ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 539.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-338-354

Поступила в редакцию 07.06.2019
Received 07.06.2019

А. В. Ивашкевич[1], Е. М. Овсиюк[2], В. М. Редьков[1]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

БЕЗМАССОВОЕ ПОЛЕ СО СПИНОМ 3/2: РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ОПЕРАТОР СПИРАЛЬНОСТИ

Аннотация. Уравнение для вектор-биспинора $\Psi_a(x)$, описывающего безмассовую частицу со спином 3/2 в представлении Рариты – Швингера, преобразовано к базису $\tilde{\Psi}_a(x)$, в котором очевидным становится существование решений волнового уравнения в виде 4-градиента от произвольного биспинора $\tilde{\Psi}_a^0(x) = \partial_a \Psi(x)$. Для 16-мерного уравнения в этом базисе построены два независимых решения, которые не содержат калибровочных компонент. Найдена их связь с известными решениями с фиксированными спиральностями, в полученных разложениях присутствуют все спиральности: $\sigma = \pm 1/2, \ \pm 3/2$.

Ключевые слова: безмассовая частица, спин 3/2, базис Рариты – Швингера, калибровочная симметрия, плоские волны, безмассовые решения, спиральность

Для цитирования. Ивашкевич, А. В. Безмассовое поле со спином 3/2: решения волнового уравнения и оператор спиральности / А. В. Ивашкевич, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 338–354. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-338-354

A. V. Ivashkevich[1], E. M. Ovsiyuk[2], V. M. Red'kov[1]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

ZERO MASS FIELD WITH THE SPIN 3/2: SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION AND THE HELICITY OPERATOR

Abstract. The wave equation for the vector bispinor $\Psi_a(x)$, which describes a zero mass spin 3/2 particle in the Rarita – Schwinger form, is transformed into a new basis of $\tilde{\Psi}_a(x)$, in which the gauge symmetry in the theory becomes evident: there exist solutions in the form of the 4-gradient of an arbitrary bispinor $\tilde{\Psi}_a^0(x) = \partial_a \Psi(x)$. For 16-component equation in this new basis, two independent solutions are constructed in explicit form, which do not contain any gauge constituents. Zero mass solutions are transformed into linear combinations of helicity states, the derived formulas contain the terms with all helicities, $\sigma = \pm 1/2, \ \pm 3/2$.

Keywords: zero mass particle, spin 3/2, Rarita – Schwinger basis, gauge symmetry, plane wave solutions, zero mass solutions, helicity

For citation. Ivashkevich A. V., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Zero mass field with the spin 3/2: solutions of the wave equation and the helicity operator. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 338–354 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-338-354

Введение. После работ Паули – Фирца [1] и Рариты – Швингера [2] в литературе всегда присутствовал интерес к теории частиц с высшими спинами, в том числе и к частице со спином 3/2 [3–19]. Отметим некоторые аспекты теории частицы со спином 3/2. Прежде всего, это вопрос о выборе исходного уравнения. Наиболее последовательно он реализуется в рамках теории релятивистских уравнений первого порядка, хотя много исследований выполнено и с использованием уравнений второго порядка или смешанных вариантов. Выбор того или иного формализма особенно важен при учете внешних полей (электромагнитных и гравитационных), поскольку выбор исходных уравнений для свободного поля существенно влияет на явный вид конечных уравнений. Формализм релятивистских волновых уравнений первого порядка автоматически обеспечивает корректное решение вопроса о числе независимых степеней свободы для частицы со спином 3/2 не только в свободном случае, но и в присутствии внешних полей (см. изложение, например, в [16]). Наибольшее внимание в литературе [1–15] привлекло существование аномальных решений для этой частицы в присутствии внешних полей, которым сопоставляется скорость частицы, большая, чем скорость света. Отдельный интерес представляет случай безмассовой частицы со спином 3/2. Как показали В. Паули и М. Фирц, здесь существует специфическая калибровочная симметрия, которая выражается в том, что 4-градиент от произвольной биспинорной функции порождает решения безмассового волнового уравнения [16].

Основная цель данной работы – построить в явном виде решения типа плоских волн с учетом диагонализации оператора спиральности, при этом за исходный берется формализм уравнений первого порядка в базисе Рариты – Швингера [2].

Об описании безмассового поля со спином 3/2. В базисе Рариты – Швингера уравнение для 16-компонентной волновой функции (вектор-биспинора относительно группы Лоренца) имеет вид (удобно начинать со случая массивной частицы)

$$\left(\gamma^a\partial_a + iM\right)\Psi_c - \frac{1}{3}\left(\gamma^b\partial_c + \gamma_c\partial^b\right)\Psi_b + \frac{1}{3}\gamma_c\left(\gamma^a\partial_a - iM\right)\gamma^b\Psi_b = 0. \tag{1}$$

Ниже будут использоваться формулы для матриц Дирака

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab}, \quad \gamma^a\gamma_a = 4, \quad \gamma^a\gamma^b\gamma^d = \gamma^a g^{bd} - \gamma^b g^{ad} + \gamma^d g^{ab} + i\gamma^5\varepsilon^{abdc}\gamma_c, \tag{2}$$

тензор Леви-Чивита ε^{cabd} определен равенством $\varepsilon^{0123} = +1$. Исходя из уравнений (1) можно получить некоторые дополнительные условия на компоненты волновой функции $\Psi_a(x)$. Так, умножая уравнение (1) слева на матрицу γ^c, после простых вычислений находим первое дополнительное условие

$$\partial_b\,\Psi^b = \frac{iM}{2}\gamma_b\Psi^b. \tag{3}$$

Теперь подействуем на уравнение (1) оператором ∂^c. В результате, используя формулу для произведения трех матриц Дирака, получаем второе дополнительное условие

$$iM\,\partial^c\Psi_c + \gamma^a\partial_a\left(\frac{2}{3}\partial^c\Psi_c - \frac{iM}{3}\gamma^c\Psi_c\right) = 0. \tag{4}$$

С учетом (3) из (4) следует

$$\partial^c\Psi_c = 0 \quad (M \neq 0) \tag{5}$$

и $\gamma\ \Psi\ = 0$. Следовательно, исходное уравнение (1) принимает вид уравнения Дирака для вектор-биспинора, который подчиняется двум дополнительным условиям:

$$(i\gamma^a\partial_a - M)\Psi_c = 0, \quad \partial^c\Psi_c = 0, \quad \gamma^c\Psi_c = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим случай безмассовой частицы. Подставляя $M = 0$ в (1), имеем

$$\gamma^a\partial_a\Psi_c - \frac{1}{3}\left(\gamma^b\partial_c + \gamma_c\partial^b\right)\Psi_b + \frac{1}{3}\gamma_c\gamma^a\partial_a\gamma^b\Psi_b = 0. \tag{7}$$

При этом в качестве первого дополнительного условия получаем

$$\partial_b\,\Psi^b = 0. \tag{8}$$

Второе дополнительно условие запишется так: $\gamma^a \partial_a \partial^c \Psi_c = 0$, что не добавляет ограничений к уравнению (8). Исходное уравнение (7) при учете (8) упрощается лишь незначительно:

$$\gamma^a \partial_a \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma^b \partial_c \Psi_b + \frac{1}{3}\gamma_c \gamma^a \gamma^b \partial_a \Psi_b = 0, \quad \partial_b \Psi^b = 0. \tag{9}$$

Преобразуем уравнение (7) к виду, делающему очевидным существование решений градиентного типа. Будем использовать запись уравнения (7) в матричной форме

$$\Gamma^a \partial_a \Psi = 0, \quad \Psi = (\Psi_l), \tag{10}$$

где действующие в 16-мерном пространстве матрицы Γ^a задаются соотношением

$$(\Gamma^a)_k{}^l = \gamma^a\, \delta_k^l - \frac{1}{3}\gamma^l \delta_k^a - \frac{1}{3}\gamma_k g^{al} + \frac{1}{3}\gamma_k \gamma^a \gamma^l. \tag{11}$$

Совершим над (10) последовательно два преобразования: сначала умножим его слева на невырожденную матрицу C, а затем перейдем к новому представлению волновой функции с помощью линейного преобразования S:

$$\Gamma^a \;\Rightarrow\; \Gamma'^a = C\,\Gamma^a \;\Rightarrow\; \tilde{\Gamma}^a = S\,\Gamma'^a\, S^{-1}, \; \tilde{\Psi} = S\,\Psi. \tag{12}$$

Будем использовать матрицы C и S следующих типов:

$$C_a{}^b = \delta_a^b + c\gamma_a \gamma^b, \quad S_a{}^b = \delta_a^b + a\gamma_a \gamma^b, \tag{13}$$

$$(S^{-1})_a{}^b = \delta_a^b + b\gamma_a \gamma^b, \quad a + b + 4ab = 0. \tag{14}$$

Величины a, b, c – пока произвольные числовые параметры; уравнение для a и b получено из соотношения $SS^{-1} = I$. В соответствии с (12) и (14) вычисляем сначала Γ'^a:

$$(\Gamma'^a)_k{}^l = \left[\gamma^a\, \delta_k^l - \frac{1}{3}\gamma^l\, \delta_k^a + \left(2c - \frac{1}{3}\right)\gamma_k\, g^{al} + \frac{1}{3}\gamma_k\, \gamma^a\, \gamma^l\right],$$

а затем – матрицы $\tilde{\Gamma}^a$:

$$\begin{aligned}(\tilde{\Gamma}^a)_k{}^l &= \gamma^a \delta_\rho^l \left\{1 - \left[\frac{b+1}{3} + b\left(\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a\right)\right]\right\} + \\ &+\gamma^l \delta_k^a \left\{\frac{2b-1}{3} + \left[\frac{b+1}{3} + b\left(\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a\right)\right]\right\} + \\ &+\gamma_k g^{al}\left\{\left[(2c-1)\frac{1+4a}{3} + 2a\right] + \left[\frac{b+1}{3} + b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3} + 2a\right)\right]\right\} + \\ &+i\gamma^5 \varepsilon_k^{als}\gamma_s\left[\frac{b+1}{3} + b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3} + 2a\right)\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Выбирая определенным образом параметры (a, b, c), можно добиться того, чтобы в выражении для $\tilde{\Gamma}^a$ все члены, за исключением содержащего символ Леви-Чивита, обратились в нуль. Для этого должны выполняться равенства

$$a + b + 4ab = 0, \; 1 - \left[\frac{b+1}{3} + b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3} + 2a\right)\right] = 0,$$

$$\frac{2b+1}{3}+\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0,$$

$$(1+4a)\frac{2c-1}{3}+2a+\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0.$$

Легко убедиться, что набор значений

$$a=-\frac{1}{3},\quad b=-1,\quad c=+2 \tag{16}$$

удовлетворяет этим четырем уравнениям. Таким образом, в результате преобразования

$$\tilde{\Psi}_k = S_k{}^l \Psi_l,\quad S_k{}^l = \delta_k^l - \frac{1}{3}\gamma_k\gamma^l \tag{17}$$

для матрицы $\tilde{\Gamma}^a$ получаем выражение $(\tilde{\Gamma}^a)_k{}^l = +i\gamma^5\varepsilon_k{}^{als}\gamma_s$. Следовательно, уравнение для безмассового поля со спином 3/2 можем представить в виде

$$(\tilde{\Gamma}^a)_l{}^k\tilde{\Psi}_l(x)=0 \quad\Rightarrow\quad i\gamma^5\varepsilon_k{}^{nal}\gamma_n\partial_a\tilde{\Psi}_l(x)=0; \tag{18}$$

в (18) можно опустить общий матричный множитель $i\gamma^5$. Очевидно, что вектор-биспинор $\tilde{\Psi}_l^{(0)}$ в виде градиента от произвольного биспинора $\varphi(x)$

$$\tilde{\Psi}_l^{(0)}(x)=\partial_l\varphi(x) \tag{19}$$

всегда будет решением уравнения (18). Это называют калибровочной симметрией уравнения для безмассовой частицы – все решения определены с точностью до градиента от произвольного биспинора. В исходном базисе градиентные решения представляются в виде

$$\Psi_l^{(0)}(x)=(\delta_l{}^k-\gamma_l\gamma^k)\partial_k\varphi(x). \tag{20}$$

Плоские волны. Систему уравнений (18) можно представить в матричной форме (введем обозначение $\tilde{\Psi}^l(x)=\Phi^l(x)$):

$$\begin{vmatrix} 0 & (\gamma^2\partial_3-\gamma^3\partial_2) & (\gamma^3\partial_1-\gamma^1\partial_3) & (\gamma^1\partial_2-\gamma^2\partial_1) \\ (\gamma^2\partial_3-\gamma^3\partial_2) & 0 & -(\gamma^3\partial_0+\gamma^0\partial_3) & (\gamma^2\partial_0+\gamma^0\partial_2) \\ (\gamma^3\partial_1-\gamma^1\partial_3) & (\gamma^3\partial_0+\gamma^0\partial_3) & 0 & -(\gamma^1\partial_0+\gamma^0\partial_1) \\ (\gamma^1\partial_2-\gamma^2\partial_1) & -(\gamma^2\partial_0+\gamma^0\partial_2) & (\gamma^1\partial_0+\gamma^0\partial_1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

В случае плоских волн для волновой функции используется подстановка

$$\Phi^l(x)=e^{ik_ax^a}A^l,\quad k_ax^a=k_0x^0+k_jx^j,\quad k_0=-\varepsilon,$$

где $A^l=(A^0,A^1,A^2,A^3)$ – 4-мерные столбцы. Тогда уравнение (21) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 0 & (\gamma^2k_3-\gamma^3k_2) & (\gamma^3k_1-\gamma^1k_3) & (\gamma^1k_2-\gamma^2k_1) \\ (\gamma^2k_3-\gamma^3k_2) & 0 & -(\gamma^3k_0+\gamma^0k_3) & (\gamma^2k_0+\gamma^0k_2) \\ (\gamma^3k_1-\gamma^1k_3) & (\gamma^3k_0+\gamma^0k_3) & 0 & -(\gamma^1k_0+\gamma^0k_1) \\ (\gamma^1k_2-\gamma^2k_1) & -(\gamma^2k_0+\gamma^0k_2) & (\gamma^1k_0+\gamma^0k_1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Легко убедиться, что градиентные решения $\Phi_l^{(0)}(x) = \partial_l e^{ikx}\varphi$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} 0 & (\gamma^2 k_3 - \gamma^3 k_2) & (\gamma^3 k_1 - \gamma^1 k_3) & (\gamma^1 k_2 - \gamma^2 k_1) \\ (\gamma^2 k_3 - \gamma^3 k_2) & 0 & -(\gamma^3 k_0 + \gamma^0 k_3) & (\gamma^2 k_0 + \gamma^0 k_2) \\ (\gamma^3 k_1 - \gamma^1 k_3) & (\gamma^3 k_0 + \gamma^0 k_3) & 0 & -(\gamma^1 k_0 + \gamma^0 k_1) \\ (\gamma^1 k_2 - \gamma^2 k_1) & -(\gamma^2 k_0 + \gamma^0 k_2) & (\gamma^1 k_0 + \gamma^0 k_1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k^0\varphi \\ -k_1\varphi \\ -k_2\varphi \\ -k_3\varphi \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Ниже будем использовать представление матриц Дирака в спинорном базисе:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Построим решения системы (22), представимой в виде четырех уравнений:

$$\begin{gathered} (\gamma^2 k_3 - \gamma^3 k_2) A^1 + (\gamma^3 k_1 - \gamma^1 k_3) A^2 + (\gamma^1 k_2 - \gamma^2 k_1) A^3 = 0, \\ (\gamma^3 k_0 + \gamma^0 k_3) A^2 - (\gamma^2 k_0 + \gamma^0 k_2) A^3 = (\gamma^2 k_3 - \gamma^3 k_2) A^0, \\ -(\gamma^3 k_0 + \gamma^0 k_3) A^1 + (\gamma^1 k_0 + \gamma^0 k_1) A^3 = (\gamma^3 k_1 - \gamma^1 k_3) A^0, \\ (\gamma^2 k_0 + \gamma^0 k_2) A^1 - (\gamma^1 k_0 + \gamma^0 k_1) A^2 = (\gamma^1 k_2 - \gamma^2 k_1) A^0. \end{gathered} \tag{24}$$

Из первого уравнения, учитывая равенство $(\gamma^1 k_2 - \gamma^2 k_1)(\gamma^1 k_2 - \gamma^2 k_1) = -k_2^2 - k_1^2$, выразим A^3:

$$\begin{gathered} (k_1^2 + k_2^2) A^3 = (\gamma^1\gamma^2 k_2 k_3 + k_1 k_2 \gamma^2\gamma^3 + k_3 k_1 + \gamma^3\gamma^1 k_2^2) A^1 + \\ +(\gamma^1\gamma^3 k_2 k_1 + k_1 k_3 \gamma^2\gamma^1 + k_3 k_2 + \gamma^3\gamma^2 k_1^2) A^2. \end{gathered} \tag{25}$$

Аналогично из 4-го уравнения выразим A^0:

$$\begin{gathered} -(k_1^2 + k_2^2) A^0 = (\gamma^1\gamma^2 k_0 k_2 + k_1 k_2 \gamma^0\gamma^2 + k_1 k_0 + \gamma^1\gamma^0 k_2^2) A^1 + \\ +(\gamma^2\gamma^1 k_0 k_1 + k_2 k_1 \gamma^0\gamma^1 + k_2 k_0 + \gamma^2\gamma^0 k_1^2) A^2. \end{gathered} \tag{26}$$

Временно будем использовать обозначения $k_1 = a,\ k_2 = b,\ k_3 = c,\ k_0 = d$. Тогда формулы для A^3, A^0 запишутся так:

$$(a^2 + b^2) A^3 = (bc\gamma^1\gamma^2 + ab\gamma^2\gamma^3 + ac + b^2\gamma^3\gamma^1) A^1 + (ab\gamma^1\gamma^3 + ac\gamma^2\gamma^1 + bc + a^2\gamma^3\gamma^2) A^2, \tag{27а}$$

$$-(a^2 + b^2) A^0 = (db\gamma^1\gamma^2 + ab\gamma^0\gamma^2 + da + b^2\gamma^1\gamma^0) A^1 + (da\gamma^2\gamma^1 + ab\gamma^0\gamma^1 + db + a^2\gamma^2\gamma^0) A^2. \tag{27б}$$

Учитывая эти равенства, исключаем переменные A^0, A^3 из уравнений 2 и 3 системы (24). В результате находим два уравнения, связывающие компоненты переменные A^1, A^2:

$$\begin{gathered} ab\{d\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + c\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + a\,\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + b\,\gamma^0\gamma^3\gamma^1\} A^2 = \\ = b^2\{d\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + c\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + a\,\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + b\,\gamma^0\gamma^3\gamma^1\} A^1, \end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered} ab\{d\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + c\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + a\,\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + b\,\gamma^0\gamma^3\gamma^1\} A^1 = \\ = a^2\{d\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + c\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + a\,\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + b\,\gamma^0\gamma^3\gamma^1\} A^2. \end{gathered} \tag{29}$$

Используя обозначение

$$K = d\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + c\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + a\,\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + b\,\gamma^0\gamma^3\gamma^1, \tag{30}$$

уравнения (28)–(29) записываем так:

$$aK\,A^2 = bKA^1,\quad bK\,A^1 = aKA^2 \quad\Rightarrow\quad K(aA^2 - bA^1) = 0,\quad K(bA^1 - aA^2) = 0.$$

Фактически здесь имеем только одно уравнение (ниже обозначения $k_a = (d, a, b, c)$ не применяем)

$$K(k_1 A^2 - k_2 A^1) = 0, \tag{31}$$

$$K = k_0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + k_1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + k_2\gamma^0\gamma^3\gamma^1 + k_3\gamma^0\gamma^1\gamma^2. \tag{32}$$

С использованием матрицы

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},\quad (\gamma^5)^2 = I,\quad \gamma^5\gamma^a = -\gamma^a\gamma^5 \tag{33}$$

и тождеств

$$\begin{gathered} i\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3,\quad i\gamma^5\gamma^1 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1 = \gamma^0\gamma^2\gamma^3, \\ i\gamma^5\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = \gamma^0\gamma^3\gamma^1,\quad i\gamma^5\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2 \end{gathered} \tag{34}$$

находим другое представление для матрицы K:

$$K = i\gamma^5(k_0\gamma^0 + k_1\gamma^1 + k_2\gamma^2 + k_3\gamma^3). \tag{35}$$

Уравнение (31) для комбинации $A = (aA^2 - bA^1)$ записываем так (множитель $i\gamma^5$ можно убрать):

$$(k_0\gamma^0 + k_1\gamma^1 + k_2\gamma^2 + k_3\gamma^3)A = 0,\quad A = (k_1A^2 - k_2A^1). \tag{36}$$

Учитывая явный вид матриц Дирака, уравнение (36) представляем в виде (обозначаем элементы 4-столбца A как a, b, c, d)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & k^0 - k_3 & -k_1 + ik_2 \\ 0 & 0 & -k_1 - ik_2 & k^0 + k_3 \\ k^0 + k_3 & k_1 - ik_2 & 0 & 0 \\ k_1 + ik_2 & k^0 - k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 0,$$

отсюда следуют две независимые однородные подсистемы (пусть $k_0 = -\varepsilon,\ \varepsilon > 0$):

$$\begin{gathered} (\varepsilon + k_3)c + (k_1 - ik_2)d = 0,\quad (k_1 + ik_2)c + (\varepsilon - k_3)d = 0, \\ (\varepsilon - k_3)a - (k_1 - ik_2)b = 0,\quad -(k_1 + ik_2)a + (\varepsilon + k_3)b = 0. \end{gathered}$$

Их решения такие:

$$b = \frac{\varepsilon - k_3}{k_1 - ik_2}a = \frac{k_1 + ik_2}{\varepsilon + k_3}a,\quad d = -\frac{\varepsilon + k_3}{k_1 - ik_2}c = -\frac{k_1 + ik_2}{\varepsilon - k_3}c. \tag{37}$$

Для сокращения формул (37) временно опустим знаменатели:

$$\frac{\varepsilon - k_3}{k_1 - ik_2} \Rightarrow \varepsilon - k_3,\qquad \frac{\varepsilon + k_3}{k_1 - ik_2} \Rightarrow \varepsilon + k_3. \tag{38}$$

Следовательно,

$$A=-k_2A^1+k_1A^2=a\left|\begin{matrix}1\\(\varepsilon-k_3)\\0\\0\end{matrix}\right|+c\left|\begin{matrix}0\\0\\1\\-(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|. \tag{39}$$

Поскольку параметры a и c произвольные, имеем два линейно независимых решения. Выбираем их в следующем виде:

$$(1),\quad a=k_1,\quad c=-k_2,\quad A_{(1)}=-k_2A^1_{(1)}+k_1A^2_{(1)}=-k_2\left|\begin{matrix}0\\0\\1\\-(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|+k_1\left|\begin{matrix}1\\(\varepsilon-k_3)\\0\\0\end{matrix}\right|; \tag{40}$$

$$(2),\quad a=-k_2,\quad c=k_1,\quad A_{(2)}=-k_2A^1_{(2)}+k_1A^2_{(2)}=-k_2\left|\begin{matrix}1\\(\varepsilon-k_3)\\0\\0\end{matrix}\right|+k_1\left|\begin{matrix}0\\0\\1\\-(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|. \tag{41}$$

Таким образом, найдены два решения:

$$(1)\qquad A^1_{(1)}=\left|\begin{matrix}0\\0\\1\\-(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|,\quad A^2_{(1)}=\left|\begin{matrix}1\\(\varepsilon-k_3)\\0\\0\end{matrix}\right|; \tag{42}$$

$$(2)\qquad A^1_{(2)}=\left|\begin{matrix}1\\(\varepsilon-k_3)\\0\\0\end{matrix}\right|,\quad A^2_{(2)}=\left|\begin{matrix}0\\0\\1\\-(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|. \tag{43}$$

Ниже будем учитывать соотношения

$$k_1A^1_{(1)}+k_2A^2_{(1)}=\left|\begin{matrix}k_2\\k_2(\varepsilon-k_3)\\k_1\\-k_1(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|,\quad k_1A^1_{(2)}+k_2A^2_{(2)}=\left|\begin{matrix}k_1\\k_1(\varepsilon-k_3)\\k_2\\-k_2(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|, \tag{44}$$

$$-k_2A^1_{(1)}+k_1A^2_{(1)}=\left|\begin{matrix}k_1\\k_1(\varepsilon-k_3)\\-k_2\\+k_2(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|,\quad -k_2A^1_{(2)}+k_1A^2_{(2)}=\left|\begin{matrix}-k_2\\-k_2(\varepsilon-k_3)\\k_1\\-k_1(\varepsilon+k_3)\end{matrix}\right|. \tag{45}$$

Компоненты $A^0_{(1)}$, $A^3_{(1)}$ и $A^0_{(2)}$, $A^3_{(2)}$ могут быть найдены из соотношений (25) и (26) – их удобнее переписать в другом виде:

$$(k_1^2+k_2^2)A^3=k_3(k_1A^1+k_2A^2)-(k_1\gamma^2\gamma^3+k_2\gamma^3\gamma^1+k_3\gamma^1\gamma^2)(-k_2A^1+k_1A^2), \tag{46}$$

$$-(k_1^2+k_2^2)A^0 = k_0(k_1A^1+k_2A^2)+(\gamma^0\gamma^1k_2-\gamma^0\gamma^2k_1-k_0\gamma^1\gamma^2)(-k_2A^1+k_1A^2). \tag{47}$$

Отсюда, учитывая явный вид матриц Дирака, находим выражения для $A^0_{(1)}$, $A^3_{(1)}$ и $A^0_{(2)}$, $A^3_{(2)}$:

$$A^3_{(1)} = \begin{vmatrix} (k_1+ik_2)^{-1}[ik_3+ik_1(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[ik_1-ik_3(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1+ik_2)^{-1}[k_3+ik_2(\varepsilon+k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[-ik_2-k_3(\varepsilon+k_3)] \end{vmatrix}, \quad A^0_{(1)} = \begin{vmatrix} (k_1+ik_2)^{-1}[-ik_0-ik_1(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[+ik_1+ik_0(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1+ik_2)^{-1}[-k_0+ik_2(\varepsilon+k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[+ik_2+k_0(\varepsilon+k_3)] \end{vmatrix}; \tag{48}$$

$$A^3_{(2)} = \begin{vmatrix} (k_1+ik_2)^{-1}[+k_3-ik_2(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[-ik_2+k_3(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1+ik_2)^{-1}[+ik_3-ik_1(\varepsilon+k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[+ik_1+ik_3(\varepsilon+k_3)] \end{vmatrix}, \quad A^0_{(2)} = \begin{vmatrix} (k_1+ik_2)^{-1}[-k_0+ik_2(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[-ik_2-k_0(\varepsilon-k_3)] \\ (k_1+ik_2)^{-1}[-ik_0-ik_1(\varepsilon+k_3)] \\ (k_1-ik_2)^{-1}[-ik_1-ik_0(\varepsilon+k_3)] \end{vmatrix}. \tag{49}$$

Проверить полученные результаты можно, подставив эти решения в исходные уравнения (24).

Связь с исходным базисом. Напомним формулы, связывающие исходный базис $\Psi_l(x)$ с базисом $\tilde{\Psi}_l(x)$, в котором найдены решения $\Psi_l = (\delta_l^k - \gamma_l\gamma^k)\tilde{\Psi}_k$. Для решений типа плоских волн

$$\Psi_l(x) = e^{ikx}B_l, \quad \tilde{\Psi}_l(x) = e^{ikx}A_l, \quad l = 0,1,2,3, \tag{50}$$

соотношения связи запишутся так:

$$B^0 = A^0-\gamma^0(\gamma^0A^0-\gamma^1A^1-\gamma^2A^2-\gamma^3A^3), \quad B^1 = A^1-\gamma^1(\gamma^0A^0-\gamma^1A^1-\gamma^2A^2-\gamma^3A^3),$$
$$B^2 = A^2-\gamma^2(\gamma^0A^0-\gamma^1A^1-\gamma^2A^2-\gamma^3A^3), \quad B^3 = A^3-\gamma^3(\gamma^0A^0-\gamma^1A^1-\gamma^2A^2-\gamma^3A^3). \tag{51}$$

Вычислим блоки

$$(\gamma^0A^0-\gamma^1A^1-\gamma^2A^2-\gamma^3A^3)_{(1)} = \begin{vmatrix} (k_1+ik_2)^{-1}[-k_0+2ik_2(\varepsilon+k_3)+k_3]-(\varepsilon+k_3) \\ (k_1-ik_2)^{-1}[2ik_2+(k_0+k_3)(\varepsilon+k_3)]+1 \\ (k_1+ik_2)^{-1}i[-k_0-2k_1(\varepsilon-k_3)-k_3]+i(\varepsilon-k_3) \\ (k_1-ik_2)^{-1}i[2k_1+(k_0-k_3)(\varepsilon-k_3)]-i \end{vmatrix}, \tag{52}$$

$$(\gamma^0A^0-\gamma^1A^1-\gamma^2A^2_{(2)}-\gamma^3A^3)_{(2)} = \begin{vmatrix} (k_1+ik_2)^{-1}i[-k_0-2k_1(\varepsilon+k_3)+k_3]+i(\varepsilon+k_3) \\ (k_1-ik_2)^{-1}i[-2k_1-(k_0+k_3)(\varepsilon+k_3)]+i \\ (k_1+ik_2)^{-1}[-k_0+2ik_2(\varepsilon-k_3)-k_3]-(\varepsilon-k_3) \\ (k_1-ik_2)^{-1}[-2ik_2-(k_0-k_3)(\varepsilon-k_3)]-1 \end{vmatrix}. \tag{53}$$

Теперь (52) и (53) нужно учесть в формулах (51), последние разбиваются на две группы в соответствии с существованием двух решений. После необходимых вычислений получаем (при этом вводим сокращающие запись формул обозначения):

$$B^1_{(1)} = \begin{vmatrix} (k_1-ik_2)^{-1}i[+2k_1+(k_0-k_3)(\varepsilon-k_3)]-i \\ (k_1+ik_2)^{-1}i[-k_0-2k_1(\varepsilon-k_3)-k_3]+i(\varepsilon-k_3) \\ (k_1-ik_2)^{-1}[-2ik_2-(k_0+k_3)(\varepsilon+k_3)] \\ (k_1+ik_2)^{-1}[+k_0-2ik_2(\varepsilon+k_3)-k_3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix}_{(1)},$$

$$B^1_{(2)} = \left|\begin{array}{c} (k_1 - ik_2)^{-1}[-2ik_2 - (k_0 - k_3)(\varepsilon - k_3)] \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[-k_0 + 2ik_2(\varepsilon - k_3) - k_3] \\ (k_1 - ik_2)^{-1} i[+2k_1 + (k_0 + k_3)(\varepsilon + k_3)] - i \\ (k_1 + ik_2)^{-1} i[+k_0 + 2k_1(\varepsilon + k_3) - k_3] - i(\varepsilon + k_3) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{array}\right|_{(2)},$$

$$B^2_{(1)} = \left|\begin{array}{c} (k_1 - ik_2)^{-1}[+2k_1 + (k_0 - k_3)(\varepsilon - k_3)] \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[+k_0 + 2k_1(\varepsilon - k_3) + k_3] \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[-2k_2 + i(k_0 + k_3)(\varepsilon + k_3)] + i \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[+ik_0 + 2k_2(\varepsilon + k_3) - ik_3] + i(\varepsilon + k_3) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{array}\right|_{(1)},$$

$$B^2_{(2)} = \left|\begin{array}{c} (k_1 - ik_2)^{-1}[-2k_2 + i(k_0 - k_3)(\varepsilon - k_3)] + i \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[-ik_0 - 2k_2(\varepsilon - k_3) - ik_3] - i(\varepsilon - k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[+2k_1 + (k_0 + k_3)(\varepsilon + k_3)] \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[-k_0 - 2k_1(\varepsilon + k_3) + k_3] \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{array}\right|_{(2)},$$

$$B^3_{(1)} = \left|\begin{array}{c} (k_1 + ik_2)^{-1}[-ik_1(\varepsilon - k_3) - ik_3] + i(\varepsilon - k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[-ik_1 - ik_0(\varepsilon - k_3)] + i \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[-ik_2(\varepsilon + k_3) - k_3] + (\varepsilon + k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[+ik_2 + k_0(\varepsilon + k_3)] + 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{array}\right|_{(1)},$$

$$B^3_{(2)} = \left|\begin{array}{c} (k_1 + ik_2)^{-1}[+ik_2(\varepsilon - k_3) - k_3] - (\varepsilon - k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[+ik_2 + k_0(\varepsilon - k_3)] + 1 \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[+ik_0 + ik_1(\varepsilon + k_3)] - i(\varepsilon + k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[-ik_1 - ik_0(\varepsilon + k_3)] + i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{array}\right|_{(2)},$$

$$B^0_{(1)} = \left|\begin{array}{c} (k_1 + ik_2)^{-1}[+ik_1(\varepsilon - k_3) + ik_3] - i(\varepsilon - k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[-ik_1 + ik_3(\varepsilon - k_3)] + i \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[-ik_2(\varepsilon + k_3) - k_3] + (\varepsilon + k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[-ik_2 - k_3(\varepsilon + k_3)] - 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{array}\right|_{(1)},$$

$$B^0_{(2)} = \left|\begin{array}{c} (k_1 + ik_2)^{-1}[-ik_2(\varepsilon - k_3) + k_3] + (\varepsilon - k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[+ik_2 - k_3(\varepsilon - k_3)] + 1 \\ (k_1 + ik_2)^{-1}[+ik_1(\varepsilon + k_3) - ik_3] - i(\varepsilon + k_3) \\ (k_1 - ik_2)^{-1}[+ik_1 + ik_3(\varepsilon + k_3)] - i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{array}\right|_{(2)}. \qquad (54)$$

Явный вид решений (54) можно упростить, если воспользоваться обозначениями

$$k_0 = -\varepsilon, \quad (\varepsilon + k_3)(\varepsilon - k_3) = (k_1 - ik_2)(k_1 + ik_2), \quad \varepsilon = k, \quad \frac{k_j}{\varepsilon} = n_j, \quad n_j n_j = 1.$$

В результате получаем

$$a_1^{(1)} = 0, \quad a_2^{(1)} = 1, \quad a_3^{(1)} = -\frac{n_2}{1 + n_3} - \frac{in_3}{n_1 + in_2}, \quad a_0^{(1)} = \frac{n_2}{1 + n_3} + \frac{in_3}{n_1 + in_2},$$

$$a_1^{(2)}=1, \quad a_2^{(2)}=0, \quad a_3^{(2)}=-\frac{n_1}{1+n_3}-\frac{n_3}{n_1+in_2}, \quad a_0^{(2)}=\frac{n_1}{1+n_3}+\frac{n_3}{n_1+in_2}, \tag{55}$$

$$b_1^{(1)}=0, \quad b_2^{(1)}=\frac{n_1+in_2}{1+n_3}, \quad b_3^{(1)}=\frac{n_2n_3+in_1}{(n_1-in_2)(1+n_3)}, \quad b_0^{(1)}=\frac{n_2+in_1n_3}{(n_1-in_2)(1+n_3)},$$
$$b_1^{(2)}=\frac{n_1+in_2}{1+n_3}, \quad b_2^{(2)}=0, \quad b_3^{(2)}=\frac{n_1n_3-in_2}{(n_1-in_2)(1+n_3)}, \quad b_0^{(2)}=\frac{n_1-in_2n_3}{(n_1-in_2)(1+n_3)}, \tag{56}$$

$$c_1^{(1)}=1, \quad c_2^{(1)}=0, \quad c_3^{(1)}=\frac{n_1}{1-n_3}-\frac{n_3}{n_1+in_2}, \quad c_0^{(1)}=\frac{n_1}{1-n_3}-\frac{n_3}{n_1+in_2},$$
$$c_1^{(2)}=0, \quad c_2^{(2)}=1, \quad c_3^{(2)}=\frac{n_2}{1-n_3}-\frac{i}{n_1+in_2}, \quad c_0^{(2)}=\frac{n_2}{1-n_3}-\frac{in_3}{n_1+in_2}, \tag{57}$$

$$d_1^{(1)}=-\frac{n_1+in_2}{1-n_3}, \quad d_2^{(1)}=0, \quad d_3^{(1)}=\frac{-n_1n_3-in_2}{(1-n_3)(n_1-in_2)}, \quad d_0^{(1)}=\frac{-n_1-in_2n_3}{(1-n_3)(n_1-in_2)},$$
$$d_1^{(2)}=0, \quad d_2^{(2)}=-\frac{n_1+in_2}{1-n_3}, \quad d_3^{(2)}=\frac{-n_2n_3+in_1}{(1-n_3)(n_1-in_2)}, \quad d_0^{(2)}=\frac{-n_2+in_1n_3}{(1-n_3)(n_1-in_2)}. \tag{58}$$

Оператор спиральности. В работе [19] был детально исследован вопрос о нахождении собственных векторов оператора спиральности для вектор-биспинорного поля, при этом имелся в виду случай массивной частицы, но часть полученных в [19] результатов справедлива и для безмассового случая. Напомним использованные там обозначения и полученный результат.

Волновая функция $\Psi_l(x)$ (A – биспинорный индекс, (l) – векторный индекс):

$$\Psi_{A(l)}(x)=\begin{vmatrix}\Psi_{1(0)}(x) & \Psi_{1(1)}(x) & \Psi_{1(2)}(x) & \Psi_{1(3)}(x)\\ \Psi_{2(0)}(x) & \Psi_{2(1)}(x) & \Psi_{2(2)}(x) & \Psi_{2(3)}(x)\\ \Psi_{3(0)}(x) & \Psi_{3(1)}(x) & \Psi_{3(2)}(x) & \Psi_{3(3)}(x)\\ \Psi_{4(0)}(x) & \Psi_{4(1)}(x) & \Psi_{4(2)}(x) & \Psi_{4(3)}(x)\end{vmatrix}=$$
$$=e^{ikx}\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3\\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}=e^{ikx}\{A_0,A_1,A_2,A_3\}. \tag{59}$$

Возможны четыре собственных значения σ для оператора спиральности (два из них 2-кратно вырождены):

$$\sigma=-\frac{1}{2}k,-\frac{1}{2}k, \quad +\frac{1}{2}k,+\frac{1}{2}k, \quad -\frac{3}{2}k, \quad +\frac{3}{2}k, \quad k=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_2^2}. \tag{60}$$

Будем использовать безразмерные величины

$$\frac{k_i}{k}=n_i, \quad n_in_i=1, \quad \frac{\sigma}{k}\Rightarrow\sigma, \quad \sigma=-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},-\frac{3}{2},+\frac{3}{2}. \tag{61}$$

Для каждого из значений $\sigma=\pm 1/2$ существуют по два собственных состояния, которые отмечены верхними индексами (I) и (II):

$$\{a_0,b_0,c_0,d_0,a_j^{(I)},b_j^{(I)}\}, \quad \{a_0,b_0,c_0,d_0,a_j^{(II)},b_j^{(II)}\},$$

где величины a_0, b_0, c_0, d_0 одинаковы для обоих типов (I) и (II):

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}, \quad c_0 = 1, \quad d_0 = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2},$$

а векторные составляющие различные:

$$a_j^{(I)} = n_j, \quad b_j^{(I)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} a_j^{(I)}, \quad c_j^{(I)} = n_j, \quad d_j^{(I)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} c_j^{(I)},$$

$$a_1^{(II)} = \pm in_1 n_3 + n_2, \quad a_2^{(II)} = \pm in_2 n_3 - n_1, \quad a_3^{(2)} = \mp i(1 - n_3^2), \; b_j^{(II)} = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2} a_j^{(2)},$$

$$c_1^{(II)} = \pm in_1 n_3 + n_2, \quad c_2^{(II)} = \pm in_2 n_3 - n_1, \quad c_3^{(II)} = \mp i(1 - n_3^2), \; d_j^{(II)} = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2} c_j^{(2)},$$

верхние и нижние знаки соответствуют таковым в соотношении $\sigma = \pm 1/2$.

Найденные решения для спиральностей $\sigma = \pm 1/2$ можно задать так (каждое разбиваем на 4 столбца, нумеруемых векторным индексом 0, 1, 2, 3; кроме того, введем не фиксируемые уравнением для собственных значений оператора спиральности числовые параметры):

$$\Psi_0^I = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \lambda'_1 \\ \lambda'_1 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_1^I = \begin{vmatrix} \mu_1 n_1 \\ \mu_1 n_1 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_1 n_1 \\ \mu'_1 n_1 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_2^I = \begin{vmatrix} \mu_1 n_2 \\ \mu_1 n_2 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_1 n_2 \\ \mu'_1 n_3 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_3^I = \begin{vmatrix} \mu_1 n_3 \\ \mu_1 n_3 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_1 n_3 \\ \mu'_1 n_3 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \tag{62}$$

$$\Psi_0^{II} = \begin{vmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_2 \dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_1^{II} = \begin{vmatrix} \mu_2(\pm in_1 n_3 + n_2) \\ \mu_2(\pm in_1 n_3 + n_2) \dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_2(\pm in_1 n_3 + n_2) \\ \mu'_2(\pm in_1 n_3 + n_2) \dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \tag{63}$$

$$\Psi_2^{II} = \begin{vmatrix} \mu_2(\pm in_2 n_3 - n_1) \\ \mu_2(\pm in_2 n_3 - n_1) \dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_2(\pm in_2 n_3 - n_1) \\ \mu'_2(\pm in_2 n_3 - n_1) \dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_3^{II} = \begin{vmatrix} \mu_2[\mp i(1 - n_3^2)] \\ \mu_2[\mp i(1 - n_3^2)] \dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_2[\mp i(1 - n_3^2)] \\ \mu'_2[\mp i(1 - n_3^2)] \dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}. \tag{64}$$

Для каждого из значений $\sigma = \pm 3/2$ существует по одному собственному вектору:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = 0,$$

$$a_1 = -n_1 n_3 \pm in_2, \quad a_2 = -n_2 n_3 \mp in_1, \quad a_3 = 1 - n_3^2; \quad b_j = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} a_j,$$

$$c_1 = -n_1 n_3 \pm in_2, \quad c_2 = -n_2 n_3 \mp in_1, \quad c_3 = 1 - n_3^2; \quad d_j = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} c_j.$$

Если учесть все сопутствующие условия, то найденные решения для спиральностей $\sigma = \pm 3/2$ можно задать так:

$$\Psi_0^{III} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_1^{III} = \begin{vmatrix} \mu_3(-n_1 n_3 \pm i n_2) \\ \mu_3(-n_1 n_3 \pm i n_2)\dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_3(-n_1 n_3 \pm i n_2) \\ \mu'_3(-n_1 n_3 \pm i n_2)\dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_2^{III} = \begin{vmatrix} \mu_3(-n_2 n_3 \mp i n_1) \\ \mu_3(-n_2 n_3 \mp i n_1)\dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_3(-n_2 n_3 \mp i n_1) \\ \mu'_3(-n_2 n_3 \mp i n_1)\dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_3^{III} = \begin{vmatrix} \mu_3(1 - n_3^2) \\ \mu_3(1 - n_3^2)\dfrac{\pm 1 - n_3}{n_1 - n_2} \\ \mu'_3(1 - n_3^2) \\ \mu'_3(1 - n_3^2)\dfrac{\mp 1 - n_3}{n_1 - n_2} \end{vmatrix}. \tag{65}$$

Обращаем внимание на то, что требованием диагонализации оператора спиральности числовые параметры $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \mu_1, \mu'_1, \mu_2, \mu'_2, \mu_3, \mu'_3$ не фиксируются. Каждый конкретный выбор этих параметров влияет на явный вид собственных векторов, однако ни один из выборов не может быть предпочтительным перед другими, поскольку все различные представления собственных векторов связаны между собой линейными преобразованиями. Это означает, что допустимо зафиксировать один наиболее простой набор параметров и работать дальше с так определенными векторами. Чтобы максимально упростить вычисления, положим все эти параметры равными +1 (в том числе и для состояний с противоположными по знаку спиральностями).

Нужно связать описание собственных 16-компонентных состояний оператора спиральности согласно (59)–(65) с найденными решениями безмассового уравнения:

$$B_{(1)}^0 = \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{vmatrix}_{(1)}, \quad B_{(1)}^1 = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix}_{(1)}, \quad B_{(1)}^2 = \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{vmatrix}_{(1),} \quad B_{(1)}^3 = \begin{vmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{vmatrix}_{(1)},$$

$$B_{(2)}^0 = \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{vmatrix}_{(2)}, \quad B_{(2)}^1 = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix}_{(2)}, \quad B_{(2)}^2 = \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{vmatrix}_{(2),} \quad B_{(2)}^3 = \begin{vmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{vmatrix}_{(2)}.$$

Отметим, что для значений спиральности $\sigma = \pm 3/2$ все величины с нулевым индексом a_0, b_0, c_0, d_0 равны нулю. Поскольку найденные выше решения безмассового уравнения включают ненулевые величины a_0, b_0, c_0, d_0, то они не могут быть построены только на основе использования решений со спиральностями $\sigma = \pm 3/2$. Также заметим, что при описании собственных состояний оператора спиральности основную роль играет структура 4-мерной величины $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, остальные величины b_l, c_l, d_l определяются с помощью простых линейных соотношений. Таким образом, достаточно связать величины $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}_{(1,\,2)}$ с соответствующими соотношениями из (62)–(65).

Зафиксируем величины для состояний с различными спиральностями:

$$a_0^{I+} = 1, \quad a_1^{I+} = n_1, \quad a_2^{I+} = n_2, \quad a_3^{I+} = n_3,$$

$$
\begin{gathered}
a_0^{I-}=1, \quad a_1^{I-}=n_1, \quad a_2^{I-}=n_2, \quad a_3^{I-}=n_3, \\
a_0^{II+}=1, \quad a_1^{II+}=in_1n_3+n_2, \quad a_2^{II+}=in_2n_3-n_1, \quad a_3^{II+}=-i(1-n_3^2), \\
a_0^{II-}=1, \quad a_1^{II-}=-in_1n_3+n_2, \quad a_2^{II-}=-in_2n_3-n_1, \quad a_3^{II-}=+i(1-n_3^2), \\
a_0^{III+}=0, \quad a_1^{III+}=-n_1n_3+in_2, \quad a_2^{III+}=-n_2n_3-in_1, \quad a_3^{III+}=(1-n_3^2), \\
a_0^{III-}=0, \quad a_1^{III-}=-n_1n_3-in_2, \quad a_2^{III-}=-n_2n_3+in_1, \quad a_3^{III-}=(1-n_3^2)
\end{gathered} \tag{66}
$$

и аналогичные величины для решений безмассового уравнения

$$
\begin{aligned}
&(1), \qquad a_0^{(1)}=\frac{n_2}{1+n_3}+\frac{in_3}{n_1+in_2}, \quad a_1^{(1)}=0, \quad a_2^{(1)}=1, \quad a_3^{(1)}=-\frac{n_2}{1+n_3}-\frac{in_3}{n_1+in_2}, \\
&(2), \qquad a_0^{(2)}=\frac{n_1}{1+n_3}+\frac{n_3}{n_1+in_2}, \quad a_1^{(2)}=1, \quad a_2^{(2)}=0, \quad a_3^{(2)}=-\frac{n_1}{1+n_3}-\frac{n_3}{n_1+in_2}.
\end{aligned} \tag{67}
$$

Введем линейные комбинации двух решений (67)

$$
a_l^+=a_l^{(2)}+ia_l^{(1)}, \quad a_l^-=a_l^{(2)}-ia_l^{(1)}, \tag{68}
$$

которые выглядят существенно проще:

$$
\begin{gathered}
a_0^+=\frac{n_1+in_2}{1+n_3}, \quad a_1^+=1, \quad a_2^+=+i, \quad a_3^+=-\frac{n_1+in_2}{1+n_3}, \\
a_0^-=\frac{1+n_3}{n_1+in_2}, \quad a_1^-=1, \quad a_2^-=-i, \quad a_3^-=-\frac{1+n_3}{n_1+in_2}.
\end{gathered} \tag{69}
$$

Ищем разложения безмассовых решений (69) по спиральным в виде (индекс l принимает значения 0, 1, 2, 3)

$$
\begin{gathered}
a_l^+=\alpha a_l^{I+}+\alpha' a_l^{I-}+\beta a_l^{II+}+\beta' a_l^{II-}+\gamma a_l^{III+}+\gamma' a_l^{III-}, \\
a_l^-=\alpha a_l^{I+}+\alpha' a_l^{I-}+\beta a_l^{II+}+\beta' a_l^{II-}+\gamma a_l^{III+}+\gamma' a_l^{III-}.
\end{gathered} \tag{70}
$$

Понятно, что в обеих формулах в первых двух членах имеем не два параметра, а один – $(\alpha+\alpha')$. Каждое из соотношений (70) дает четыре уравнения:

a_l^+-решение,

$$
\begin{gathered}
l=0, \quad \frac{n_1+in_2}{1+n_3}=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')+\gamma\cdot 0+\gamma'\cdot 0, \\
l=1, \quad 1=(\alpha+\alpha')n_1+\beta(in_1n_3+n_2)+\beta'(-in_1n_3+n_2)+\gamma(-n_1n_3+in_2)+\gamma'(-n_1n_3-in_2), \\
l=2, \quad i=(\alpha+\alpha')n_2+\beta(in_2n_3-n_1)+\beta'(-in_2n_3-n_1)+\gamma(-n_2n_3-in_1)+\gamma'(-n_2n_3+in_1), \\
l=3, \quad -\frac{n_1+in_2}{1+n_3}=(\alpha+\alpha')n_3+\beta(-i)(1-n_3^2)+\beta' i(1-n_3^2)+\gamma(1-n_3^2)+\gamma'(1-n_3^2);
\end{gathered}
$$

a_l^--решение,

$$
\begin{gathered}
l=0, \quad \frac{1+n_3}{n_1+in_2}=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')+\gamma\cdot 0+\gamma'\cdot 0, \\
l=1, \quad 1=(\alpha+\alpha')n_1+\beta(in_1n_3+n_2)+\beta'(-in_1n_3+n_2)+\gamma(-n_1n_3+in_2)+\gamma'(-n_1n_3-in_2), \\
l=2, \quad -i=(\alpha+\alpha')n_2+\beta(in_2n_3-n_1)+\beta'(-in_2n_3-n_1)+\gamma(-n_2n_3-in_1)+\gamma'(-n_2n_3+in_1), \\
l=3, \quad -\frac{1+n_3}{n_1+in_2}=(\alpha+\alpha')n_3+\beta(-i)(1-n_3^2)+\beta' i(1-n_3^2)+\gamma(1-n_3^2)+\gamma'(1-n_3^2).
\end{gathered}
$$

Отсюда после простой перегруппировки слагаемых получим (пусть $\alpha + \alpha' = \sigma$):

a_l^+-решение,

$$\frac{n_1 + in_2}{1 + n_3} = \sigma + (\beta + \beta'),$$

$$1 = \sigma n_1 + (\beta + \beta')n_2 + i(\beta - \beta')n_1 n_3 - (\gamma + \gamma')n_1 n_3 + i(\gamma - \gamma')n_2,$$

$$i = \sigma n_2 - (\beta + \beta')n_1 + i(\beta - \beta')n_2 n_3 - (\gamma + \gamma')n_2 n_3 - i(\gamma - \gamma')n_1,$$

$$-\frac{n_1 + in_2}{1 + n_3} = \sigma n_3 - i(\beta - \beta')(1 - n_3^2) + (\gamma + \gamma')(1 - n_3^2);$$

a_l^--решение,

$$\frac{1 + n_3}{n_1 + in_2} = \sigma + (\beta + \beta'),$$

$$1 = \sigma n_1 + (\beta + \beta')n_2 + i(\beta - \beta')n_1 n_3 - (\gamma + \gamma')n_1 n_3 + i(\gamma - \gamma')n_2,$$

$$-i = \sigma n_2 - (\beta + \beta')n_1 + i(\beta - \beta')n_2 n_3 - (\gamma + \gamma')n_2 n_3 - i(\gamma - \gamma')n_1,$$

$$-\frac{1 + n_3}{n_1 + in_2} = \sigma n_3 - i(\beta - \beta')(1 - n_3^2) + (\gamma + \gamma')(1 - n_3^2).$$

Введем обозначения

$$\sigma = x_0, \quad \beta + \beta' = x_1, \quad i(\beta - \beta') = x_2, \quad \gamma + \gamma' = x_3, \quad i(\gamma - \gamma') = x_4,$$

тогда системы уравнений запишутся так (отмечаем, что координаты x_2, x_3 входят только в виде разности $y = x_2 - x_3$):

a_l^+-решение,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_1 n_3 & n_2 \\ n_2 & -n_1 & n_2 n_3 & -n_1 \\ n_3 & 0 & -(1 - n_3^2) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{n_1 + in_2}{1 + n_3} \\ 1 \\ +i \\ -\dfrac{n_1 + in_2}{1 + n_3} \end{vmatrix}; \qquad (71)$$

a_l^--решение,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_1 n_3 & n_2 \\ n_2 & -n_1 & n_2 n_3 & -n_1 \\ n_3 & 0 & -(1 - n_3^2) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{n_1 - in_2}{1 - n_3} \\ 1 \\ -i \\ -\dfrac{n_1 - in_2}{1 = n_3} \end{vmatrix}. \qquad (72)$$

Имеем две неоднородные системы уравнений для 4 переменных с одинаковой основной матрицей и разными правыми частями. Определитель основной матрицы ненулевой и равен $n_1^2 + n_1^2$, решения двух систем единственны и легко находятся (см. ниже). Случай, когда $n_1 = 0,\ n_2 = 0,$ является особым и наиболее простым, поэтому не будем на нем останавливаться.

Из изложенного выше следует, что разложение любого безмассового решения по спиральным решениям

$$a_l = x_0 a_l^{I} + \beta a_l^{II+} + \beta' a_l^{II-} + \gamma a_l^{III+} + \gamma' a_l^{III-} \tag{73}$$

всегда приводит к невырожденной линейной системе уравнений относительно четырех переменных x_0, x_1, y, x_4; причем три последних элемента из x_0, x_1, y, x_4 определяют три ограничения на четыре параметра из (73):

$$\begin{cases} \beta + \beta' = x_1, \\ i(\beta - \beta') - (\gamma + \gamma') = y, \\ i(\gamma - \gamma') = x_4, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \beta + \beta' = x_1, \\ \beta - \beta' = -iy - i(\gamma + \gamma'), \\ i(\gamma + \gamma') = x_4 + 2i\gamma'. \end{vmatrix}$$

Таким образом, получим выражения для трех параметров

$$\beta = \frac{1}{2}(x_1 - iy - x_4) - i\gamma', \quad \beta = \frac{1}{2}(x_1 + iy + x_4) + i\gamma', \quad \gamma = -ix_4 + \gamma'. \tag{74}$$

Учитывая формулы (74) в (73), приведем разложение к форме, где выделен член, пропорциональный произвольному параметру γ':

$$a_l = \left\{ x_0 a_l^{I} + \frac{1}{2}(x_1 - iy - x_4) a_l^{II+} \frac{1}{2}(x_1 + iy + x_4) a_l^{II-} - ix_4 a_l^{III+} \right\} - i\gamma' \left\{ a_l^{II+} - a_l^{II-} + i a_l^{III+} + i\gamma' a_l^{III-} \right\}.$$

Учитывая явный вид спиральных решений, убеждаемся, что правое выражение в фигурных скобках при γ' – это тождественный нуль. В результате приходим к разложению любого безмассового решения уравнения для поля со спином 3/2 по спиральным решениям

$$a_l = \left\{ x_0 a_l^{I} + \frac{1}{2}(x_1 - iy - x_4) a_l^{II+} \frac{1}{2}(x_1 + iy + x_4) a_l^{II-} - ix_4 a_l^{III+} \right\}. \tag{75}$$

Чтобы воспользоваться этим общим соотношением применительно к двум безмассовым решениям a_l^{+} и a_l^{-}, нужно найти явный вид решений для систем (71), (72):

a_l^{+}-решение,

$$x_0 = \frac{1 - n_3}{n_1 - in_2}, \quad x_1 = 0, \quad y = \frac{1}{n_1 - n_2}, \quad x_4 = -\frac{i}{n_1 - in_2}; \tag{76}$$

a_l^{-}-решение,

$$x_0 = (1 + n_3)\frac{1 - 2n_3}{n_1 + in_2}, \quad x_1 = (1 + n_3)\frac{2n_3}{n_1 + in_2}, \quad y = \frac{1 + 2n_3}{n_1 + in_2}, \quad x_4 = \frac{i}{n_1 + in_2} - (1 + n_3)\frac{2n_3}{n_1 + in_2}, \tag{77}$$

и учесть их в формуле (74).

Таким образом всегда можно найти явный вид разложения любых двух независимых решений безмассового уравнения по решениям с фиксированными спиральностями. В этих разложениях всегда будут присутствовать состояния со спиральностями $\sigma = \pm 1/2$ и $\sigma = \pm 3/2$.

Список использованных источников

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173, № 953. – P. 211–232. https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0140

3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.

4. Гинзбург, В. Л. К теории частиц со спином 3/2 / В. Л. Гинзбург // ЖЭТФ. – 1942. – Т. 12. – С. 425–442.

5. Давыдов, А. С. Волновое уравнение частицы, имеющей спин 3/2, в отсутствие поля / А. С. Давыдов // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13, вып. 9/10. – С. 313–319.

6. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145. https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90030-6

7. Bender, C. M. Peculiarities of a free massless spin-3/2 field theory / C. M. Bender, B. M. McCoy // Phys. Rev. – 1966. – Vol. 148, № 4. – P. 1375–1380. https://doi.org/10.1103/physrev.148.1375

8. Hagen, C. R. Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C. R. Hagen, L. P. S. Singh // Phys. Rev. D. – 1982. – Vol. 26, № 2. – P. 393–398. https://doi.org/10.1103/physrevd.26.393

9. Baisya, H. L. On the Rarita-Schwinger equation for the vector-bispinor field / H. L. Baisya // Nucl. Phys. B. – 1971. – Vol. 29, № 1. – P. 104–124. https://doi.org/10.1016/0550-3213(71)90213-6

10. Loide, R. K. Equations for a vector-bispinor / R. K. Loide // J. Phys. A: Math. Gen. – 1984. – Vol. 17, № 12. – P. 2535–2550. https://doi.org/10.1088/0305-4470/17/12/024

11. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Изв. вузов. Физика. – 1985. – Т. 28, № 1. – С. 91–96.

12. Capri, A. Z. Further problems in spin-3/2 field theories / A. Z. Capri, R. L. Kobes // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 22, № 8. – P. 1967–1978. https://doi.org/10.1103/physrevd.22.1967

13. Darkhosh, T. Is there a solution to the Rarita-Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field? / T. Darkhosh // Phys. Rev. D. – 1985. – Vol. 32, № 12. – P. 3251–3255. https://doi.org/10.1103/physrevd.32.3251

14. Cox, W. On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita-Schwinger field coupled to an external electromagnetic field / W. Cox // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – Vol. 22, № 10. – P. 1599–1608. https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/10/015

15. Deser, S. Massive spin-3/2 electrodynamics / S. Deser, A. Waldron, V. Pascalutsa // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 62, № 10. – P. 105031. https://doi.org/10.1103/physrevd.62.105031

16. Napsuciale, M. Spin-3/2 Beyond Rarita-Schwinger Framework / M. Napsuciale, M. Kirchbach, S. Rodriguez // Eur. Phys. J. A. – 2006. – Vol. 29, № 3. – P. 289–306. https://doi.org/10.1140/epja/i2005-10315-8

17. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 486 с.

18. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.

19. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – Vol. 1: General Theory. – 404 p.

References

1. Pauli W., Fierz M. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld. *Helvetica Physica Acta*, 1939, Bd. 12, S. 297–300.

2. Fierz M., Pauli W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1939, vol. 173, no. 953, pp. 211–232. https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0140

3. Rarita W., Schwinger J. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review D*, 1941, vol. 60, no. 1, pp. 61–64. https://doi.org/10.1103/physrev.60.61

4. Ginzburg V. L. K To the theory of particles of spin 3/2. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1942, vol. 12, pp. 425–442 (in Russian).

5. Davydov A. S. Wave equation for a particle with spin 3/2, in absence of external field. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1943, vol. 13, pp. 313–319 (in Russian).

6. Johnson K., Sudarshan E. C. G. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles. *Annals of Physics*, 1961, vol. 13, no. 1, pp. 126–145. https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90030-6

7. Bender C. M., McCoy Barry M. Peculiarities of a free massless spin-3/2 field theory. *Physical Review*, 1966, vol. 148, no. 4, pp. 1375–1380. https://doi.org/10.1103/physrev.148.1375

8. Hagen C. R., Singh L. P. S. Search for consistent interactions of the Rarita–Schwinger field. *Physical Review D*, 1982, vol. 26, no. 2, pp. 393–398. https://doi.org/10.1103/physrevd.26.393

9. Baisya H. L. On the Rarita–Schwinger equation for the vector-bispinor field. *Nuclear Physics B*, 1971, vol. 29, no. 1, pp. 104–124. https://doi.org/10.1016/0550-3213(71)90213-6

10. Loide R. K. Equations for a vector-bispinor. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1984, vol. 17, no. 12, pp. 2535–2550. https://doi.org/10.1088/0305-4470/17/12/024

11. Pletyukhov V. A., Strazhev V. I. Toward a theory of particles with 3/2 spin. *Soviet Physics Journal*, 1985, vol. 28, no. 1, pp. 78-81. https://doi.org/10.1007/bf00896059

12. Capri A. Z., Kobes R. L. Further problems in spin-3/2 field theories. *Physical Review D*, 1980, vol. 22, no. 8, pp. 1967–1978. https://doi.org/10.1103/physrevd.22.1967

13. Darkhosh T. Is there a solution to the Rarita–Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field? *Physical Review D*, 1985, vol. 32, no. 12, pp. 3251–3255. https://doi.org/10.1103/physrevd.32.3251

14. Cox W. On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita – Schwinger field coupled to an external electromagnetic field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1989, vol. 22, no. 10, pp. 1599–1608. https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/10/015

15. Deser S., Waldron A., Pascalutsa V. Massive spin-3/2 electrodynamics. *Physical Review D*, 2000, vol. 62, no. 10, pp. 105031. https://doi.org/10.1103/physrevd.62.105031

16. Napsuciale M., Kirchbach M., Rodriguez S. Spin-3/2 Beyond Rarita–Schwinger Framework. *The European Physical Journal A*, 2006, vol. 29, no. 3, pp. 289–306. https://doi.org/10.1140/epja/i2005-10315-8

17. Red'kov V. M. *Particle fields in the Riemann space and the Lorents group*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2009. 486 p. (in Russian).

18. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic wave equations and internal degrees of freedom*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2015. 328 p. (in Russian).

19. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Balan V., Veko O. V., Red'kov V. M. *Elementary particles with internal structure in external field. Vol. I. General formalism*. USA, Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.

Информация об авторах

Ивашкевич Алина Валентиновна – магистрант, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и математики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник центра теоретической физики, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail; redkov@dragon.bas-net.by

Information about the authorS

Alina V. Ivashkevich – Master Student, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Elena M. Ovsiyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor. Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Gomel region, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Viktor M. Red'kov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center “Fundamental Interactions and Astrophysics”, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.redkov@ifanbel.bas-net.by