнения (20). Их можно переписать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \lambda x^2 = \frac{1}{2}cy - dy^2, \\ a\mu(\mu + 1)x - \lambda_1 x^2 = 2dy^2, \\ \lambda_2 x^2 - a\mu x - b = -\frac{1}{2}cy - dy^2, \end{cases} \quad (31)$$

где $x = \chi^2, y = \Gamma^{2m}$.

Анализ системы (31) не вызывает принципиальных затруднений, так как при любых положительных значениях $x = x^* > 0, y = y^* > 0$ система (31) становится линейной алгебраической системой относительно величин a, b, c, d . Отметим, что неизвестные коэффициенты A_1, A_2 выражаются через x, y следующим образом:

$$A_1 = \frac{x}{m^2}, A_2 = \frac{x(m+1)}{m^2 y}.$$

Таким образом, в работе построены нетопологические солитоны семейства уравнений Шредингера с дисперсионными и нелинейными членами высших порядков.

Литература

1. *Wei Xu, Jianwei Shen* // Chaos, Solution and Fractals. 2008. Vol. 37. P. 912–917.
2. *Biswas A.* // Int. J. Theor. Phys. 2009. Vol. 48. P. 2698–2703.
3. *Palacios S. L.* // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. Vol. 19. P. 203–207.
4. *Жестков С. В.* // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 3. С. 96–99.
5. *Жестков С. В.* // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 3. С. 84–87.

S. V. ZHESTKOV

SOLITON SOLUTIONS OF THE GENERALIZED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Summary

Non-topological solitons of high dispersive nonlinear Schrödinger equations are obtained.