ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.5
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405

Поступила в редакцию 15.07.2019
Received 15.07.2019

Е. А. Ровба, В. Ю. Медведева

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

О РАЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ $|x|^\alpha$ ПО РАСШИРЕННОЙ СИСТЕМЕ УЗЛОВ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА

Аннотация. В работе исследуются приближения функции $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$ интерполяционными рациональными функциями Лагранжа на отрезке $[-1,1]$. В качестве узлов интерполирования выбираются нули четных рациональных функций Чебышева – Маркова и точка $x = 0$. Получено интегральное представление остатка интерполирования и оценка сверху рассматриваемых равномерных приближений. На их основании подробно изучаются:

а) полиномиальный случай; здесь авторы приходят к известному асимптотическому равенству М. Н. Ганзбурга;

б) в случае фиксированного числа геометрически различных полюсов получена оценка сверху соответствующих равномерных приближений, улучшающая известный результат К. Н. Лунгу;

в) при приближении общими интерполяционными рациональными функциями Лагранжа найдена оценка равномерных приближений и показано, что на концах отрезка $[-1,1]$ ее можно улучшить.

Полученные результаты могут быть применены в теоретических исследованиях и численных методах.

Ключевые слова: рациональная дробь Чебышева – Маркова, рациональная интерполяция, функция со степенной особенностью

Для цитирования. Ровба, Е. А. О рациональной интерполяции функции $|x|^\alpha$ по расширенной системе узлов Чебышева – Маркова / Е. А. Ровба, В. Ю. Медведева // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 391–405. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405

Y. A. Rovba, V. Yu. Medvedeva

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

RATIONAL INTERPOLATION OF THE FUNCTION $|x|^\alpha$ BY AN EXTENDED SYSTEM OF CHEBYSHEV – MARKOV NODES

Abstract. In this paper, we study the approximations of a function $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$ by interpolation rational Lagrange functions on a segment $[-1,1]$. The zeros of the even Chebyshev – Markov rational functions and a point $x = 0$ are chosen as the interpolation nodes. An integral representation of an interpolation remainder and an upper bound for the considered uniform approximations are obtained. Based on them, a detailed study is made:

a) the polynomial case. Here, the authors come to the famous asymptotic equality of M. N. Hanzburg;

b) at a fixed number of geometrically different poles, the upper estimate is obtained for the corresponding uniform approximations, which improves the well-known result of K. N. Lungu;

c) when approximating by general Lagrange rational interpolation functions, the estimate of uniform approximations is found and it is shown that at the ends of the segment $[-1,1]$ it can be improved.

The results can be applied in theoretical research and numerical methods.

Keywords: rational Chebyshev – Markov fraction, rational interpolation, function with power singularity

For citation. Rovba Y. A., Medvedeva V. Ju. Rational interpolation of the function $|x|^\alpha$ by an extended system of Chebyshev – Markov nodes. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 391–405 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405

Приближение простейших функций, имеющих алгебраические особенности, имеет богатое историческое наследие. Первые исследования были посвящены приближению функции $|x|$ на отрезке [–1,1] алгебраическими полиномами (см., напр., [1–4]). В 1913 г. С. Н. Бернштейн в [5] доказал, что существует число β, $\beta = 0{,}2801\ldots$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} nE_n = \beta,$$

где E_n – наилучшее равномерное приближение функции $|x|$ алгебраическими полиномами степени не выше n на отрезке [–1,1]. Позже в работе [6] он провел глубокий анализ наилучших равномерных полиномиальных приближений функции $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, на отрезке [–1,1]. Эти исследования были продолжены С. М. Никольским [7], Р. А. Райцином [8] и др.

Значительное число работ посвящено различным методам приближений простейших функций с алгебраической особенностью (см., напр., [9–11]). В этом ряду следует выделить исследования М. Н. Ганзбурга [12] и М. Реверса [13], посвященные интерполяции функции $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, на отрезке [–1,1] по различным системам узлов Чебышева. Именно это направление привлекло внимание авторов настоящей статьи с точки зрения рациональной интерполяции. Как известно, для рациональной интерполяции представляют интерес узлы, являющиеся нулями соответствующей рациональной дроби Чебышева – Маркова.

Наилучшим равномерным рациональным приближениям функции $|x|^\alpha$ на отрезке [–1,1] или функции x^α на отрезке [–1,0] посвящено достаточно много работ (см., напр., [14–18]).

Задачу о приближении непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом полюсов рассмотрел К. Н. Лунгу [19]. В [20] им были рассмотрены такие приближения функции x^α, $\alpha > 0$, на отрезке [1,0]. Позже это направление в рациональной аппроксимации получило развитие в [21–22] и др.[1]

Настоящая работа продолжает вышеназванные исследования. Рассматривается интерполирование функции $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, по расширенной системе узлов Чебышева – Маркова на отрезке [–1,1]. Получено интегральное представление остатка интерполирования. Исходя из этого результата, найдены оценки сверху равномерных приближений рациональными интерполяционными функциями с такими узлами для различных случаев расположения полюсов аппроксимирующей рациональной функции.

Пусть $m_{2n}(x)$ – косинус-дробь Чебышева – Маркова

$$m_{2n}(x) = \cos\mu_{2n}(x), \tag{1}$$

где

$$\mu_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \arccos\frac{x + a_k}{1 + a_k x},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ – чисто мнимые числа либо нули, $k = 1,\ldots,2n$, причем

$$\text{а) } a_{n+k} = -a_k, \quad \operatorname{Im} a_k \ge 0, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$\text{б) } a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0, \quad r = \left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1, \quad n > r. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что $m_{2n}(x)$ является четной рациональной функцией. В этом случае функция $m_{2n}(x)$ имеет $2n$ простых симметричных нулей на интервале (–1,1):

$$-1 < x_{2n} < x_{2n-1} < \ldots < x_{n+1} < 0 < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < 1; \tag{3}$$

$$x_{2n-k+1} = -x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mu_{2n}(x_k) = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

[1] Старовойтов, А. П. Аппроксимация рациональными функциями с заданным числом полюсов / А. П. Старовойтов // Белорусский гос. ун-т. – Минск, 1984. – 23 с. – Деп. в Бел. НИИНТИ 1984. – № 689-Бел Д84.

Для функции $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа с узлами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ и в точке $x_0 = 0$:

$$L_{2n}(x,f) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) l_k(x), \tag{4}$$

где

$$l_k(x) = \frac{x m_{2n}(x)}{(x - x_k)\left(x m_{2n}(x)\right)'_{x=x_k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Для оценки остатка интерполирования введем следующие величины:

$$\varepsilon_{2n}(x, a) = |x|^\alpha - L_{2n}(x, f), \ \ x \in [-1, 1];$$
$$\varepsilon_{2n}(a) = \max_{-1 \le x \le 1} \left|\varepsilon_{2n}(x, a)\right|. \tag{5}$$

Т е о р е м а 1. *Для приближений функции* $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, *на отрезке* $[-1,1]$ *интерполяционными рациональными функциями Лагранжа* (4) *при условиях* (2) *справедливы соотношения:*

$$1) \ \varepsilon_{2n}(x, a) = \frac{4}{\pi} x^2 \sin\frac{\pi\alpha}{2} \cdot m_{2n}(x) \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{x^2(1-u^2) + u^2} \frac{du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)}; \tag{6}$$

$$2) \ \varepsilon_{2n}(a) \le \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{du}{\left|\psi_n(u)\right| + \left|\psi_n^{-1}(u)\right|}, \tag{7}$$

где

$$x \in [-1, 1], \quad \psi_n(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}, \quad \beta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |a_k|^2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad n > \frac{\alpha}{2}.$$

Причем, если полюсы функции $L_{2n}(x,f)$ *имеют четную кратность, то оценка* (7) *является точной, т. е. имеет место знак равенства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (4) имеем

$$L_{2n}(x, f) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha-1} \frac{x m_{2n}(x)}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)} - \sum_{k=n+1}^{2n} (-x_k)^{\alpha-1} \frac{x m_{2n}(x)}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)}. \tag{8}$$

Легко видеть, что справедливо тождество

$$1 \equiv \sum_{k=1}^{2n} \frac{m_{2n}(x)}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)}. \tag{9}$$

Полагаем, что $x \in (0, 1]$. Умножим обе части тождества (9) на $f(x)$ и из полученного равенства вычтем почленно равенство (8). Получим

$$\varepsilon_{2n}(x, a) = f(x) - L_{2n}(x, f) = x m_{2n}(x) \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{\alpha-1} - x_k^{\alpha-1}}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^{\alpha-1} + (-x_k)^{\alpha-1}}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)}\right] =$$
$$= x m_{2n}(x) \cdot \left[S_1(x) + S_2(x)\right], \tag{10}$$

где

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{\alpha-1} - x_k^{\alpha-1}}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)}, \quad S_2(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^{\alpha-1} + (-x_k)^{\alpha-1}}{(x - x_k) m'_{2n}(x_k)}.$$

В плоскости с разрезом по промежутку $\{z : z = iy, -\infty < y < 0\}$ определим ветвь аналитической функции $f(z) = z^\alpha$ так, что $f(1) = 1$. Тогда нетрудно проверить, что

$$S_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{x^{\alpha-1} - z^{\alpha-1}}{(x-z)m_{2n}(z)}dz, \quad S_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_\delta} \frac{x^{\alpha-1} + (-z)^{\alpha-1}}{(x-z)m_{2n}(z)}dz, \tag{11}$$

где контур $\Gamma_\delta = \overline{\Gamma}_\delta^{(1)} \cup \overline{\Gamma}_\delta^{(2)} \cup \overline{\Gamma}_\delta^{(3)}$,

$$\Gamma_\delta^{(1)} = \{z : z = iy, \delta < y < +\infty\},$$

$$\Gamma_\delta^{(2)} = \left\{z : |z| = \delta, -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\Gamma_\delta^{(3)} = \{z : z = iy, -\infty < y < -\delta\},$$

$\delta, 0 < \delta < x_n$ – достаточно малое положительное число;
и контур $\Gamma'_\delta = \Gamma_\delta^{(3)} \cup \overline{\Gamma}_\delta^{(4)} \cup \Gamma_\delta^{(1)}$,

$$\Gamma_\delta^{(4)} = \left\{z : |z| = \delta, \frac{\pi}{2} \le \arg z \le 3\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Заметим, что так как $x \in (0, 1]$, $\alpha > 0$ и $|m_{2n}(0)| = 1$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\Gamma_\delta^{(2)}} \frac{x^{\alpha-1} - z^{\alpha-1}}{(x-z)m_{2n}(z)}dz = 0, \quad \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\Gamma_\delta^{(4)}} \frac{x^{\alpha-1} - (-z)^{\alpha-1}}{(x-z)m_{2n}(z)}dz = 0.$$

Тогда из равенств (11) следует

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x^{\alpha-1} - z^{\alpha-1}}{(x-z)m_{2n}(z)}dz, \quad S_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x^{\alpha-1} + (-z)^{\alpha-1}}{(x-z)m_{2n}(z)}dz. \tag{12}$$

Преобразуем интеграл $S_1(x)$. С этой целью сделаем замену $z = it$ и разобьем полученный интеграл на два:

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} - (it)^{\alpha-1}}{(x-it)m_{2n}(it)}dt = -\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^{\alpha-1} - (it)^{\alpha-1}}{(x-it)m_{2n}(it)}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} - (it)^{\alpha-1}}{(x-it)m_{2n}(it)}dt\right].$$

Теперь в первом интеграле сделаем замену $t = -v$:

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} - (-iv)^{\alpha-1}}{(x+iv)m_{2n}(-iv)}dv + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} - (it)^{\alpha-1}}{(x-it)m_{2n}(it)}dt\right].$$

Пользуясь четностью дроби Чебышева – Маркова $m_{2n}(x)$, найдем

$$S_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{x^{\alpha-1} - (-iz)^{\alpha-1}}{x+iz} + \frac{x^{\alpha-1} - (iz)^{\alpha-1}}{x-iz}\right]\frac{dz}{m_{2n}(iz)}. \tag{13}$$

Аналогичные преобразования проведем с интегралом $S_2(x)$ (см. (12)) и получим, что

$$S_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{x^{\alpha-1} + (iz)^{\alpha-1}}{x+iz} + \frac{x^{\alpha-1} + (-iz)^{\alpha-1}}{x-iz}\right]\frac{dz}{m_{2n}(iz)}. \tag{14}$$

На основании полученных равенств (13) и (14) имеем

$$H_n(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{(-iz)^{\alpha-1} + (iz)^{\alpha-1}}{x+iz} + \frac{(iz)^{\alpha-1} + (-iz)^{\alpha-1}}{x-iz}\right]\frac{dz}{m_{2n}(iz)}. \tag{15}$$

После несложных преобразований придем к выражению

$$H_n(x)=\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\alpha-1}\cdot\left((-i)^{\alpha-1}+i^{\alpha-1}\right)}{x^2+z^2}\frac{dz}{m_{2n}(iz)}=\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{z^{\alpha-1}}{x^2+z^2}\frac{dz}{m_{2n}(iz)}. \tag{16}$$

Тогда (см. равенства (10), (15) и (16)) имеем

$$\varepsilon_{2n}(x,a)=\frac{2x^2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot m_{2n}(x)\int_0^{+\infty}\frac{z^{\alpha-1}}{x^2+z^2}\frac{dz}{m_{2n}(iz)}. \tag{17}$$

Теперь займемся преобразованием интеграла, стоящего в правой части этого равенства:

$$J_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{\alpha-1}}{x^2+z^2}\frac{dz}{m_{2n}(iz)}. \tag{18}$$

Сделаем замену

$$t=i\sqrt{\frac{1-iz}{1+iz}},\quad z=-i\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad dz=\frac{-4ti}{(1-t^2)^2}dt. \tag{19}$$

Образом промежутка $(0, +\infty)$ является дуга единичной окружности

$$\Gamma=\left\{t: t=e^{i\phi}, 0<\phi<\frac{\pi}{2}\right\}$$

с обходом по часовой стрелке.

Как известно [23, с. 48], косинус-дробь Чебышева – Маркова $m_{2n}(x)$, заданная на отрезке $[-1,1]$, связана с косинус-дробью Бернштейна $M_{2n}(y)$, заданной на $\mathbb{R}$, следующим соотношением:

$$m_{2n}(x)=M_{2n}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right), \tag{20}$$

где

$$M_{2n}(y)=\frac{1}{2}\left(\chi_{2n}(y)+\chi_{2n}^{-1}(y)\right),\quad \chi_{2n}(y)=\prod_{k=1}^{2n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}, \tag{21}$$

z_k – корни уравнения $z^2+\dfrac{1+a_k}{1-a_k}=0$, у которых $\operatorname{Im} z_k>0,\quad k=1,2,\ldots,2n.$

Следовательно, в нашем случае

$$z_k=i\frac{1+a_k}{\sqrt{1+|a_k|^2}},\quad k=1,2,\ldots,2n. \tag{22}$$

Подставляя соотношения (19) в интеграл (18) и учитывая (20), получим

$$J_n(x)=4i\int_\Gamma\left(-i\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^{\alpha-1}\frac{tdt}{\left((1+t^2)^2-x^2(1-t^2)^2\right)\mathrm{M}_{2n}(it)}.$$

Теперь сделаем еще одну замену:

$$t=u+i\sqrt{1-u^2},\quad u=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad dt=-i\frac{u+i\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

Рассматриваемое преобразование является обратным к функции Жуковского. Поэтому дуга Γ отображается в отрезок $[0,1]$. Нетрудно посчитать, что

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{iu}{\sqrt{1-u^2}}$$

и интеграл $J_n(x)$ имеет вид

$$J_n(x)=\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{du}{\left(x^2(1-u^2)+u^2\right)\cdot M_{2n}\left(iu-\sqrt{1-u^2}\right)}. \tag{23}$$

Займемся теперь преобразованием функции $M_{2n}\left(iu-\sqrt{1-u^2}\right)$. Обращаясь к представлению (21) и учитывая (22), а также симметричный выбор параметров a_k, $k = 1,2,\ldots,2n$, заметим, что в выражении для $M_{2n}(y)$ будут присутствовать множители следующего вида:

$$\chi^{(k)}(y)=\frac{y-i\dfrac{1+a_k}{\sqrt{1+|a_k|^2}}}{y+i\dfrac{1-a_k}{\sqrt{1+|a_k|^2}}}\cdot\frac{y-i\dfrac{1-a_k}{\sqrt{1+|a_k|^2}}}{y+i\dfrac{1+a_k}{\sqrt{1+|a_k|^2}}}.$$

Преобразовывая их, придем к выражению

$$\chi^{(k)}(y)=\left(y^2-1-i\frac{2y}{\sqrt{1+|a_k|^2}}\right)\Big/\left(y^2-1+i\frac{2y}{\sqrt{1+|a_k|^2}}\right).$$

Сделав замену $y=i\left(u+i\sqrt{1-u^2}\right)$, получим

$$\chi^{(k)}(y)=\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k},\quad \beta_k=\frac{1}{\sqrt{1+|a_k|^2}},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Воспользовавшись этим представлением, найдем

$$M_{2n}\left(iu-\sqrt{1-u^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)\right),$$

где

$$\psi_n(u)=\prod_{k=1}^{n}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}.$$

Подставив данное выражение в (23), будем иметь

$$J_n(x)=2\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{x^2(1-u^2)+u^2}\frac{du}{\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)}.$$

Тогда из равенства (17) вытекает

$$\varepsilon_{2n}(x,a)=\frac{4}{\pi}x^2\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot m_{2n}(x)\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{x^2(1-u^2)+u^2}\frac{du}{\psi_n(u)+\psi_n^{-1}(u)}.$$

Очевидно, что

$$\frac{x^2}{x^2(1-u^2)+u^2}\le 1,\quad x\in[-1,1],\quad u\in[0,1],$$

причем при любом $u \in [0,1]$ максимум этой функции достигается в точке $x = 1$. Следовательно,

$$\varepsilon_{2n}(a) \le \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{du}{\left|\psi_n(u)\right| + \left|\psi_n^{-1}(u)\right|}, \quad n > \frac{\alpha}{2} + 1.$$

Легко видеть, что в этом неравенстве имеет место знак равенства, если предположить, что функция $\psi n(u)$ неотрицательна на [0,1], т. е. числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ имею четную кратность. Таким образом, теорема 1 доказана.

Рассмотрим некоторые приложения оценки (7).

1. Полиномиальный случай. В этом случае все числа $a_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$, и

$$\psi_n(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{2n}(0) = \varepsilon_{2n,0} = \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{du}{\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n + \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{-n}}.$$

В интеграле справа сделаем замену $u = \dfrac{t}{2n}$:

$$\varepsilon_{2n,0} = \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \frac{1}{(2n)^\alpha} \int_0^{2n} \frac{t^{\alpha-1}}{\left(1-(t/2n)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{dt}{\left(\frac{1-t/2n}{1+t/2n}\right)^n + \left(\frac{1-t/2n}{1+t/2n}\right)^{-n}}.$$

Так как подынтегральная функция равномерно относительно $t \in [0, 2n]$ сходится при $n \to \infty$ к функции

$$\frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}},$$

то нетрудно показать, что по теореме 1 из [24, с. 695]

$$\lim_{n\to\infty} (2n)^\alpha \varepsilon_{2n,0} = \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}} dt.$$

Этот результат получен в работе [12].

2. Случай заданного числа полюсов. Обозначим через A_{2n} множество точек $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) \in R^{2n}$, удовлетворяющих условиям (2).

Пусть $n > r$, $r = \left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1$, $n_1 = n - r$ и q – произвольное целое число, $0 \le q \le n_1$; $A_{2n,2q}$ есть множество точек $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) \in A_{2n}$ и таких, что среди этих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеется не больше q различных отличных от нуля и кратность каждой точки не больше $\left[\frac{n_1}{q+1}\right]$. Полагаем

$$\varepsilon_{2n} = \inf_{a \in A_n} \varepsilon_{2n}(a),$$

$$\varepsilon_{2n,2q} = \inf_{a \in A_{2n,2q}} \varepsilon_{2n}(a). \tag{24}$$

Т е о р е м а 2. *При любых целых n и q,* $0 \le q < n,\ n > r$, *справедливо неравенство*

$$\varepsilon_{2n,\,2q} \le C(\alpha)\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right|\cdot \inf_{1<t<+\infty}\left(e^{-\frac{n}{2t}} + \left(\frac{q+1}{n}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{t}{q+1}\right)^{-2q\alpha}\right), \tag{25}$$

и где $C(\alpha)$ – *некоторая положительная постоянная, зависящая только от* α[1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$m = \left[\frac{n_1}{q+1}\right], \quad n_1 = n - r.$$

Определим числа β_k следующим образом:

$$\beta_k = \xi^{2k}, \quad \xi \in (0,1), \quad k = 0, 1, \ldots, q.$$

Рассмотрим следующий интеграл из оценки (7):

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{|\psi_n(u)|}{1+\psi_n^2(u)}du. \tag{26}$$

Легко показать, что в условиях теоремы 2 будем иметь

$$I_n \le \int_0^1 u^{\alpha-1}\prod_{k=0}^{q}\left|\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right|^m du.$$

Далее, разобьем этот интеграл на два:

$$I_n \le \int_0^{\beta_q} u^{\alpha-1}\prod_{k=0}^{q}\left|\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right|^m du + \int_{\beta_q}^1 u^{\alpha-1}\prod_{k=0}^{q}\left|\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right|^m du =: I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \tag{27}$$

Оценим каждый из этих интегралов:

$$I_n^{(1)} \le \int_0^{\beta_q} u^{\alpha-1}\left(\frac{\beta_q - u}{\beta_q + u}\right)^m du\,.$$

В интеграле справа сделаем замену $u = \dfrac{\beta_q}{2m}t$:

$$I_n^{(1)} \le \left(\frac{\beta_q}{2m}\right)^{\alpha}\int_0^{2m} t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t/2m}{1+t/2m}\right)^m dt.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{1-u}{1+u} \le e^{-2u}, \quad u \in (0,1].$$

Следовательно,

$$I_n^{(1)} < \Gamma(\alpha)\left(\frac{\beta_q}{2m}\right)^{\alpha}, \tag{28}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – эйлеров интеграл второго рода.

[1] Здесь и далее через $C(\alpha)$, $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$,... будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от параметра α, $\alpha > 0$.

Теперь перейдем к оценке интеграла $I_n^{(2)}$:

$$I_n^{(2)} < \frac{1}{\alpha} \cdot \max_{u \in [\beta_q, 1]} \prod_{k=0}^{q} \left| \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k} \right|^m. \tag{29}$$

Предположим, что

$$u \in \left(\xi^{2i}, \xi^{2i-1} \right], \ 1 \le i \le q, \ \ (q \ge 1).$$

Будем иметь

$$\prod_{k=0}^{q} \left| \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k} \right| \le \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\xi^{2k} - \xi^{2i}}{\xi^{2k} + \xi^{2i}} \cdot \prod_{k=i}^{q} \frac{\xi^{2i-1} - \xi^{2k}}{\xi^{2i-1} + \xi^{2k}} \le \prod_{k=0}^{q} \frac{1-\xi^{2k+1}}{1+\xi^{2k+1}} \le \exp\left(-2 \sum_{k=0}^{q} \xi^{2k+1} \right) = \exp\left(-2 \frac{1-\xi^{2q+2}}{\xi^{-1}-1} \right). \tag{30}$$

Эта же оценка справедлива и для

$$u \in \left(\xi^{2i+1}, \xi^{2i} \right), \ 0 \le i \le q-1.$$

Таким образом, из (28) и (30) на основании (27) получим, что

$$I_n < \Gamma(\alpha) \left(\frac{\xi^{2q}}{2^m} \right)^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(-2 \frac{1-\xi^{2q+2}}{\xi^{-1}-1} \right).$$

Будем полагать, что $\xi^{2q+2} \le 2^{-1}$. Тогда из последнего неравенства имеем, что

$$I_n < \Gamma(\alpha) \left(\frac{(q+1)\xi^{2q}}{n_1} \right)^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{m}{2(q+1)(\xi^{-1}-1)} \right).$$

Обозначаем

$$(q+1)(\xi^{-1}-1) = t, \quad \xi^{-1} = 1 + \frac{t}{q+1}.$$

Следовательно,

$$I_n \le \Gamma(\alpha) \left(\frac{q+1}{n_1} \left(1 + \frac{t}{q+1} \right)^{-2q} \right)^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{n_1}{2t} \right).$$

Осталось заметить, что $n_1 = n - r$, и перейти к оценке (7) с учетом (24):

$$\varepsilon_{2n,\,2q} \le C(\alpha) \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \cdot \left(\exp\left(-\frac{n}{2t} \right) + \left(\frac{q+1}{n} \right)^{\alpha} \left(1 + \frac{t}{q+1} \right)^{-2q\alpha} \right). \tag{31}$$

Поскольку $\xi \in (0, 1)$ и $\xi^{2q+2} \le 2^{-1}$, то легко видеть, что t может быть произвольным из промежутка $(1, +\infty)$. Следовательно, можем перейти к точной нижней грани в (31), т. е.

$$\varepsilon_{2n,\,2q} \le C(\alpha) \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \cdot \inf_{i<t<+\infty} \left(\exp\left(-\frac{n}{2t} \right) + \left(\frac{q+1}{n} \right)^{\alpha} \left(1 + \frac{t}{q+1} \right)^{-2q\alpha} \right).$$

Теорема 2 доказана.

Фиксируем теперь целое число q, $q \ge 0$, и положим в (31)

$$t = \frac{n}{2(2q+1)\alpha \ln n}, \quad n > n_0,$$

где n_0 – некоторое натуральное число, зависящее от q и α. Тогда получим

$$\varepsilon_{2n,\,2q} \le C(\alpha, q)\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \frac{\ln^{2q\alpha} n}{n^{(2q+1)\alpha}}, \quad n > 1, \tag{32}$$

где C(α, q) – некоторая положительная постоянная, зависящая только от q и α.

С л е д с т в и е. *Если q – фиксированное неотрицательное целое число, то справедлива оценка* (32).

З а м е ч а н и е 1. Полученная оценка (32) несколько точнее, чем соответствующая оценка в [20, см. следствие 1].

3. Общий рациональный случай. Т е о р е м а 3. *Для приближений функции* $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, *интерполяционными рациональными функциями* (4) *справедливо неравенство*

$$\varepsilon_{2n} \le C_1(\alpha)\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \sqrt{n}e^{-\pi\sqrt{n\alpha}}, \quad n \ge 1. \tag{33}$$

Причем для приближений на концах отрезка [–1,1] *при некоторых* a_k, $k = 1,2,\dots,2n$, *имеет место следующая оценка:*

$$\varepsilon_{2n}(\pm 1, a) \le C_2(\alpha)\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \cdot \sqrt{n}e^{-\pi\sqrt{2n\alpha}}, \quad n \ge r. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратимся к оценке (7). Очевидно, что

$$\varepsilon_{2n}(a) < \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} |\psi_n(u)|\,du. \tag{35}$$

Рассмотрим интеграл справа:

$$J_n = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} |\psi_n(u)|\,du.$$

Проведем следующие несложные преобразования. Замечая, что $n > r$ (см. (2)), полагаем $n = r + n_1$, $n_1 \ge 1$. Тогда

$$J_n = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^r \left|\prod_{k=r+1}^{n} \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right| du < \int_0^1 u^{\alpha-1} \left|\prod_{k=1}^{n_1} \frac{u-\beta_{r+k}}{u+\beta_{r+k}}\right| du.$$

Теперь поставим задачу об оценке точной нижней грани рассматриваемого интеграла по $\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_n$. Воспользуемся одним результатом работы [25] (см. также [17]) о том, что для любых $\gamma > 0$ и $n \in N$ существуют числа β_k, $k = r+1, r+2, \dots, r+n$, такие, что

$$u^\gamma \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{u-\beta_{r+k}}{u+\beta_{r+k}}\right| \le C(\gamma)e^{-\pi\sqrt{n\gamma}}, \quad u \in [0,1],$$

где $C(\gamma)$ – некоторая положительная постоянная, зависящая от γ. Тогда будем иметь

$$J_n \le \int_0^1 u^{-1+\frac{1}{\sqrt{n_1}}} \left| u^{\alpha-\frac{1}{\sqrt{n_1}}} \prod_{k=1}^{n_1} \frac{u-\beta_{r+k}}{u+\beta_{r+k}}\right| du \le C\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{n_1}}\right) \exp\left(-\pi\sqrt{\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{n_1}}\right)n_1}\right) \cdot \int_0^1 u^{-1+\frac{1}{\sqrt{n_1}}}\,du.$$

Заметим, из [25] следует, что постоянная $C\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{n_1}}\right)$ непрерывно зависит от параметра $\alpha-\frac{1}{\sqrt{n_1}}$ и, следовательно,

$$C\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{n_1}}\right)\le C_3(\alpha).$$

Далее,

$$\sqrt{n_1\alpha}-\sqrt{n_1\alpha-\sqrt{n_1}}=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1\alpha}+\sqrt{n_1\alpha-\sqrt{n}_1}}<\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\quad n_1>\frac{1}{\alpha^2}.$$

В итоге будем иметь, что

$$J_n\le C_4(\alpha)\sqrt{n_1}e^{-\pi\sqrt{n_1\alpha}}\le C_5(\alpha)\sqrt{n}e^{-\pi\sqrt{n\alpha}}.$$

Подставляя эту оценку в (35), получим

$$\varepsilon_{2n}=\inf_{\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}}\varepsilon_{2n}(a)\le C_1(\alpha)\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right|\sqrt{n}e^{-\pi\sqrt{n\alpha}},\quad n>r.$$

Неравенство (33) доказано.

Для доказательства оценки (34) воспользуемся равенством (6). Очевидно,

$$\varepsilon_{2n}(\pm1,a)=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\alpha/2}}\frac{\psi_n(u)}{1+\psi_n^2(u)}du. \tag{36}$$

Далее, рассмотрим интеграл

$$I_n=\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\alpha/2}}\frac{\psi_n(u)}{1+\psi_n^2(u)}du.$$

Представим его в виде

$$I_n=I_n^{(1)}-I_n^{(2)}, \tag{37}$$

где

$$I_n^{(1)}=\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\alpha/2}}\psi_n(u)du,$$

$$I_n^{(2)}=\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\alpha/2}}\frac{\psi_n^3(u)}{1+\psi_n^2(u)}du.$$

Займемся первым интегралом $I_n^{(1)}$. Его можно представить в виде

$$I_n^{(1)}=\int_0^1\phi(u)u^{\alpha-1}\prod_{k=1}^{n_1}\frac{u-\beta_{r+k}}{u+\beta_{r+k}}du, \tag{38}$$

где

$$\phi(u)=\frac{1}{(1-u^2)^{\alpha/2}}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^r,\quad r=\left[\frac{\alpha}{2}\right]+1,\quad n=n_1+r,\quad n>r.$$

Введем новые обозначения:

$$\prod_{k=1}^{n_1}\frac{u-\beta_{r+k}}{u+\beta_{r+k}}=\prod_{k=r+1}^{n}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}=\psi_n(u).$$

Для оценки интеграла $I_n^{(1)}$ введем функцию

$$\Phi\left(\beta_{r+1},\beta_{r+2},\dots,\beta_n\right)=\int_0^1\phi(t)t^{\alpha-1}\psi_n^2(t)dt.$$

Нетрудно показать, что функция $\Phi\left(\beta_{r+1},\beta_{r+2},\dots,\beta_n\right)$ достигает наименьшего значения в некоторой точке $\left(\beta_{r+1}^*,\beta_{r+2}^*,\dots,\beta_n^*\right)\in(0,1)^{n-r}$, причем числа $\beta_{r+1}^*,\beta_{r+2}^*,\dots,\beta_n^*$ попарно различны. Запишем необходимое условие экстремума. Прежде всего, найдем частные производные:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_m}=\int_0^1 2\phi(t)\cdot t^{\alpha-1}\psi_n(t)\prod_{\substack{k=r+1\\k\neq m}}^{n}\frac{t-\beta_k}{t+\beta_k}\frac{-2t}{(t+\beta_m)^2}dt=$$

$$=2\int_0^1\phi(t)t^{\alpha}\psi_n^2(t)\frac{-2dt}{(t+\beta_m)(t-\beta_m)}=2\int_0^1\phi(t)t^{\alpha}\psi_n^2(t)\frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{t+\beta_m}-\frac{1}{t-\beta_m}\right)dt,\quad m=r+1,r+2,\dots,n.$$

Следовательно,

$$\int_0^1\phi(t)t^{\alpha}\psi_n^{*2}(t)\frac{dt}{t+\beta_m^*}=\int_0^1\phi(t)t^{\alpha}\psi_n^{*2}(t)\frac{dt}{t-\beta_m^*},\tag{39}$$

$$\psi_n^*(t)=\prod_{k=r+1}^{n}\frac{t-\beta_k^*}{t+\beta_k^*},\quad m=r+1,r+2,\dots,n.$$

Далее, легко видеть, что имеют место представления

$$\frac{\psi_n^*(t)-\psi_n^*(0)}{t}=\sum_{m=r+1}^{n}\frac{A_m}{t+\beta_m^*};\tag{40}$$

$$\frac{\psi_n^*(-t)-\psi_n^*(0)}{-t}=\sum_{m=r+1}^{n}\frac{A_m}{-t+\beta_m^*};\quad \psi_n^*(-t)=\left(\psi_n^*(t)\right)^{-1};$$

$$\frac{1-\psi_n^*(0)\psi_n^*(t)}{t\psi_n^*(t)}=\sum_{m=r+1}^{n}\frac{A_m}{t-\beta_m^*},\tag{41}$$

где $A_{r+1},A_{r+2},\dots,A_n$ – некоторые числа.

На основании равенств (39)–(41) заключаем, что

$$\int_0^1\phi(t)\cdot t^{\alpha}\psi_n^{*2}(t)\frac{\psi_n^*(t)-\psi_n^*(0)}{t}dt=\int_0^1\phi(t)\cdot t^{\alpha}\psi_n^{*2}(t)\frac{1-\psi_n^*(0)\psi_n^*(t)}{t\psi_n^*(t)}dt.$$

Отсюда найдем, что

$$\int_0^1\phi(t)t^{\alpha-1}\psi_n^*(t)dt=\int_0^1\phi(t)t^{\alpha-1}\psi_n^{*3}(t)dt.\tag{42}$$

Оценим интеграл справа в (42)

$$J_n = \int_0^1 \phi(t) t^{\alpha-1} \psi_n^{*3}(t) dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$|J_n| \le \int_0^1 \phi(t) t^{\alpha-1} \psi_n^{*2}(t) dt. \quad (43)$$

Опираясь на работу [25] и действуя по той же схеме, что и при доказательстве неравенства (33), можно показать, что существуют числа $\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, ..., \beta_n$ такие, что при $n > r$

$$\int_0^1 \phi(t) t^{\alpha-1} \left(\prod_{k=r+1}^{n} \frac{t-\beta_k}{t+\beta_k} \right)^2 dt \le C_6(\alpha) \sqrt{n} e^{-\pi\sqrt{2n\alpha}}. \quad (44)$$

Тогда, учитывая, что правая часть в неравенстве (43) является наименьшим значением функции $\Phi(\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_n)$, для нее тем более справедлива оценка (44), т. е.

$$|J_n| \le C_6(\alpha) \sqrt{n} e^{-\pi\sqrt{2n\alpha}}, \quad n > r. \quad (45)$$

Из равенства (42) и выражения для интеграла $I_n^{(1)}$ (см. (37), (38)) следует, что в случае, когда $\beta_k = \beta_k^*, \ k = r+1, r+2, ..., n,$

$$\left| I_n^{(1)} \right| = |J_n| \le C_6(\alpha) \sqrt{n} e^{-\pi\sqrt{2n\alpha}}, \quad n > r. \quad (46)$$

Естественно, что теперь интеграл $I_n^{(2)}$ (см. (37)) будет иметь вид

$$I_n^{(2)} = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\alpha/2}} \frac{\psi_n^{*3}(u)}{1+\psi_n^{*2}(u)} du.$$

После несложных выкладок придем к тому, что и для этого интеграла также справедлива оценка (46), т. е.

$$\left| I_n^{(2)} \right| \le C_6(\alpha) \sqrt{n} e^{-\pi\sqrt{2n\alpha}}, \quad n > r.$$

В результате из равенства (37) следует, что при $\beta_k = \beta_k^*, \quad k = r+1, r+2, ..., n,$

$$|I_n| \le 2C_6(\alpha) \sqrt{n} e^{-\pi\sqrt{2n\alpha}}, \quad n > r.$$

Таким образом, неравенство (34), а с ним и теорема 3, доказаны.

З а м е ч а н и е 2. Выскажем предположение, что, скорее всего, оценка (34) имеет место на всем отрезке [–1,1].

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность профессору А. А. Пекарскому за полезное обсуждение результатов данной работы.

Acknowledgments. The authors are sincerely grateful to Professor A. A. Pekarsky for useful discussion of the results of the present work.

Список использованных источников

1. Lebesgue, H. Sur I’approximation des fonctions / H. Lebesgue // Bull. Sci. Math. – 1898. – № 22. – P. 278–287.

2. Landay, E. Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion / E. Landay // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1908. – Vol. 25, №. 1. – P. 337–345. https://doi.org/10.1007/bf03029135

3. De la Vallee Poussin, Ch. J. Sur l’approximation des fonctions d’une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de Fourier / Ch. J. De la Vallee Poussin // Bull. Ac. de Belgique. – 1908. – № 3. – P. 3–64.

4. Бернштейн, С. Н. Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей / С. Н. Бернштейн // Сочинения. – 1912. – Т. 1. – С. 105–106.

5. Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении $|x|$ посредством многочленов данной степени / С. Н. Бернштейн // Собр. соч.: в 2 т. – М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1952. – Т. 1. – С. 157–206.

6. Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени / С. Н. Бернштейн // Изв. Акад. наук СССР. Сер.мат. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 169–190.

7. Никольский, С. М. О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a–x|^s$ / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – Т. 11, № 2. – С. 139–180.

8. Райцин, Р. А. О наилучшем среднеквадратическом приближении многочленами и целыми функциями конечной степени функций, имеющих алгебраическую особую точку / Р. А. Райцин // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 4. – С. 59–61.

9. Brutman, L. On the Divergence of Lagrange Interpolation to $|x|$ / L. Brutman, E. Passow // J. Approx. Theory. – 1995. – Vol. 81, № 1. – P. 127–135. https://doi.org/10.1006/jath.1995.1037

10. Byrne, G. J. On Lagrange interpolation with equidistant nodes / G. J. Byrne, T. M. Mills, S. J. Smith // Bull. Aust. Math. Soc. – 1990. – Vol. 42, № 1. – P. 81–89. https://doi.org/10.1017/s0004972700028161

11. Li, X. Local convergence of Lagrange interpolation associated with equidistant nodes / X. Li, E. B. Saff // J. Approx. Theory. – 1994. – Vol. 78, № 2. – P. 213–225. https://doi.org/10.1006/jath.1994.1073

12. Ganzburg, M. I. The Bernstein Constant and Polynomial Interpolation at the Chebyshev Nodes / M. I. Ganzburg // J. Approx. Theory. – 2002. – Vol. 119, № 2. – P. 193–213. https://doi.org/10.1006/jath.2002.3729

13. Revers, M. On the asymptotics of polynomial interpolation to $|x|^\alpha$ at the Chebyshev nodes / M. Revers // J. Approx. Theory. – 2013. – Vol. 165. – P. 70–82.

14. Ganelius, T. H. Rational approximation to x^α on [0,1] / T. H. Ganelius // Anal. Math. – 1979. – № 5. – P. 19–33. https://doi.org/10.1007/bf02079347

15. Andersson, J.-E. Rational approximation to functions like x^α in integral norms / J.-E. Andersson // Anal. Math. – 1988. – № 14, № 1. – P. 11–25.

16. Вячеславов, Н. С. О приближении функции $|x|$ рациональными функциями / Н. С. Вячеславов // Мат. заметки. – 1974. – Т. 16, № 1. – С. 163–171.

17. Вячеславов, Н. С. О наименьших уклонениях функции sign x и ее первообразных от рациональных функциях в метриках L_p, $0 < p \leq \infty$ / Н. С. Вячеславов // Мат. сб. – 1977. – Т. 103 (145), № 1 (5). – С. 23–36.

18. Шталь, Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на [–1,1] / Г. Шталь // Мат. сб. – 1992. – Т. 183, № 8. – С. 85–118.

19. Лунгу, К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К. Н. Лунгу // Мат. сб. – 1971. – Т. 86 (128), № 2 (10). – С 314–324.

20. Лунгу, К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К. Н. Лунгу // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 25, № 2. – С 151–160.

21. Ровба, Е. А. О приближении рациональными функциями с заданным числом полюсов / Е. А. Ровба // Современные проблемы теории функций: материалы Всесоюз. шк. по теории функций, Баку, 21 мая – 1 июня 1977 г. / Бакин. гос. ун-т. – Баку, 1980. – С. 234–239.

22. Ровба, Е. А. О приближении периодических аналитических функций с характерными особенностями рациональными функциями / Е. А. Ровба // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1974. – № 6. – С. 43–49.

23. Русак, В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск: БГУ, 1979. – 176 с.

24. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 1997. – Т. 2. – 800 с.

25. Пекарский, А. А. Построение экстремальных произведений Бляшке / А. А. Пекарский, Е. В. Ковалевская // Вес. Гродн. гос. ун-та им. Я. Купалы. Сер. 2. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 6–13.

References

1. Lebesgue H. Sur I’approximation des fonctions. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, no. 22, 1898, pp. 278–287.

2. Landay E. Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1908, vol. 25, no. 1, pp. 337–345. https://doi.org/10.1007/bf03029135

3. De la Vallee Poussin Ch. J. Sur l’approximation des fonctions d’une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de Fourier. *Bull. Ac. de Belgique*, 1908, no. 3, pp. 3–64.

4. Bernshtein S. N. *Proof of the WeierstrassTheorem, based on probability theory. Vol. 1.* Writings, 1912, pp. 105–106.

5. Bernshtein S. N. *On the best approximation $|x|$ by polynomials of a given degree. Vol. 1.* Moscow, Publishing House Acad. sciences USSR, 1952, pp. 157–206 (in Russian).

6. Bernshtein S. N. Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynomes de degres tre’s eleves. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1938, vol. 2, no. 2, pp. 169–190 (in Russian).

7. Nikolskii S. M. On the best mean approximation by polynomials of the functions $|a–x|^s$. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1947, vol. 11, pp. 139–180 (in Russian).

8. Raitsin R. A. On the best approximation in the mean by polynomials and entire functions of finite degree of functions having an algebraic singularity. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [Russian Mathematics], 1969, no. 13, pp. 59–61 (in Russian).

9. Brutman L., Passow E. On the divergence of Lagrange interpolation to $|x|$. *Journal of Approximation Theory*, 1995, vol. 81, no. 1, pp. 127–135. https://doi.org/10.1006/jath.1995.1037

10. Byrne G. J., Mills T. M., Smith S. J. On Lagrange interpolation with equidistant nodes. *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* 1990, vol. 42, no. 1, pp. 81–89. https://doi.org/10.1017/s0004972700028161

11. Li X., Saff E. B. Local convergence of Lagrange interpolation associated with equidistant nodes. *Journal of Approximation Theory,* 1994, vol. 78, no. 2, pp. 213–225. https://doi.org/10.1006/jath.1994.1073

12. Ganzburg M. The Bernstein Constant and Polynomial Interpolation at the Chebyshev Nodes. *Journal of Approximation Theory,* 2002, vol. 119, no. 2, pp. 193–213. https://doi.org/10.1006/jath.2002.3729

13. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to $|x|^\alpha$ at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory,* 2013, vol. 165, pp. 70–82.

14. Ganelius T. H. Rational approximation to x^α on [0,1]. *Analysis Mathematica*, 1979, no. 5, pp. 19–33. https://doi.org/10.1007/bf02079347

15. Andersson J.-E. Rational approximation to functions like x^α in integral norms. *Analysis Mathematica*, 1988, vol. 14, no. 1, pp. 11–25. https://doi.org/10.1007/bf02350637

16. Vyacheslavov N. S. Approximation of the function $|x|$ by rational functions. *Mathematical Notes*, 1974, vol. 16, no. 1, pp. 680–685.

17. Vyacheslavov N. S. On the least deviations of the function sign x and its primitives from the rational functions in the Lp metrics, $0 < p \le \infty$. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1977, vol. 32, no. 1, pp. 19–31. https://doi.org/10.1070/sm1977v032n01abeh002313

18. Shtal' G. Best uniform rational approximation of $|x|$ on $[-1,1]$. *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, 1993, vol. 76, no. 2, pp. 461–487. https://doi.org/10.1070/sm1993v076n02abeh003422

19. Lungu K. N. On best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1971, vol. 15, no. 2, pp. 313–324. https://doi.org/10.1070/sm1971v015n02abeh001547

20. Lungu K. N. Best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Siberian Mathematical Journal*, 1984, vol. 25, no. 2, pp. 289– 296.https://doi.org/10.1007/bf00971467

21. Rovba E. A. On approximation by rational functions with a given number of poles. *Sovremennye problem teorii funktsii: materialy Vsesoyuznoi shkoly po teorii funktsii, Baku, 21 maya – 1 iyunya 1977 g.* [Modern Problems of the Theory of Functions: Materials All-Union. schools on the theory of functions, Baku, May 21 – June 1, 1977]. Baku, 1980, pp. 234–239 (in Russian).

22. Rovba E. A. On approximation of periodic analytic functions with characteristic features of rational functions. *Vestsi Akademii navuk BSSR. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics series*, 1974, no. 6, pp. 43–49 (in Russian).

23. Rusak V. N. *Rational Functions as an Approximation Apparatus*. Minsk, BSU, 1979. 176 p. (in Russian).

24. Fikhtengol'ts G. M. *Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 2*. St. Petersburg, Lan` Publ., 1997. 800 p. (in Russian).

25. Pekarskii A. A, Kovalevskaya E. V. Building extreme works Blaschke. *Vesnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Yanki Kupaly. Seriya 2 = Vesnik of the Yanka Kupala Grodno State University. Series 2*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 6–13 (in Russian).

Информация об авторах

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com

Медведева Виктория Юрьевна – магистрант, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: Medvedeva_VJ_97@mail.ru

Information about the authors

Evgeniy A. Rovba – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodna, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com

Victoria Yu. Medvedeva – Undergraduate, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: Medvedeva_VJ_97@.mail.ru