ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.956.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-406-412

Поступила в редакцию 27.11.2019
Received 27.11.2019

В. И. Корзюк[1,2], С. Н. Наумовец[3], В. А. Севастюк[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[3]Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. Рассмотрена смешанная задача для одномерного волнового уравнения с производными второго порядка в граничных условиях. Методом характеристик найдено классическое решение указанной задачи в аналитическом виде. Доказана его единственность при выполнении соответствующих условий согласования.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия согласования, классическое решение

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными второго порядка в граничных условиях / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. А. Севастюк // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 406–412. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-406-412

V. I. Korzyuk[1,2], S. N. Naumavets[3], V. A. Sevastyuk[1]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[3]Brest State Technical University, Brest, Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH SECOND-ORDER DERIVATIVES AT BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. This paper considers the mixed problem for a one-dimensional wave equation with second-order derivatives at boundary conditions. Using the method of characteristics, a classical solution to this problem is found in analytical form. Its uniqueness is proved under the relevant compatibility conditions.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy conditions, agreement conditions, classical solution

For citation. Korzyuk V. I., Naumavets S. N., Sevastyuk V. A. Classical solution of the mixed problem for a one-dimensional wave equation with second-order derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 406–412 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-406-412

Введение. В [1] в аналитическом виде представлено классическое решение в полуполосе первой смешанной задачи, где на части границы заданы условия с производными второго порядка. В [2] рассмотрена задача, где на границе задано условие в виде производной, порядок которой превышает порядок основного дифференциального уравнения. Задачи рассмотрены для одномерного волнового уравнения. В настоящей работе находится классическое решение смешанной задачи, где на всей границе присутствуют дифференциальные операторы второго порядка.

Метод характеристик, кроме построения искомого решения, также позволяет проанализировать качественную картину самого решения. Близкими к данной статье являются исследования [3, 4] и другие, где рассматриваются классические решения смешанных задач. Постановка задачи и полученные для нее результаты являются новыми. В решении смешанных задач могут быть обобщения как в сторону рассмотрения других уравнений, так и задания новых граничных условий.

Постановка задачи. На замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in\overline{Q}\subset\Re^2$ рассмотрим волновое уравнение

$$\left(\partial_{x_0}^2-a^2\partial_{x_1}^2\right)u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in\overline{Q}\subset\Re^2, \tag{1}$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2=\partial^2/\partial x_0^2$, $\partial_{x_1}^2=\partial^2/\partial x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \left(\partial_{x_0}^2+b^{(1)}(x_1)\partial_{x_0}+b^{(0)}(x_1)\right)u(0,x_1)=\psi(x_1),\quad b^{(1)}(x_1)\neq 0,\quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

граничные условия

$$\partial_{x_1}^2u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\quad \partial_{x_1}^2u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty). \tag{3}$$

Здесь $f:\boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\overline{Q}$, – заданная на $\overline{Q}$ функция, $\varphi:x_1\to\varphi(x_1)\in\Re$, $x_1\in[0,l]$, $\psi:\ x_1\to\psi(x_1)\in\Re$, $x_1\in[0,l]$, $b:x_1\to b(x_1)\in\Re$, $x_1\in[0,l]$, – функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)}:x_0\to\mu^{(j)}(x_0)\in\Re$, $x_0\in[0,\infty)$, – заданные функции на $[0,\infty]$, $j=1,2$. Гладкость всех указанных функций будет уточнена ниже.

Кроме того, функции f, φ, ψ и $\mu^{(j)}$, $j=1,2$, удовлетворяют следующим однородным условиям согласования:

$$\mu^{(1)}(0)-d^2\varphi(0)+\frac{1}{a^2}f(0,0)=0, \tag{4}$$

$$\mu^{(2)}(0)-d^2\varphi(0)+\frac{1}{a^2}f(0,1)=0. \tag{5}$$

Классическое из $C^2\left(\overline{Q}\right)$ решение задачи (1)–(3). Построение решения задачи (1)–(3) будем осуществлять из общего решения u класса $C^2(\overline{Q})$ уравнения (1). Как известно, это решение есть сумма общего решения $u^{(0)}\in C^2(\overline{Q})$ однородного уравнения

$$\left(\partial_{x_0}^2-a^2\partial_{x_1}^2\right)u^{(0)}(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q}, \tag{6}$$

и частного решения $v_p\in C^2(\overline{Q})$ неоднородного уравнения (1).

Построение решения задачи (1)–(3) будет осуществляться пошагово, начиная с условий Коши (2). В качестве частного решения возьмем частное решение, построенное для уравнения (1) в работе [3], а именно:

$$v_p(\boldsymbol{x})=v_p^{(m)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in Q^{(m)}=\left(\frac{(m-1)l}{a},\frac{ml}{a}\right),\ m=1,2,3,\ldots, \tag{7}$$

где

$$v_p(\boldsymbol{x})=f^{(1,m)}\left(x_1-ax_0\right)+f^{(2,m)}(x_1+ax_0)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{l-ml}^{x_1-ax_0}dy\int\limits_{ml}^{x_1+ax_0}f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dz,\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(m)}}, \tag{8}$$

$\overline{Q^{(m)}}$ – замыкание подобласти $Q^{(m)}$, функции $f^{(j,m)}$ из класса C^2.

Т е о р е м а 1. *Пусть правая часть уравнения* (1) $f\in C^1(\overline{Q})$. *Тогда функция* v_p, *определенная формулами* (7) *и* (8) *при соответствующем выборе* $f^{(j,m)}$, $j=1,2$, $m\in\aleph$, *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$, *является решением уравнения* (1) *и удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered}v_p(0,x_1)=\partial_{x_0}v_p(0,x_1)=0,\\ \partial_{x_0}^2v_p(0,x_1)=f(0,x_1),\quad x_1\in[0,l].\end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство см. в [3].

Как известно, общее решение уравнения (1) из класса $C^2(\bar{Q})$ представимо в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 - ax_0) + v_p(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q}, \tag{10}$$

где $g^{(j)}$ ($j = 1,2$) – произвольные функции из класса C^2. Точнее, $g^{(1)} \in C^2\left(\left(-\infty, l\right]\right)$, $g^{(2)} \in C^2\left(\left[0, \infty\right)\right)$ для $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$, если условиться, что $a > 0$.

Функции $g^{(j)}$ выбираем такими, чтобы решение (10) удовлетворяло условиям (2) и (3). Подставляя в (10) в условия типа Коши (2), получим систему двух уравнений

$$\begin{gathered} g^{(1)}(x_1) + g^{(2)}(x_1) = \varphi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \\ a^2 d^2 g^{(1)}(x_1) + a^2 d^2 g^{(2)}(x_1) - ab^{(1)}(x_1) dg^{(1)}(x_1) + ab^{(1)}(x_1) dg^{(2)}(x_1) + \\ + b^{(0)}(x_1) g^{(1)}(x_1) + b^{(0)}(x_1) g^{(2)}(x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l]. \end{gathered} \tag{11}$$

Из системы (11) находим значения $g^{(j)}(x_1)$ функций $g^{(j)}$, $j = 1,2$. Так как по условию $b^{(1)}(x_1) \neq 0$ для $x_1 \in [0, l]$, то

$$\begin{aligned} g^{(1)}(z) = g^{(1,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a}\int_0^z \frac{1}{b^{(1)}(\xi)}\left[\psi - a^2 d^2 \varphi - b^{(0)}\varphi\right](\xi)\, d\xi - C, \\ g^{(2)}(z) = g^{(2,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a}\int_0^z \frac{1}{b^{(1)}(\xi)}\left[\psi - a^2 d^2 \varphi - b^{(0)}\varphi\right](\xi)\, d\xi + C, \end{aligned} \tag{12}$$

где $z \in [0, l]$, C – произвольная постоянная из множества $\Re$, d – оператор обыкновенной производной, $d^2 = d \cdot d$, $d^3 = d \cdot d \cdot d$ и так далее.

Для других z значения $g^{(j)}(z)$, $j = 1,2$, определяем из граничных условий (3). Для этого введем обозначения

$$\begin{gathered} g^{(1)}(z) = g^{(1,k)}(z), \quad \text{если } z \in [-kl, -(k-1)l], \\ g^{(2)}(z) = g^{(2,k)}(z), \quad \text{если } z \in [kl, (k+1)l], \end{gathered} \tag{13}$$

где $k = 1,2,3,\ldots$. Подставляя представление решения (10) в первое условие (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$d^2 g^{(1)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - d^2 g^{(2)}(-z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{z}{a}, x_1 = 0\right). \tag{14}$$

Используя второе условие из (3), получим уравнения

$$d^2 g^{(2)}(z) = \mu^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - d^2 g^{(1)}(2l - z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{z-l}{a}, l\right). \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) представляют собой уравнения с аргументами со сдвигом. Учитывая сказанное и то, что значения, согласно формулам (12), определены на отрезке $[0,l]$, целесообразно формулы (14) и (15) записать в виде

$$\begin{aligned} d^2 g^{(1,k)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - d^2 g^{(2,k-1)}(-z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{z}{a}, 0\right), \quad z \in [-kl, -(k-1)l], \\ d^2 g^{(2,k)}(z) = \mu^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - d^2 g^{(1,k-1)}(2l - z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{z-l}{a}, l\right), \quad z \in [kl, (k+1)l]. \end{aligned} \tag{16}$$

В пределах указанных отрезков интегрируем уравнения (16). В результате получим соотношения

$$
\begin{aligned}
&g^{(1,k)}(z)=\int_0^z(z-\xi)\mu^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi-\int_0^z(z-\xi)\partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{\xi}{a},0\right)d\xi-\\
&\quad-g^{(2,k-1)}(-z)+C^{(1,k)}z+C^{(2,k)},\quad z\in[-kl,-(k-1)l],\\
&g^{(2,k)}(z)=\int_0^z(z-\xi)\mu^{(2)}\left(\frac{\xi-l}{a}\right)d\xi-\int_0^z(z-\xi)\partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{\xi-l}{a},l\right)d\xi-\\
&\quad-g^{(1,k-1)}(2l-z)+\tilde{C}^{(1,k)}z+\tilde{C}^{(2,k)},\quad z\in[kl,(k+1)l],
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $C^{(j,k)}$, $\tilde{C}^{(j,k)}$ – произвольные постоянные из $\Re$, которые появились в результате интегрирования уравнения (16), $k = 1,2,3,\ldots$.

Из формул (7), (8), (12) и (17) видно, что значения $g^{(j,k)}(z)$ функций $g^{(j,k)}$, $j = 1,2$, $k = 1,2,3,\ldots$, определяются через заданные функции f, φ, ψ и $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$. Если предположить, что $f\in C^1(\bar{Q})$, $\varphi\in C^3([0,l])$, $\psi\in C^1([0,l])$, $\mu^{(j)}\in C([0,\infty))$, то функции $g^{(1,k)}$ будут из класса $C^2([-kl,-(k-1)l])$, а $g^{(2)}\in C^2([kl,(k+1)l])$, $k=1,2,3,\ldots$. В целом, чтобы функции $g^{(1)}\in C^2((-\infty,l])$ и $g^{(2)}\in C^2([0,\infty))$, определенные через эти функции согласно формулам (13), необходимо и достаточно, чтобы для частично определенных функций $g^{(j,k)}$ в общих точках соприкосновения выполнялись равенства

$$d^p g^{(1,k+1)}(-kl)=d^p g^{(1,k)}(-kl),\quad p=0,1,2;\ \ k=0,1,2,\ldots, \tag{18}$$

$$d^p g^{(2,k)}(kl)=d^p g^{(2,k-1)}(kl),\quad p=0,1,2;\ \ k=1,2,\ldots . \tag{19}$$

Л е м м а 1. *Равенства* (18) *и* (19) *для каждого* $p = 0,1,2$ *в отдельности выполняются тогда и только тогда, когда они выполняются для какого-нибудь* k.

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из формул (12) и (17), так как они представляют собой рекуррентную зависимость между $g^{(j,k+1)}$ и $g^{(j,k)}$.

Чтобы дальше исследовать равенства (18) и (19), вычислим производные первого порядка функций (12) и (17):

$$
\begin{aligned}
dg^{(1,0)}(z)&=\frac{1}{2}d\varphi(z)-\frac{1}{2ab^{(1)}(z)}\left[\psi(z)-a^2d^2\varphi(z)-b^{(0)}(z)\varphi(z)\right],\\
dg^{(2,0)}(z)&=\frac{1}{2}d\varphi(z)+\frac{1}{2ab^{(1)}(z)}\left[\psi(z)-a^2d^2\varphi(z)-b^{(0)}(z)\varphi(z)\right],
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
dg^{(1,k)}(z)&=\int_0^z\mu^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi+dg^{(2,k-1)}(-z)-\int_0^z\partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{\xi}{a},0\right)d\xi+C^{(1,k)},\\
dg^{(2,k)}(z)&=\int_0^z\mu^{(2)}\left(\frac{\xi-l}{a}\right)d\xi+dg^{(1,k-1)}(2l-z)-\int_0^z\partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{\xi-l}{a}\right)d\xi+\tilde{C}^{(1,k)}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Рассмотрим сначала равенства (18) для $k = 0$ и равенства (19) для $k = 1$. Запишем их через заданные функции задачи (1)–(3).

Пусть $p = 1$. Так как производные $dg^{(j,0)}(z)$, $j = 1,2$, представленные формулами (20), не содержат произвольных постоянных, а представляются единственным образом через заданные функции задачи (1)–(3), то, подставляя их в формулы (21), определим единственным образом и константы $C^{(1,1)}$ и $\tilde{C}^{(1,1)}$ через заданные функции. Продолжая данный процесс дальше, мы единственным образом определим все константы $C^{(1,k)}$ и $\tilde{C}^{(1,k)}$ через заданные функции задачи (1)–(3) и для $k = 2,3,4,\ldots$.

А теперь пусть $p = 0$. Из соотношений (12) и (17), используя условие согласования (18) для $k = 0$, имеем равенство

$$g^{(1,1)}(l) = -\frac{1}{2}\varphi(0) - C + C^{(2,1)} = g^{(1,0)}(0) = \frac{1}{2}\varphi(0) - C.$$

Отсюда $C^{(2,1)} = \varphi(0)$. Аналогично, из условия (19) в случае $k = 1$ из соотношений (12) и (17) следует равенство

$$g^{(2,1)}(l) = \int_0^l (z-\xi)\mu^{(2)}\left(\frac{\xi - l}{a}\right)d\xi - \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{1}{2a}\int_0^l \frac{\left[\psi - a^2 d^2\varphi - b^{(0)}\varphi\right](\xi)}{b^{(1)}(\xi)}d\xi +$$

$$+C - \int_0^l (z-\xi)\partial_{x1}^2 v_p\left(\frac{\xi - l}{a}, l\right)d\xi + \tilde{C}^{(1,1)}l + \tilde{C}^{(2,1)} =$$

$$= g^{(2,0)}(l) = \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{1}{2a}\int_0^l \frac{\left[\psi - a^2 d^2\varphi - b^{(0)}\varphi\right](\xi)}{b^{(1)}(\xi)}d\xi + C.$$

Из последнего равенства следует, что константа $\tilde{C}^{(2,1)}$ также определяется единственным образом через значения заданных функций задачи (1)–(3), а именно:

$$\tilde{C}^{(2,1)} = \varphi(l) - \int_0^l (z-\xi)\mu^{(2)}\left(\frac{\xi - l}{a}\right)d\xi + \int_0^l (z-\xi)\partial_{x1}^2 v_p\left(\frac{\xi - l}{a}, l\right)d\xi - \tilde{C}^{(1,1)}l.$$

Продолжая данный процесс дальше, из условий согласования (18) и (19) согласно полученным выражениям $C^{(2,k)}$ и $\tilde{C}^{(2,k)}$ для других $k = 2,3,\ldots$, которые определяются единственным образом.

Полученный результат сформулируем в виде леммы.

Л е м м а 2. *Если функции*

$$f \in C^1(\bar{Q}),\ \ \varphi \in C^3\left(\left[0,l\right]\right),\ \ b^{(0)}, b^{(1)},\ \ \psi \in C^1\left(\left[0,l\right]\right),\ \ \mu^{(j)} \in C\left(\left[0,\infty\right)\right),\ \ j = 1,2,$$

то функции $g^{(j,k)}$, $j = 1,2$, $k = 0,1,2,\ldots$, *представленные формулами* (12) *и* (17), *записываются в виде*

$$g^{(j,k)}(z) = \tilde{g}^{(j,k)}(z) + (-1)^j C,\quad j = 1,2,\quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{22}$$

тогда и только тогда, когда для них выполняются условия согласования (18) *и* (19) *для* $p = 0,1$, *где функции* $\tilde{g}^{(j,k)}$ *из класса* $C^2\left(\left[(-1)^j kl, (-1)^j (k+1)l\right]\right)$ *определяются единственным образом через заданные функции задачи* (1)–(3), C – *произвольная константа из* $\Re$.

Кроме этого, при выполнении условий леммы 2 функции $g^{(j)}$, $j = 1,2$, определенные формулами (13), принадлежат классу C^1 и выражаются формулами (22). Справедлива

Л е м м а 3. *При выполнении условий леммы 2 функция* $g^{(1)} \in C^1\left((-\infty,l]\right)$, *а* $g^{(2)} \in C^1\left([0,\infty)\right)$ *тогда и только тогда, когда для составляющих их функций* $g^{(j,k)}$, $j = 1,2$, $k = 0,1,2,\ldots$, *выполняются условия согласования* (18) *и* (19) *для* $p = 0,1$. *Кроме этого, при соответствующем выборе единственным способом констант* $C^{(j,k)}$ *и* $\tilde{C}^{(j,k)}$, *входящих в определение функций* $g^{(j,k)}$, *справедливы представления*

$$g^{(j)}(z) = \tilde{g}^{(j)}(z) + (-1)^j C,\quad j = 1,2, \tag{23}$$

где функции определены единственным образом через заданные функции задачи (1)–(3), C – *произвольная константа из* $\Re$.

Т е о р е м а 2. *Пусть заданные функции задачи* (1)–(3) *удовлетворяют следующим условиям гладкости:*

$$f \in C^1(\bar{Q}),\quad \varphi \in C^3\left(\left[0,l\right]\right),\quad \psi \in C^1\left(\left[0,l\right]\right),\quad \mu^{(j)} \in C\left(\left[0,\infty\right)\right),\quad j = 1,2,\ \ b^{(0)}, b^{(1)} \in C^1\left(\left[0,l\right]\right).$$

При выполнении этих условий функция вида (10) *является единственным классическим решением из класса* $C^2(\bar{Q})$ *тогда и только тогда, когда имеют место однородные условия согласования* (18) *для* $p = 0,1$ *и* $k = 0$, (19) – *для* $p = 0,1$ *и* $k = 1$, *однородные условия согласования* (4) *и* (5), *где частное решение* v_p *определяется формулами* (7), (8), *функции* $g^{(j)}$ (j = 1,2) – *формулами* (12), (13), (17).

Доказательство. Согласно теореме 1, если $f \in C^1(\bar{Q})$, то частное решение $v_p \in C^2(\bar{Q})$.

Из леммы 3 следует, что функция $g^{(1)}$ – из класса $C^1\big((-\infty, l]\big)$, $g^{(2)}$ – из класса $C^1\big([0,\infty)\big)$. Как было сказано ранее, эти функции дважды непрерывно дифференцируемы на соответствующих областях определения тогда и только тогда, когда для $p = 2$ дополнительно будут выполняться условие (18) для $k = 0$ и условие (19) для $k = 1$. Распишем эти условия в явном виде через заданные функции, используя формулы (12) и (16). Для этого вычислим вторые производные соотношений (12). В результате получим

$$\begin{aligned} d^2 g^{(1,0)}(z) &= \frac{1}{2} d^2\varphi(z) + \frac{1}{2a\big(b^{(1)}(z)\big)^2} \cdot db^{(1)}(z)\Big[\psi(z) - a^2 d^2\varphi(z) - b^0 v(z)\varphi(z)\Big] - \\ &\quad - \frac{1}{2ab^{(1)}(z)}\Big[d\psi(z) - a^2 d^3\varphi(z) - db^{(0)}(z)\varphi(z) - b^{(0)}(z) d\varphi(z)\Big], \\ d^2 g^{(2,0)}(z) &= \frac{1}{2} d^2\varphi(z) - \frac{1}{2a\big(b^{(1)}(z)\big)^2} \cdot db^{(1)}(z)\Big[\psi(z) - a^2 d^2\varphi(z) - b^0(z)\varphi(z)\Big] + \\ &\quad + \frac{1}{2ab^{(1)}(z)}\Big[d\psi(z) - a^2 d^3\varphi(z) - db^{(0)}(z)\varphi(z) - b^{(0)}(z) d\varphi(z)\Big]. \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть в равенстве (18) $p = 2$, $k = 0$. В этом случае, используя первое соотношение $d^2 g^{(1,1)}(0)$ из (16), а также $d^2 g^{(1,0)}$ из (24), данное равенство запишется в виде

$$\mu^{(1)}(0) - \frac{1}{2} d^2\varphi(0) - \partial_{x1}^2 v_p(0,0) = \frac{1}{2} d^2\varphi(0).$$

Так как согласно уравнению (1) и последнему условию из (9)

$$\partial_{x1}^2 v_p(0,0) = \frac{1}{a^2}\partial_{x0}^2 v_p(0,0) - \frac{1}{2a^2} f(0,0) = -\frac{1}{a^2} f(0,0),$$

мы получили однородное условие согласования (4)

$$\mu^{(1)}(0) - d^2\varphi(0) + \frac{1}{a^2} f(0,0) = 0. \tag{25}$$

Аналогично, из равенства (19) для $p = 2$, $k = 1$ получаем однородное условие согласования (5)

$$\mu^{(2)}(0) - d^2\varphi(l) + \frac{1}{a^2} f(0,l) = 0. \tag{26}$$

Таким образом, согласно лемме 3 и равенствам (18) и (19), функции $g^{(1)} \in C^2\big((-\infty, l]\big)$, $g^{(2)} \in C^2\big([0,\infty)\big)$. Следовательно, функция u, представленная формулой (10), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$ и является решением задачи (1)–(3). Это решение является единственным, что следует из леммы 3, а также из представления (23) для функций $g^{(j)}$, j = 1,2.

Все остальные утверждения теоремы 2 следуют из предыдущих рассуждений.

Замечание. В теореме 2 сформулированы утверждения через выполнение необходимых и достаточных условий согласования (18) для p = 0,1 и $k = 0$ и (19) для p = 0,1 и $k = 1$. Из предыдущих рассуждений следует, что они эквивалентны специально выбранным единственным образом коэффициентам $C^{(j,k)}$ *и* $\tilde{C}^{(j,k)}$, j = 1,2; k = 0,1,2,…, в формулах (17). Эти коэффициенты, начиная с $k = 1$, можно выписать в явном виде. Тогда в формулировке теоремы вместо условий согласования (18) и (19) для p = 0,1 будут необходимыми и достаточными единственным образом выбранные эти выражения, которые фигурируют в качестве констант $C^{(j,k)}$ *и* $\tilde{C}^{(j,k)}$, входящих в формулы (17) функций $g^{(j,k)}$.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. Навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 7–20.

2. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 11–17.

3. Корзюк, В. И. О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. А. Севастюк // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 35–42.

4. Корзюк, В. И. Метод характеристического параллелограмма решения второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. П. Сериков // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 43–53.

References

1. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. Classical solution to the first mixed problem for one-dimensional wave equation with conditions of cauchy type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 7–20 (in Russian).

2. Korzyuk V. I., Naumavets S. N. Classical solution of mixed problem for one-dimensional wave equation with derivatives of high order in the boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 3, pp. 11–17 (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Naumavets S. N., Sevastyuk V. A. On the classical solution of the second mixed problem for a one-dimensional wave equation. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 35–42 (in Russian).

4. Korzyuk V. I., Naumavets S. N., Serikov V. P. The method of the characteristic parallelogram of the solution of the second mixed problem for the one-dimensional wave equation. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 43–53 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь), Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Наумовец Светлана Николаевна – старший преподаватель, Брестский государственный технический университет (ул. Московская, 267, 224017, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: e-cveta@tut.by

Севастюк Владимир Александрович – ведущий инженер-программист, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician, Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Sviatlana N. Naumavets – Senior Lecturer, Brest State Technical University (267, Moskovskaya Str., 224017, Brest, Republic of Belarus). E-mail: e-cveta@tut.by

Vladimir A. Sevastyuk – Engineer, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus).