ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-309-318

Поступила в редакцию 14.09.2018
Received 14.19.2018

Д. Е. Бережнов, Л. И. Минченко

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

К УСЛОВИЮ *R*-РЕГУЛЯРНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Аннотация. Исследуется условие *R*-регулярности (Error Bound) в задачах математического программирования, которое играет важную роль в анализе сходимости численных алгоритмов оптимизации, что подтверждается многочисленными публикациями, и в то же время является достаточно общим условием регулярности (constraint qualification), обеспечивающим справедливость необходимых условий оптимальности Куна – Таккера в задачах математического программирования. В статье представлены новые достаточные условия наличия *R*-регулярности в задачах математического программирования, а также показано, что известные необходимые условия не являются достаточными. Полученные достаточные условия позволяют доказать наличие *R*-регулярности у довольно широкого класса множеств, в том числе и у таких, для которых не выполняются другие известные условия.

Ключевые слова: математическое программирование, условия регулярности, Error Bound

Для цитирования. Бережнов, Д. Е. К условию *R*-регулярности в математическом программировании / Д. Е. Бережнов, Л. И. Минченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 309–318. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-309-318

D. E. Berezhnov, L. I. Minchenko

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

ERROR BOUND PROPERTY IN MATHEMATICAL PROGRAMMING

Abstract. This article is devoted to the Error Bound property (also named *R*-regularity) in mathematical programming problems. This property plays an important role in analyzing the convergence of numerical optimization algorithms, a topic covered by multiple publications, and at the same time it is a relatively generic constraint qualification that guarantees the satisfaction of the necessary Kuhn – Tucker optimality conditions in mathematical programming problems. In the article, new sufficient conditions for the error bound property are described, and it's also shown that several known necessary conditions are insufficient. The sufficient conditions obtained can be used to prove the regularity of a large class of sets including sets that cannot be proven regular by other known constraints.

Keywords: mathematical programming, constraint qualifications, Error Bound

For citation. Berezhnov D. E., Minchenko L. I. Error Bound property in mathematical programming. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 309–318 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-309-318

Введение. Рассмотрим задачу (P) математического программирования

$$f(y)\to \inf,\;\; y\in C=\{y\in R^m \mid h_i(y)\le 0,\;\; i\in I,\;\; h_i(y)=0,\;\; i\in I_0\},$$

где $I=\{1,...,s\}$, $I_0=\{s+1,...,p\}$ и все функции $f(y)$, $h_i(y)$, $i=1,...,p$, предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Положим $I(y)=\{i\in I \mid h_i(y)=0\}$. Через $d_C(y)=d(y,C)$ обозначим евклидово расстояние от точки y до множества C. Будем говорить, что *множество C удовлетворяет условию R*-регулярности *в точке* $y^0\in C$, если найдутся число $M>0$ и окрестность $V(y^0)$ такие, что

$$d_C(y)\le M\max\{0,h_i(y),\; i\in I,\;\; |h_i(y)|,\; i\in I_0\}\quad \forall y\in V(y^0).$$

Начиная с фундаментальной работы А. Хоффмана [1], условию *R*-регулярности посвящены многочисленные публикации [2–17].

R-регулярность играет важную роль как в качестве условия регулярности, обеспечивающего справедливость необходимых условий оптимальности Куна – Таккера (см. [18]), так и удобного средства для анализа сходимости численных алгоритмов оптимизации, для исследования чувствительности решений к возмущениям параметров и в ряде других приложений. Представляет интерес и исследование этого условия для множества оптимальных планов, поскольку в данном случае оно дает возможность оценить расстояние от первоначального или субоптимального плана до оптимального. В этой связи заслуживает внимания вывод достаточных условий, гарантирующих выполнение условия *R*-регулярности в конкретных задачах. Существуют различные подходы получения такого рода достаточных условий. В частности, в работах [11, 12, 14–16] было доказано, что наличие *R*-регулярности следует из выполнения некоторых известных условий регулярности. Одним из наиболее распространенных и простых в проверке условий регулярности является *условие линейной независимости градиентов всех активных ограничений (LICQ)* в точке $y \in C$ градиентов $\{\nabla h_i(y),\ \ i \in I(y) \cup I_0\}$. К сожалению, оно может не выполняться уже в достаточно простых задачах. Более общий характер носит *условие регулярности Мангасаряна – Фромовица (MFCQ)* [19], выполнение которого в точке $y \in C$ требует, чтобы в этой точке система векторов $\{\nabla h_i(y),\ \ i \in I_0\}$ была линейно независимой и существовал вектор $\overline{y}$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0,\ \ i \in I_0,\ \ \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle < 0,\ \ i \in I(y).$$

Пусть $\Lambda^C(y)$ – множество множителей Лагранжа в точке $y \in C$ задачи (*P*), которое определяется как множество векторов $\lambda \in R^p$, удовлетворяющих условиям

$$\nabla f(y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ i \in I(y),\ \ \lambda_i = 0,\ \ i \in I \setminus I(y).$$

Через $\Lambda_0^C(y)$ обозначим множество вырожденных множителей Лагранжа в точке $y \in C$, т. е.

$$\Lambda_0^C(y) = \left\{ \lambda \in R^p \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ i \in I(y),\ \ \lambda_i = 0,\ \ i \in I \setminus I(y) \right\}.$$

Известно (см. [18]), что условие MFCQ для множества *C* в точке $y \in C$ равносильно требованию $\Lambda_0^C(y) = \{0\}$.

Несмотря на широкую общность условия MFCQ, существуют целые классы задач нелинейного программирования, в которых это условие не выполняется и для которых необходимы условия регулярности, отличные от MFCQ или более слабые в отношении требований к ограничениям задачи. В литературе известны условия регулярности, имеющие природу, отличную от MFCQ, и независимые от него. В частности, к ним относится *условие постоянного ранга (CRCQ)* [19] и обобщающее его *ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ)* [10]. Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется условие регулярности постоянного ранга, если для любого множества индексов $J = K \cup S$, где $K \subset I(y)$, $S \subset I_0$, система векторов $\{\nabla h_i(y),\ \ i \in J\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки. Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется ослабленное условие постоянного ранга, если для любого множества индексов $K \subset I(y^0)$ система векторов $\{\nabla h_i(y),\ \ i \in K \cup I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y^0.

В [13, 14] было предложено и обосновано новое условие регулярности, названное *ослабленным (обобщенным) условием Мангасаряна – Фромовица (RMFCQ)*. RMFCQ представляет собой условие более слабое не только по отношению к MFCQ, но и относительно CRCQ и RCRCQ, а также ряда других условий регулярности.

Обозначим через

$$Tc(y) = \left\{ \overline{y} \in R^m \,\middle|\, \exists \text{ последовательности } t_k \downarrow 0 \text{ и } \overline{y}^k \to \overline{y} \text{ такие, что } y + t_k \overline{y}^k \in C \quad \forall k = 1, 2... \right\},$$

$$\hat{T}_C(y) = \left\{ \overline{y} \in R^m \mid \forall t_k \downarrow 0 \ \ и \ \ y^k \underset{y^k \in C}{\to} y^0 \quad \exists \overline{y}^k \to \overline{y} \quad \text{такие, что} \quad y + t_k \overline{y}^k \in C \quad \forall k = 1, 2, ... \right\},$$

$$\Gamma_C(y)=\left\{\bar{y}\in R^m \mid \langle\nabla h_i(y),\bar{y}\rangle\le 0,\ \ i\in I(y),\ \langle\nabla h_i(y),\bar{y}\rangle=0,\ \ i\in I_0\right\},$$

соответственно касательный конус, касательный конус Кларка [22] и линеаризованный касательный конус к множеству C в точке $y\in C$. Очевидно, $\hat{T}_C(y)\subset T_C(y)\subset\Gamma_C(y)$.

В точке $y\in C$ введем множество $I_C^a(y)$ индексов $i\in I(y)$ таких, что $\langle\nabla h_i(y),\bar{y}\rangle=0$ для всех $\bar{y}\in\Gamma_C(y)$. Причем [20], если $I_C^a(y)\ne\varnothing$, то

$$I_C^a(y)=\{i\in I(y)\big|\exists\lambda\in\Lambda_0^C(y),\ \text{для которого}\ \lambda_i>0\}.$$

Будем говорить, что в точке $y^0\in C$ выполнено ослабленное условие регулярности Мангасаряна – Фромовица (RMFCQ), если система векторов $\{\nabla h_i(y),\ \ i\in I_0\cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

В работах [2, 10–12, 14, 16] показано, что выполнение каждого из классических условий регулярности LICQ, MFCQ, CRCQ и RCRCQ, RMFCQ, а также квазинормальности [21] влечет наличие R-регулярности.

Вместе с тем известно, что наиболее общие условия регулярности формулируются непосредственно в терминах касательных конусов к множеству допустимых точек. Такими являются условия Абади и Кларка.

Полярный конус к конусу $K\subset R^m$ будем обозначать

$$K^*=\{y^*\in R^m\big|\langle y^*,\bar{y}\rangle\le 0\quad\forall\bar{y}\in K\},$$

где $\langle y,v\rangle$ – скалярное произведение векторов y и v.

Пусть $v\in R^m$. Обозначим через $\Pi_C(v)$ множество точек из C, ближайших к точке v, и введем нормальный конус Мордуховича [23] $N_C(y)=\limsup\limits_{v\to y}[\mathrm{cone}(v-\Pi_C(v)]$ к множеству C в точке $y\in C$. Известно [24], что $N_{C(K)}(y)^*=\hat{T}_C(y)$.

Говорят, что в точке $y\in C$ выполнено *условие регулярности Абади (ACQ)*, если $T_C(y)=\Gamma_C(y)$. *Условие регулярности Кларка* [24] выполняется в $y\in C$, если $\hat{T}_C(y)=T_C(y)$. В общем случае выполнение условий регулярности Абади и Кларка для множества не влечет его R-регулярность.

Целью настоящей статьи является получение новых достаточных условий для наличия R-регулярности.

Достаточное условие для *R*-регулярности. Пусть $y^0\in C$ и K – некоторое множество индексов из $I(y^0)$. Положим

$$C(K)=\{y\in R^m \mid h_i(y)\le 0,\ \ i\in K\ \ ,\ \ h_i(y)=0,\ \ i\in I_0\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Gamma_{C(K)}(y^0)=\{\bar{y}\in R^m \mid \langle\nabla h_i(y^0),\bar{y}\rangle\le 0,\ \ i\in K,\ \ \ \langle\nabla h_i(y^0),\bar{y}\rangle=0,\ \ \ i\in I_0\}.$$

Как говорилось выше, условия Абади и Кларка для множества C не являются достаточным условием наличия R-регулярности для этого множества. Следующая теорема показывает, однако, что совокупное выполнение этих условий для всех множеств $C(K)$ достаточно для выполнения условия R-регулярности для C.

Отметим, что из [5] известно, что равенство $\hat{T}_C(y^0)=\Gamma_C(y^0)$ является необходимым условием R-регулярности множества C в точке $y^0\in C$. Следующий пример показывает, что данное условие не является достаточным.

П р и м е р 1. Пусть

$$C=\{y\in R^2\big|-y_1^3-y_2\le 0,\ \ -y_1^3+y_2\le 0\},\ \ y^0=(0,0).$$

С одной стороны, нетрудно проверить, что

$$\hat{T}_C(y^0) = \Gamma_C(y^0) = \{\overline{y} \in R^3 \big| \overline{y}_1 \geq 0, \ \ \overline{y}_2 = 0\}.$$

С другой стороны, возьмем любое положительное число ε и рассмотрим точку $y = (-\varepsilon, 0)$. Получим

$$d_C(y) = \varepsilon, \ \ \max\{0, h_1(y), h_2(y)\} = \max\{0, \varepsilon^3, \varepsilon^3\} = \varepsilon^3.$$

Таким образом, для C не выполняется условие R-регулярности в точке y^0. Следовательно, условие $\hat{T}_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$ не гарантирует наличия свойства R-регулярности. Тем не менее, вследствие его необходимости, хорошо обусловленные достаточные условия наличия R-регулярности должны включать это требование.

Т е о р е м а 1. *Пусть $y^0 \in C$ и для любого $K \subset I(y^0)$ справедливо $\hat{T}_{C(K)}(y^0) = \Gamma_{C(K)}(y^0)$ (или равносильное $N_{C(K)}(y^0)^* = \Gamma_{C(K)}(y^0)$). Тогда множество C удовлетворяет условию R-регулярности в y^0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $y^0 \in \operatorname{int} C$, то доказываемое утверждение верно. Пусть y^0 – граничная точка множества C. Будем рассуждать от противного и предположим, что для множества C в точке $y^0 \in C$ не выполняется условие R-регулярности. Тогда существует последовательность $v^k \to y^0$, $v^k \notin C$, такая что

$$d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k), \ \ i \in I, \big|h_i(v^k)\big|, \ \ i \in I_0\} \tag{1}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $y^k = y(v^k) \in \Pi_C(v^k)$, где $\Pi_C(v)$ – множество точек из C ближайших к точке v. Положим

$$\overline{v}^k = (v^k - y^k)\big|v^k - y^k\big|^{-1}, \ k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда $\big|v^k - y^k\big| \leq \big|v^k - y^0\big|$ и, следовательно, $y^k \to y^0$.

Ввиду конечности индексного множества I можно извлечь из последовательностей $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$ подпоследовательности, на которых множество индексов $I(y^k)$ постоянно. Для простоты записи сохранив для этих подпоследовательностей те же обозначения $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$, можно положить $I(y^k) = K \subset I(y^0)$, где K не зависит от y^k. Без потери общности рассуждений мы можем также предположить, что $\overline{v}^k \to \overline{v}$. Тогда из (1) следует

$$d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k), \ \ i \in K, \big|h_i(v^k)\big|, \ \ i \in I_0\}$$

и, следовательно,

$$\big|v^k - y^k\big| > k \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), v^k - y^k \rangle, \ \ i \in K, \big|\langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), v^k - y^k \rangle\big|, \ \ i \in I_0\},$$

где $\tilde{v}_i^k = y^k + \tau_{ki}(v^k - y^k)$, $0 \leq \tau_{ki} \leq 1$. Отсюда

$$\frac{1}{k} > \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), \overline{v}^k \rangle, \ \ i \in K, \big|\langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), \overline{v}^k \rangle\big|, \ \ i \in I_0\}$$

и, следовательно,

$$\max\{0, \langle \nabla h_i(y^0), \overline{v} \rangle, \ \ i \in K, \big|\langle \nabla h_i(y^0), \overline{v} \rangle\big|, \ \ i \in I_0\} \leq 0.$$

Последнее означает, что

$$\langle \nabla h_i(y^0), \overline{v}\rangle,\ i \in K,\ \nabla h_i(y^0), \overline{v}\rangle = 0,\ \ i \in I_0,$$

т. е. $\overline{v} \in \Gamma_{C(K)}(y^0)$.

Однако из определения множества K следует

$$h_i(y^k) = 0,\ \ i \in K,\ \ h_i(y^k) < 0,\ \ i \in I \setminus K,$$

причем вследствие непрерывности функций h_i найдется окрестность $V(y^k)$ такая, что $h_i(y) < 0,\ i \in I \setminus K,$ для всех $y \in V(y^k)$. То есть $h_i(y) \le 0,\ i \in K,$ при $y \in C(K)$ и $h_i(y) < 0,\ i \in I \setminus K,$ при $y \in V(y^k)$, откуда $V(y^k) \cap C(K) \subset C$. Таким образом, $y^k \in \Pi_{C(K) \cap V(y^k)}(v^k)$.

Если $y^k \in \Pi_{C(K)}(v^k)$, то по определению нормального конуса $\overline{v} \in N_{C(K)}(y^0)$. В противном случае существуют достаточно малые числа $\tau_k > 0$ такие, что

$$\Pi_{C(K)}\left(y^k + \tau_k(v^k - y^k)\right) = \{y^k\}$$

и

$$\frac{\tau_k(v^k - y^k)}{\left|\tau_k(v^k - y^k)\right|} = \overline{v}^k \to \overline{v},\ \ \overline{v} \in N_{C(K)}(y^0).$$

Но из условия $\hat{T}_{C(K)}(y^0) = \Gamma_{C(K)}(y^0)$ следует, что $\overline{v} \in \hat{T}_{C(K)}(y^0)$, и, значит, $\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle \le 0$ в силу следствия 6.29 из [24], что невозможно, поскольку $\overline{v} \ne 0$. Полученное противоречие означает, что множество C удовлетворяет условию R-регулярности в точке y^0.

Отметим, что хотя условие $\hat{T}_{C(K)}(y^0) = \Gamma_{C(K)}(y^0)$ кажется на первый взгляд жестким, оно выполняется для достаточно широкого класса множеств. В частности, данное условие выполняется в любой точке множества C, в определении которого $h_i(y) = \langle a_i, y\rangle + b_i$ при всех $i \in I \cup I_0$.

Если множество C в точке $y^0 \in C$ удовлетворяет условию MFCQ, т. е. векторы $\nabla h_i(y^0),\ i \in I_0,$ линейно независимы и существует вектор $\overline{y}$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y}\rangle = 0,\ \ i \in I_0,\ \ \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y}\rangle < 0,\ \ i \in I(y^0),$$

то для множества $C(K)$ векторы $\nabla h_i(y^0),\ i \in I_0,$ линейно независимы и

$$\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y}\rangle = 0,\ \ i \in I_0,\ \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y}\rangle < 0,\ \ i \in K.$$

То есть условие MFCQ для C влечет MFCQ для всех $C(K)$ при $K \subset I(y^0)$. Однако из условия MFCQ следует условие R-регулярности и с учетом необходимого условия для R-регулярности имеет место равенство $\hat{T}_{C(K)}(y^0) = \Gamma_{C(K)}(y^0)$ для всех $K \subset I(y^0)$.

Как известно [10], условие RCRCQ для множества C в точке $y^0 \in C$ влечет наличие R-регулярности для C в данной точке. Нетрудно видеть, что условие RCRCQ сохраняется и для каждого $C(K)$ при $K \subset I(y^0)$. Следовательно, условие RCRCQ для множества C влечет равенство $\hat{T}_{C(K)}(y^0) = \Gamma_{C(K)}(y^0)$ для всех $K \subset I(y^0)$. Отметим, что в противоположность MFCQ и RCRCQ из условия RMFCQ для множества C не следует справедливость этого условия для $C(K)$. Например, при $C = \left\{y \in R^2 \,\middle|\, y_2 \ge 0, y_2 \le 0, y_2^2 \ge 0\right\},\ \ y^0 = (0,0)^T$.

Следующий пример показывает, что теорема 1 позволяет доказать справедливость условия R-регулярности множеств, для которых не выполняются другие известные условия [6–16].

П р и м е р 2. Пусть

$$h_1(y) = 1 - y_1^2 - (y_2 - 1)^2 \le 0,\ \ h_2(y) = 1 - y_1^2 - (y_2 + 1)^2 \le 0,\ \ y^0 = (0,0)^T.$$

Нетрудно видеть, что для C в y^0 условие MFCQ не выполняется. Точно также не выполняются и условия RCRCQ, RMFCQ и квазинормальности. Однако множества

$$C(K_1)=\left\{y\in R^2 \middle| 1-y_1^2-(y_2-1)^2\le 0\right\}$$

при $K_1=\{1\}$ и

$$C(K_2)=\left\{y\in R^2 \middle| 1-y_1^2-(y_2+1)^2\le 0\right\}$$

при $K_2=\{2\}$ удовлетворяют MFCQ в точке y^0. А для множества C в y^0 выполнено условие

$$T_C(y^0)=\Gamma_C(y^0)=\left\{\overline{y}\in R^2 \mid \overline{y}_1\in R, \overline{y}_2=0\right\}.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$N_C(y^0)=\left\{y^*\in R^2 \mid y_1^*\in R, y_2^*=0\right\},\ \ N_C(y^0)^*=\Gamma_C(y^0).$$

Таким образом, C удовлетворяет условию R-регулярности в y^0 согласно теореме 1.

Проверим данное утверждение, используя непосредственно определение R-регулярности. Возьмем значение $v=(v_1,v_2)^T$ достаточно близкое к y^0 и такое, что $v_2>0$. Нетрудно проверить, что в таком случае

$$d_C(v)=1-\sqrt{1-2v_2+(v_1^2+v_2^2)}<v_2-\frac{(v_1^2+v_2^2)}{2},\quad \max\{0,h_1(v),h_2(v)\}=2v_2-(v_1^2+v_2^2).$$

То есть условие R-регулярности в точке $y^0=(0,0)^T$ выполняется в достаточно малой окрестности y^0 с постоянной $M=2$. Аналогичный результат получается и в случае $v_2>0$.

Приведенный ниже пример показывает, что выполнение условия Абади для всех множеств $C(K)$ не достаточно для наличия R-регулярности у C.

П р и м е р 3. Пусть

$$C=\left\{y\in R^2 \mid (y_1^2-y_2)(y_1^2+y_2)\le 0\right\},\ \ y^0=(0,0)^T.$$

Здесь $\Gamma_C(y^0)=T_C(y^0)=R^2$. Однако при $v=(0,\varepsilon)^T$, где $\varepsilon\downarrow 0$, условие $d_C(v)\le M\max\{0,h(y)\}$ не выполняется. Нетрудно проверить, что в данном примере

$$N_C(y^0)=\left\{y^*\in R^2 \mid y_1^*=0, y_2^*\in R\right\}$$

и, следовательно, условие $N_C(y^0)^*=\Gamma_C(y^0)$ не выполняется.

***R*-регулярность для множества решений задачи оптимизации.** В задаче (P) обозначим $\varphi=\min\{f(y)|y\in C\}$, а через $S=\{y\in C \mid f(y)=\varphi\}$ – множество решений. Тогда

$$S=\{y\in R^m \mid h_0(y)\le 0,\ h_i(y)\le 0,\ \ i\in I,\ \ h_i(y)=0,\ \ i\in I_0\},$$

где $h_0(y)=f(y)-\varphi$.

Известное необходимое условие оптимальности Куна – Таккера утверждает, что $\Lambda^C(y)\neq\varnothing$ в любой точке $y\in S$ при наличии условий регулярности для C в этой точке.

Аналогично множеству $\Lambda_0^C(y)$ определим множество $\Lambda_0^S(y)$.

Отметим, что применение классических условий регулярности для доказательства условия R-регулярности для множества S встречает затруднения. Покажем это на примере условия MFCQ. Множество $\Lambda_g^C(y)$ обобщенных множителей Лагранжа определяется как множество векторов $(\lambda_0,\lambda)\in \mathrm{R}^{p+1}$, удовлетворяющих условию

$$\lambda_0 \nabla f(y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \ \ \lambda_0 \ge 0, \ \lambda_i \ge 0, \ \ i \in I(y), \ \lambda_i = 0, \ i \in I \setminus I(y).$$

Известно (см. [25]), что в любой точке $y \in S$ множество $\Lambda_g^C(y)$ содержит ненулевые векторы (λ_0, λ). В то же время нетрудно видеть, что $\Lambda_g^C(y) = \Lambda_0^S(y)$. Таким образом, MFCQ не может выполняться для множества *S*.

Рассмотрим линеаризованный касательный конус для множества *S* в точке $y \in S$:

$$\Gamma_S(y) = \{\overline{y} \in \Gamma_C(y) \mid \langle \nabla f(y), \overline{y} \rangle \le 0\}.$$

Поскольку $\Gamma_S(y)$ при $y \in S$ совпадает с конусом $D_C(y)$ критических направлений множества *C* в точке *y* [26], то для него имеет место ряд свойств (см. леммы 1–3 ниже), полученных в [26]. Введем множество индексов

$$I_D(y) = \left\{ i \in I(y) \mid \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0 \quad \forall \overline{y} \in \Gamma_S(y) \right\}.$$

Л е м м а 1. Пусть $y \in S$. *Тогда существует вектор* $\overline{y} \in \Gamma_S(y)$ *такой, что*

$$\langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0, \ \ i \in I_0 \cup I_D(y), \ \ \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle < 0, \ \ i \in I(y) \setminus I_D(y).$$

Л е м м а 2. *Пусть* $y \in S$ *и* $\lambda \in \Lambda^C(y)$. *Тогда* $\lambda_i = 0$ *для всех* $i \in I(y) \setminus I_D(y)$ *и*

$$I_D(y) = \{ i \in I(y) \mid \exists \lambda \in \Lambda^C(y) \ \text{такой, что} \ \lambda_i > 0 \}.$$

Л е м м а 3. *Пусть* $y \in S$ *и* $\Lambda^C(y) \ne \varnothing$. *Тогда*

$$\mathit{aff}\, \Gamma_S(y) = \{ \overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0, \ \ i \in I_D(y), \ \ \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0, \ \ i \in I_0 \},$$

$$\Gamma_S(y) = \{ \overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0, \ \ i \in I_0 \cup I_D(y), \ \ \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle \le 0, \ \ i \in I(y) \setminus I_D(y) \}.$$

Рассмотрим индексное множество $I_S^a(y^0)$, т. е. множество индексов из $\{0\} \cup I(y^0)$ таких, что $\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle = 0$ для всех $\overline{y} \in \Gamma_S(y^0)$, где под i = 0 понимается индекс, соответствующий ограничению $h_0(y) \le 0$.

Л е м м а 4. *Если* $y^0 \in S$ *и* $\Lambda^C(y^0) \ne \varnothing$, *то* $I_S^a(y^0) = \{0\} \cup I_D(y^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из включения $\Gamma_S(y) \subset \Gamma_C(y)$ непосредственно следует, что $I_D(y^0) \subset I_S^a(y^0)$. Далее, поскольку $\Lambda^C(y^0) \ne \varnothing$, то в силу леммы Фаркаша (см. [25]) $\langle \nabla f(y^0), \overline{y} \rangle \ge 0$ для всех $\overline{y} \in \Gamma_C(y^0)$. Следовательно, $0 \in I_S^a(y^0)$. Таким образом, $0 \cup I_D(y^0) \subset I_S^a(y^0)$.

Покажем, что $I_S^a(y^0) \subset 0 \cup I_D(y^0)$. Допустим, что найдется индекс $i \in I_S^a(y^0)$ такой, что $i \ne 0$ и $i \notin I_D(y^0)$. Тогда, поскольку $i \in I_S^a(y^0)$, то существует множитель $\lambda \in \Lambda_0^S(y^0) = \Lambda^C(y^0)$, для которого $\lambda_i > 0$. Однако в силу леммы 2 такого $\lambda \in \Lambda^C(y^0)$ не существует, поскольку $i \notin I_D(y^0)$. Значит, все ненулевые $i \in I_S^a(y^0)$ лежат в $I_D(y^0)$. Таким образом, $I_S^a(y^0) \subset 0 \cup I_D(y^0)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $y^0 \in S$ *и* $\Lambda^C(y^0) \ne \varnothing$. *Тогда если система векторов* $\{\nabla f(y), \nabla h_i(y), \ i \in I_0 \cup I_D(y^0)\}$ *имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки* y^0, *то множество S удовлетворяет условию R-регулярности в данной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие RMFCQ для множества *S*, обеспечивающее наличие *R*-регулярности, можно записать в виде

$$\operatorname{rank}\{\nabla h_i(y), \ \ i \in I_0 \cup I_S^a(y^0)\} = \operatorname{rank}\{\nabla h_i(y^0), \ \ i \in I_0 \cup I_S^a(y^0)\},$$

что, согласно лемме 4, равносильно постоянному рангу системы $\{\nabla f(y), \nabla h_i(y), \ \ i \in I_0 \cup I_D(y^0)\}$ в окрестности y^0. Теорема доказана.

П р и м е р 4. Пусть

$$C=\left\{y\in R^2\,\middle|\,y_1^2+y_2\le 0,\ \ y_2^2-y_1\le 0\right\},\ \ y^0=(0,0)^T,\ \ f(y)=y_1-y_2.$$

Тогда $S=\{y^0\}$. Здесь $h_1(y)=y_1^2+y_2$, $h_2(y)=y_2^2-y_1$, $h_0(y)=f(y)=y_1-y_2$. Далее

$$\Gamma_S(y^0)=\left\{\overline{y}\in R^2\,\middle|\,\overline{y}_1-\overline{y}_2\le 0,\ \ \overline{y}_2\le 0,\ \ y_1\ge 0\right\}=\left\{\overline{y}\in R^2\,\middle|\,\overline{y}=0\right\},$$

откуда $I_S^a(y^0)=\{0,1,2\}$. Проверим выполнение условий теоремы 2 в окрестности точки y^0:

$$\operatorname{rank}\{\nabla f(y),\nabla h_1(y),\nabla h_2(y)\}=\operatorname{rank}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2y_1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2y_2\end{pmatrix}\right\}=2=\text{const}.$$

Следовательно, множество S обладает R-регулярностью в точке y^0.

П р и м е р 5. Пусть

$$C=\left\{y\in R^2\,\middle|\,y_2\le 0,\ \ y_2^2-y_1\le 0,\ \ y_1\le 1\right\},\ \ f(y)=-y_2,\ \ y^0=(0,0)^T,$$

тогда

$$S=\left\{y\in R^2\,\middle|\,0\le y_1\le 1,\ \ y_2=0\right\},\ \ y^0\in S.$$

Найдем множество

$$\Lambda^C(y^0):-\lambda_2=0,\ \ -1+\lambda_1+2\lambda_2y_2=0,\ \ \lambda_3=0.$$

Отсюда $\lambda_2=\lambda_3=0$, $\lambda_1=1$, и в силу лемм 2 и 4 $I_S^a(y^0)=\{0,1\}$. Тогда

$$\operatorname{rank}\{\nabla f(y),\nabla h_1(y)\}=\operatorname{rank}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=1=\text{const}.$$

Таким образом, условие теоремы 2 выполнено для множества S в точке y^0.

Следовательно, множество S должно удовлетворять условию R-регулярности в точке y^0. Проверим это. Возьмем произвольный вектор $v=(v_1,v_2)^T$ из достаточно малой окрестности y^0. Пусть вначале $v_1\le 0$. Тогда

$$d(v,S)=\sqrt{v_1^2+v_2^2}\le 2\max\{|v_1|,|v_2|\}.$$

Однако

$$\max\{0,h_0(v),h_1(v),h_2(v),h_3(v)\}=\max\{0,-v_2,v_2,v_2^2-v_1,v_1-1\}=$$

$$=\max\left\{|v_2|,v_2^2+|v_1|\right\}\ge\max\{|v_2|,|v_1|\}.$$

Пусть $v_1\le 0$. Тогда $d(v,S)=|v_2|$, в то время как для v из достаточно малой окрестности y^0 справедливо

$$\max\{0,h_0(v),h_1(v),h_2(v),h_3(v)\}=\max\left\{|v_2|,v_2^2-v_1\right\}\ge|v_2|.$$

Список использованных источников

1. Hoffman, A. J. On approximate solutions of systems of linear inequalities / A. J. Hoffman // J. Res. Natl. Bureau Stand. – 1952. – Vol. 49, № 4. – P. 263–265. https://doi.org/10.6028/jres.049.027

2. Robinson, S. M. Stability theory for systems of inequality constraints. Part I: linear systems / S. M. Robinson // SIAM J. Numer. Anal. – 1975. – Vol. 12, № 5. – P. 754–769. https://doi.org/10.1137/0712056

3. Федоров, В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 280 с.

4. Ioffe, A. D. Regular points of Lipschitz functions / A. D. Ioffe // Trans. Am. Math. Soc. – 1979. – Vol. 251. – P. 61–69. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1979-0531969-6

5. Luderer, B. Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 220 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3468-3

6. Pang J. S. Error bounds in mathematical programming / J. S. Pang // Math. Program. – 1997. – Vol. 79, № 1/3. – P. 299–332. https://doi.org/10.1007/bf02614322

7. Wu, Z. L. Sufficient conditions for error bounds / Z. L. Wu, J. J. Ye // SIAM J. Optim. – 2001. – Vol. 12, № 2. – P. 421–435. https://doi.org/10.1137/s1052623400371557

8. Bosch, P. Sufficient conditions for error bounds and applications / P. Bosch, A. Jourani, R. Henrion // Appl. Math. Optim. – 2004. – Vol. 50, № 2. – P. 161–181. https://doi.org/10.1007/s00245-004-0799-5

9. Error bounds: Necessary and sufficient conditions / M. J. Fabian [et al.] // Set-Valued and Variational Analysis. – 2010. – Vol. 18, № 2. – P. 121–149. https://doi.org/10.1007/s11228-010-0133-0

10. Minchenko, L. I. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming / L. I. Minchenko, S. M. Stakhovski // Optimization. – 2011. – Vol. 60, № 4. – P. 429–440. https://doi.org/10.1080/02331930902971377

11. Minchenko, L. Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition / L. Minchenko, S. Stakhovski // SIAM J. Optim. – 2011. – Vol. 21, № 1. – P. 314–332. https://doi.org/10.1137/090761318

12. Minchenko, L. On error bounds for quasinormal programs / L. Minchenko, A. Tarakanov // J. Optim. Theory Appl. – 2011. – Vol. 148, № 3. – P. 571–579. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9768-0

13. Минченко, Л. И. К обобщению условия регулярности Мангасаряна – Фромовица / Л. И. Минченко, С. М. Стаховский // Докл. БГУИР. – 2010. – № 8. – С. 104–109.

14. Kruger, A. Y. On relaxing the Mangasarain – Fromovitz constaint qualication / A. Y. Kruger, L. I. Minchenko, J. V. Outrata // Positivity. – 2014. – Vol. 18, №1. – P. 1–17. ttps://doi.org/10.1007/s11117-013-0238-4

15. Two new weak constraint qualifications and applications / R. Andreani [et. al.] // SIAM J. Optim. – 2012. – Vol. 22, № 3. – P. 1109–1125. https://doi.org/10.1137/110843939

16. Guo, L. New results on constraint qualifications for nonlinear extremum problems and extensions / L. Guo, J. Zhang, G.-H. Lin // J. Optim. Theory Appl. – 2014. – Vol. 163, № 3. – P. 737–754. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0510-6

17. Ye, J. J. Verifiable sufficient conditions for the error bound property of second-order cone complementarity problems / J. J. Ye, J. Zhou // Math. Program. – 2018. – Vol. 171, № 1/2. – P. 361–395. https://doi.org/10.1007/s10107-017-1193-9

18. Mangasarian, O. L. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints / O. L. Mangasarian, S. Fromovitz // J. Math. Anal. Appl. – 1967. – Vol. 17, № 1. – P. 37–47. https://doi.org/10.1016/0022-247x(67)90163-1

19. Janin, R. Direction derivative of the marginal function in nonlinear programming / R. Janin // Math. Program. Study. – 1984. – Vol. 21. – P. 127–138.

20. Лещев, Е. А. Слабо регулярные задачи математического программирования / А. Е. Лещев, Л. И. Минченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 2. – С. 64–70.

21. Bertsekas, D. P. The relation between pseudonormality and quasiregularity in constrained optimization / D. P. Bertsekas, A. E. Ozdaglar // Optim. Methods Software. – 2004. – Vol. 19, № 5. – P. 493–506. https://doi.org/10.1080/10556780410001709420

22. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. – М.: Наука, 1988. – 280 с.

23. Mordukhovich, B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation I. Basic Theory / B. S. Mordukhovich. – Berlin: Springer, 2005. – 1057 p. https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

24. Rockafellar, R. T. Variational Analysis / R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets. – Berlin: Springer, 1998. – 749 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

25. Гороховик, В. В. Конечномерные задачи оптимизации / В. В. Гороховик. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 239 с.

26. Minchenko, L. On strong and weak second-order necessary optimality conditions for nonlinear programming / L. Minchenko, A. Leschov // Optimization. – 2016. – Vol. 65, № 9. – P. 1693–1702. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1179300

References

1. Hoffman A. J. On approximate solutions of systems of linear inequalities. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1952, vol. 49, no. 4, pp. 263–265. https://doi.org/10.6028/jres.049.027

2. Robinson S. M. Stability theory for systems of inequality constraints. Part I: linear systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis,* 1975, vol. 12, no. 5, pp. 754–769. https://doi.org/10.1137/0712056

3. Fedorov V. V. *Numerical Methods of Maximin*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p. (in Russian).

4. Ioffe A. D. Regular points of Lipschitz functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1979, vol. 251, pp. 61–69. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1979-0531969-6

5. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002, 220 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3468-3

6. Pang J. S. Error bounds in mathematical programming. *Mathematical Programming*, 1997, vol. 79, no. 1–3, pp. 299–332. https://doi.org/10.1007/bf02614322

7. Wu Z. L., Ye J. J. Sufficient conditions for error bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, vol. 12, no. 2, pp. 421–435. https://doi.org/10.1137/s1052623400371557

8. Bosch P., Jourani A., Henrion R. Sufficient conditions for error bounds and applications. *Applied Mathematics and Optimization*, 2004, vol. 50, no. 2, pp. 161–181. https://doi.org/10.1007/s00245-004-0799-5

9. Fabian M. J., Henrion R., Kruger A. Y., Outrata J. V. Error Bounds: Necessary and Sufficient Conditions. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 121–149. https://doi.org/10.1007/s11228-010-0133-0

10. Minchenko L. I., Stakhovski S. M. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. *Optimization*, 2011, vol. 60, no. 4, pp. 429–440. https://doi.org/10.1080/02331930902971377

11. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition. *SIAM Journal on Optimization*, 2011, vol. 21, no. 1, pp. 314–332. https://doi.org/10.1137/090761318

12. Minchenko L., Tarakanov A. On error bounds for quasinormal programs. *Journal of Optimization Theory and Applications,* 2011, vol. 148, no. 3, pp. 571–579. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9768-0

13. Minchenko L. I., Stakhovskii S. M. On the generalization of the Mangasarian-Fromovitz constraint. *Doklady BGUIR*, 2010, vol. 8, pp. 104–109 (in Russian).

14. Kruger A. Y., Minchenko L. I., Outrata J. V. On relaxing the Mangasarain–Fromovitz constaint qualication. *Positivity*, 2014, vol. 18, no. 1, pp. 1–17. ttps://doi.org/10.1007/s11117-013-0238-4

15. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S. Two new weak constraint qualifications and applications. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, vol. 22, no. 3, pp. 1109–1125. https://doi.org/10.1137/110843939

16. Guo L., Zhang J., Lin G.-H. New results on constraint qualifications for nonlinear extremum problems and extensions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 163, no. 3, pp. 737–754. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0510-6

17. Ye J. J., Zhou J. Verifiable sufficient conditions for the error bound property of second-order cone complementarity problems. *Mathematical Programming,* 2018, vol. 171, no. 1–2, pp. 361–395. https://doi.org/10.1007/s10107-017-1193-9

18. Mangasarian O. L., Fromovitz S. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1967, vol. 17, no. 1, pp. 37–47. https://doi.org/10.1016/0022-247x(67)90163-1

19. Janin R. Direction derivative of the marginal function in nonlinear programming. *Mathematical Programming Study*, 1984, vol. 21, pp. 127–138. https://doi.org/10.1007/bfb0121214

20. Leshchev E. A., Minchenko L. I. Weakly regular mathematical programming problems. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2014, vol. 2, pp. 64–70 (in Russian).

21. Bertsekas D. P., Ozdaglar A. E. The relation between pseudonormality and quasiregularity in constrained optimization. *Optimization Methods and Software*, 2004, vol. 19, no. 5, pp. 493–506. https://doi.org/10.1080/10556780410001709420

22. Clarke F. *Optimization and non-smooth analysis*. New York, Willey, 1983. 280 p.

23. Mordukhovich B. S. *Variational Analysis and Generalized Differentiation I. Basic Theory*. Berlin, Springer, 2005. 1057 p. https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

24. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. *Variational Analysis*. Berlin, Springer, 1998, 749 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

25. Gorokhovik V. V. *Finite Dimensional Optimization Problems*. Minsk, BSU Publishing Center, 2007. 239 p. (in Russian).

26. Minchenko L., Leschov A. On strong and weak second-order necessary optimality conditions for nonlinear programming. *Optimization*, 2016, vol. 65, no. 9, pp. 1693–1702. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1179300

Информация об авторах

Минченко Леонид Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информатики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: inform@bsuir.by

Бережнов Даниил Евгеньевич – ассистент, кафедра информатики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: daniilberezhnov@gmail.com

Information about the authors

Leonid I. Minchenko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Informatics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: inform@bsuir.by

Daniil E. Berezhnov – Assistant of the Department of Informatics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: daniilberezhnov@ gmail.com