

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.6, 537.533, 7.621.3.032.26

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-435-444>

Поступила в редакцию 18.02.2019

Received 18.02.2019

**А. М. Крот<sup>1</sup>, О. Н. Петрович<sup>2</sup>, И. С. Русецкий<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Объединенный институт проблем информатики*

*Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь*

## **АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ И МАГНИТОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЯХ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Аннотация.** Предложен алгоритм численного расчета траекторий электронов, эмитированных плазмой, в случае движения пучка в аксиально-симметричных электростатическом и магнитостатическом полях. Данный алгоритм основан на технологии дискретизации пучка заряженных частиц токовыми трубками и методе декомпозиции расчетной области. Моделирование полей и численное решение уравнений движения частиц осуществляются с применением квазиструктурированных сеток.

**Ключевые слова:** деформируемые трубки тока, электронно-оптические системы, декомпозиция расчетной области, квазиструктурированные сетки, нелинейные самосогласованные задачи, движение электронных пучков, аксиально-симметричные электростатическое и магнитостатическое поля

**Для цитирования.** Крот, А. М. Алгоритм расчета траекторий электронов в электростатическом и магнитостатическом полях электронно-оптических систем / А. М. Крот, О. Н. Петрович, И. С. Русецкий // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 435–444. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-435-444>

**A. M. Krot<sup>1</sup>, O. N. Petrovich<sup>2</sup>, I. S. Rusetski<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus*

## **CALCULATION ALGORITHM OF THE TRAJECTORIES OF ELECTRONS IN ELECTROSTATIC AND MAGNETOSTATIC FIELDS OF ELECTRON-OPTICAL SYSTEMS**

**Abstract.** An algorithm for numerical calculation of the trajectories of electrons emitted by plasma in the electron beam moving in axially symmetric electrostatic and magnetostatic fields is proposed. This algorithm is based on the technology of charged particle beam discretization by current tubes and the decomposition method of the computational domain. Field simulation and numerical solution of equations for particle motion are carried out with the use of quasi-structured grids.

**Keywords:** deformable current tubes, electron-optical systems, decomposition of the computational domain, quasi-structured grids, nonlinear self-consistent problems, electron beam motion, axially symmetric electrostatic and magnetostatic fields

**For citation.** Krot A. M., Petrovich O. N., Rusetski I. S. Calculation algorithm of the trajectories of electrons in electrostatic and magnetostatic fields of electron-optical systems. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 435–444 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-435-444>

**Введение.** Моделирование формирования электронно-оптическими системами (ЭОС) интенсивных пучков и описание потока электронов в устройствах плазменной эмиссионной электроники требует развития методов расчета движения заряженных частиц в электромагнитных полях и нахождения объемного заряда пучка.

В работе [1] приведено сравнение современных пакетов программ для численного моделирования плазменных эмиссионных систем: PBGUNS [2, 3], KOBRA-3 [4, 5], POISSON-2 [6, 7], ELIS [8]. Вычислительные коды PBGUNS, POISSON-2 и ELIS предназначены для расчетов двумерных задач формирования и транспортировки пучков заряженных частиц в системах с плазменным эмиттером. Код KOBRA-3 позволяет моделировать трехмерные задачи сильноточной

электронной и ионной оптики. Расчет электростатических полей в пакетах PBGUNS, KOBRA-3 и ELIS основан на методе конечных разностей для уравнения Пуассона, в пакете POISSON-2 используется метод интегральных уравнений с вычислением потенциала и компонент напряженности поля через поверхностную и объемную плотность зарядов. В программных продуктах PBGUNS, KOBRA-3, POISSON-2 возможен учет магнитостатического поля.

В программных кодах PBGUNS, KOBRA-3, POISSON-2 для описания потока заряженных частиц используется дискретная модель недеформируемых токовых трубок, толщина которых достаточно мала, чтобы трубку можно было задать центральной траекторией. В этом случае плотность тока по сечению такой трубки остается постоянной.

Методом описания движения электронного потока в пакете ELIS служит подход, основанный на применении деформируемых трубок тока [9]. Вместо последовательности частиц, вылетающих одна за другой из данной точки эмиттера в разные моменты времени, рассматривается траектория одной частицы, которая представляет собой граничную траекторию трубки тока. Поверхность эмиттера разбивается на слои, для которых рассчитываются граничные траектории. Частицы потока, вылетевшие с внутренних точек каждого слоя эмиттера, при движении заполняют пространство между граничными траекториями, образуя тем самым деформируемую трубку тока. Поперечное сечение такой токовой трубки изменяется вследствие расхождения или сближения граничных траекторий, и плотность тока такой трубки изменяется по ее сечению.

Указанный подход в пакете ELIS был изначально разработан для расчета траекторий электронов, движущихся в электростатическом поле. В рамках данной статьи предложен алгоритм расчета траекторий электронов, эмитированных плазмой, в совмещенных аксиально-симметричных электро- и магнитостатическом полях. Разработанный алгоритм, с целью построения эффективных численных методов описания потока заряженных частиц, основан на технологии декомпозиции расчетной области, в соответствии с которой моделирование полей и численное решение уравнений движения частиц проводится на квазиструктурированных сетках [10].

**Уравнение траектории заряженной частицы в аксиально-симметричных электростатическом и магнитостатическом полях систем формирования электронного потока.** Основу метода описания потока заряженных частиц токовыми трубками составляет уравнение движения частицы, которое в статических полях принимает вид [11]

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -q_0 \left( \text{grad } \varphi - [\vec{v} \times \vec{B}] \right), \quad (1)$$

и энергетическое уравнение

$$\frac{m_0 \vec{v}^2}{2} - \frac{m_0 \vec{v}^2(0)}{2} = -q_0 (\varphi - \varphi(0)), \quad (2)$$

где  $\varphi$  – скалярный потенциал электромагнитного поля,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции,  $m_0$  – масса частицы,  $q_0$  – заряд частицы (например,  $q_0 = -e$  – заряд электрона),  $\vec{v}$  – скорость частицы,  $\vec{v}(0)$  – начальная скорость вылета заряженных частиц (электронов) из плазмы с потенциалом  $\varphi(0) = \varphi_{pl}$ .

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  может быть представлен через векторный потенциал электромагнитного поля  $\vec{A}$  [12]:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (3)$$

Уравнения (1), (2) являются *базовыми* для расчета траекторий движения частиц (электронов и ионов) в статических электромагнитных полях. При условии достаточной *сплошности* потока [13] заряженных частиц к ним добавляется уравнение непрерывности, записанное в интегральной форме:

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = 0, \quad (4)$$

где  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  – плотность потока заряженных частиц (тока электронного или ионного пучка) в поперечном сечении площадью  $S$ ,  $\rho$  – плотность заряда частиц,  $\vec{v}$  – скорость заряженных частиц в заданной точке расчетной области.

При формировании пучков заряженных частиц в *аксиально-симметричных* электромагнитных полях, когда  $\varphi = \varphi(r, z)$  и  $\vec{A} = \vec{A}(r, z)$ , азимутальные компоненты напряженности поля  $\vec{E}$  и вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  равны нулю:  $E_\varepsilon = -\text{grad}_\varepsilon \varphi = 0$ ,  $B_\varepsilon = \text{rot}_\varepsilon \vec{A} = 0$ . Таким образом, векторный потенциал задается исключительно азимутальной составляющей  $A_\varepsilon$ , а вектор магнитной индукции в цилиндрической системе координат  $\vec{r} = (r, \varepsilon, z)$  определяется только радиальной  $B_r$  и осевой  $B_z$  компонентами в соответствии с формулами [13]:

$$B_r = \text{rot}_r \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial z} = -\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial z}, \quad (5a)$$

$$B_z = \text{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\varepsilon)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varepsilon)}{\partial r}. \quad (5b)$$

Уравнение (1) в цилиндрической системе координат для заряженной частицы, движущейся со скоростью  $\vec{v} = (\dot{r}, r\dot{\varepsilon}, \dot{z})$ , можно представить в виде системы

$$m_0 \ddot{r} = m_0 r \dot{\varepsilon}^2 - q_0 \left( \frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial r} - r \dot{\varepsilon} B_z \right); \quad (6a)$$

$$m_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varepsilon}) = q_0 (\dot{z} B_r - \dot{r} B_z); \quad (6b)$$

$$m_0 \ddot{z} = -q_0 \left( \frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial z} + r \dot{\varepsilon} B_r \right). \quad (6b)$$

Подставляя (5a) и (5b) в формулу (6b) и интегрируя, получим закон сохранения азимутального обобщенного импульса [14]:

$$m_0 (r^2 \dot{\varepsilon} - r_0^2 \dot{\varepsilon}_0) = -q_0 (r A_\varepsilon - r_0 A_{\varepsilon_0}). \quad (7)$$

Согласно (3) вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  подчиняется дополнительному условию

$$\text{div } \vec{B} = \text{div } \text{rot } \vec{A} = 0, \quad (8)$$

что позволяет выявить функцию тока  $\psi(r, z)$ , связанную с проекциями векторного потенциала на оси цилиндрических координат соотношениями

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (9)$$

Полагая  $\psi = 0$  на оси  $Oz$ , с учетом (9) находим величину магнитного потока сквозь ортогональное к оси  $Oz$  сечение, ограниченное окружностью заданного радиуса  $r$ :

$$\Psi = \int_0^r B_z \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot r dr = 2\pi \psi(r). \quad (10)$$

Как известно [13], функцию тока можно рассматривать как одну из составляющих векторного потенциала  $\vec{A}$ , что позволяет выразить азимутальную составляющую векторного потенциала  $A_\varepsilon$  через магнитный поток  $\Psi$ :

$$A_\varepsilon = \frac{\Psi}{2\pi r}. \quad (11)$$

С учетом (11) уравнение (7) можно представить в форме интеграла движения

$$m_0(r^2\dot{\xi} - r_0^2\dot{\xi}_0) = -\frac{q_0}{2\pi}(\Psi - \Psi_0). \quad (12)$$

Полагая, что начальное значение азимутальной угловой скорости электронов, эмитированных плазмой, равно нулю  $\dot{\xi}_0 = 0$ , запишем уравнение (12) в следующей форме:

$$\dot{\xi} = -\frac{q_0}{2\pi m_0} \frac{\Psi - \Psi_0}{r^2}. \quad (13)$$

Подставляя формулы (5б), (11) и (13) в уравнение (6а) и аналогично – формулы (5а), (11) и (13) в (6в), получаем

$$m_0\ddot{r} = -q_0 \frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial r} - \frac{q_0^2}{8\pi^2 m_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{(\Psi - \Psi_0)^2}{r^2} \right]; \quad (14)$$

$$m_0\ddot{z} = -q_0 \frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial z} - \frac{q_0^2}{8\pi^2 m_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(\Psi - \Psi_0)^2}{r^2} \right). \quad (15)$$

Введем эквивалентный потенциал  $\Phi$  [15]:

$$\Phi = \varphi(r, z) + \frac{q_0}{8\pi^2 m_0} \frac{(\Psi - \Psi_0)^2}{r^2} \quad (16)$$

и преобразуем уравнения движения (14), (15) к простому виду:

$$m_0\ddot{r} = -q_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad (17a)$$

$$m_0\ddot{z} = -q_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (17b)$$

Уравнение траектории заряженной частицы (в частности, электрона) в меридианной (меридиональной) плоскости  $rz$  находим путем исключения времени из уравнений движения (17а) и (17б) в аксиально-симметричных электростатическом и магнитостатическом полях. С этой целью преобразуем  $\ddot{r}$ :

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{z} \frac{dr}{dz} \right) = \dot{z} \frac{dr}{dz} + \dot{z} \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dz} \right) = \dot{z} \frac{dr}{dz} + \dot{z}^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{dr}{dz} \right) = \dot{z} \frac{dr}{dz} + \dot{z}^2 \frac{d^2 r}{dz^2}.$$

Учитывая уравнения (17а) и (17б), получим

$$\dot{z}^2 \frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{q_0}{m_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dr}{dz} \right). \quad (18)$$

Поскольку  $\dot{r}^2 + r^2 \dot{\xi}^2 + \dot{z}^2 = \bar{v}^2$ , то величина квадрата осевой скорости  $\dot{z}^2$  может быть выражена из закона сохранения энергии (2):

$$\dot{z}^2 = \frac{v^2(0) - \frac{2q_0}{m_0} (\Phi - \Phi_{pl})}{1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (18), получаем искомое уравнение траектории в меридианной плоскости в дифференциальной форме [15]:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{-\frac{q_0}{m_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dr}{dz} \right) \left( 1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right)}{v^2(0) - \frac{2q_0}{m_0} (\Phi - \Phi_{pl})}. \quad (20)$$

Численное интегрирование уравнения (20) позволяет определить фазовую характеристику пучка заряженных частиц в каждом поперечном сечении потока для заданного значения начальной энергии частиц.

При условии достаточной сплошности пучка заряженных частиц базовые уравнения (1), (2), (4) для расчета потока движущихся заряженных частиц (электронов и ионов) в статических электромагнитных полях соответственно в дифференциальной форме примут вид, аналогичный гидродинамическим уравнениям [13]:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\text{grad } p - \rho_{\pm} \left( \text{grad } \phi - [\vec{v} \times \vec{B}] \right) + \mu \nabla^2 \vec{v}; \quad (21a)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = -\rho_{\pm} \vec{v} \cdot \left( \text{grad } \phi - [\vec{v} \times \vec{B}] \right) - \text{div}(p\vec{v}) + N_{in}; \quad (21б)$$

$$\frac{\partial \rho_{\pm}}{\partial t} + \text{div}(\rho_{\pm} \vec{v}) = 0, \quad (21в)$$

где  $\rho$  – плотность массы потока частиц;  $\rho_{\pm}$  – плотность заряда потока частиц;  $\vec{v}$  – скорость потока заряженных частиц в заданной точке расчетной области;  $p$  – давление газа, образованного заряженными частицами;  $\phi$  – скалярный потенциал электромагнитного поля;  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции;  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости газа заряженных частиц;  $N_{in}$  – плотность распределения мощности внутренних сил [13]. Ввиду незначительной величины давления газа заряженных частиц ( $p \approx 0$ ), первое уравнение (21a) – аналог уравнения Навье – Стокса [13] вырождается в трехмерное уравнение Бюргерса, простейшим решением которого является решение Тейлора в виде ударной волны [16], а дисперсионное обобщение данного нелинейного уравнения имеет решение в виде солитонных волн [17].

**Алгоритмическая и программная реализация численных методов расчета электронного потока в устройствах плазменной эмиссионной электроники.** Алгоритм компьютерного моделирования потока электронов, движущихся в электро- и магнитостатическом полях систем формирования пучка в устройствах плазменной эмиссионной электроники, основан на поэтапном приближении к самосогласованной задаче. На первом этапе рассчитывается электростатический и эквивалентный потенциалы поля, созданного электронно-оптической системой. На втором – определяются траектории движения электронов в аксиально-симметричных электро- и магнитостатическом полях. Затем вычисляется объемный заряд, вносимый электронным потоком, и характеристики электронного пучка в каждой плоскости поперечного сечения. На следующем этапе проводится расчет потенциалов поля с учетом объемного заряда потока электронов. Далее изменяется положение плазменного эмиттера и форма эмитирующей плазменной поверхности (плазменного мениска). В измененных собственным зарядом электронного пучка электро- и магнитостатическом полях заново рассчитываются траектории частиц и характеристики потока. Этапы расчета в программном цикле продолжаются до тех пор, пока отклонения значений потенциалов поля и траекторий электронов в соседних приближениях не станут меньше заданной точности.

Для повышения точности расчета характеристик электронного потока в устройствах плазменной эмиссионной электроники используется технология построения квазиструктурированных сеток, основанная на методе декомпозиции расчетной области. В расчетной области электронно-оптической

системы строится квазиструктурированная сетка (рис. 1), состоящая из макросетки 3 и двух вложенных подсеток: одна из них покрывает подобласть распространения электронного пучка 4, другая – приэмиттерную подобласть 5. Каждому сеточному узлу задаются координаты  $(i, j)$ . Численное моделирование полей проводится на квазиструктурированной сетке. Расчет движения частиц пучка (траектории, объемный заряд) производится на подсетке внутренней области, положение и форма плазменного мениска находится на подсетке приэмиттерной области.

Для описания стационарных полей применяется метод потенциалов. Скалярный и векторный потенциалы удовлетворяют уравнениям Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi; \quad (22)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = [\nabla \times \vec{A}], \quad (23)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные.

В области, свободной от токов, для описания магнитного поля целесообразно использовать скалярный магнитный потенциал  $\varphi_m$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_m = 0, \quad \vec{B} = -\nabla \varphi_m. \quad (24)$$

С целью реализации численного расчета электрического поля, создаваемого системой электродов и объемным зарядом потока частиц, а также магнитного поля, уравнения (22)–(24) решаются методом конечных разностей на квадратной сетке с граничными условиями Дирихле.

На первом шаге решение системы (22)–(24) находится на макросетке, заполняющей всю расчетную область в соответствии с конечно-разностными уравнениями:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} \left( u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{2j+1}{2j} u_{i,j+1} + \frac{2j-1}{2j} u_{i,j-1} + h^2 f_{i,j} \right); \quad (25)$$

$$u_{i,0} = \frac{1}{6} (u_{i+1,0} + u_{i-1,0} + 4u_{i,1} + h^2 f_{i,0}), \quad (26)$$

где потенциалы поля  $u = \{\varphi, \vec{A}, \varphi_m\}$ , функция  $f = \left\{ -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, -\mu_0 \vec{j}, 0 \right\}$ .

На следующем шаге проводится расчет потенциалов полей на внутренней подсетке с учетом значений потенциалов в общих узлах макросетки и подсетки. Затем вычисляются значения по-

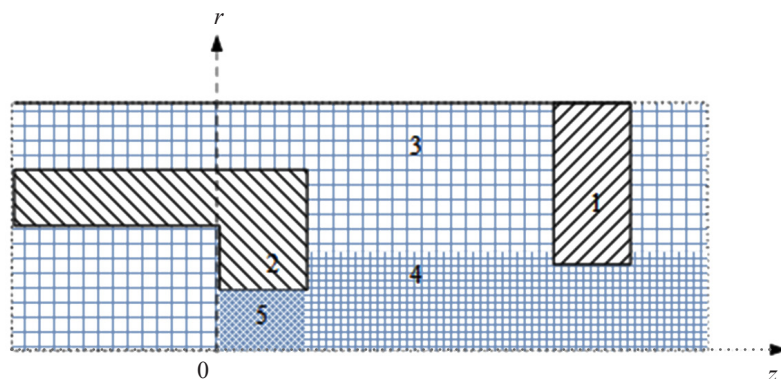


Рис. 1. Квазиструктурированная сетка в расчетной области: 1 – ускоряющий электрод; 2 – фокусирующий электрод; 3 – макросетка; 4 – подсетка в подобласти распространения электронного пучка; 5 – подсетка в приэмиттерной подобласти

Fig. 1. Quasi-structured mesh in the computational domain: 1 – accelerating electrode; 2 – focusing electrode; 3 – macrogrid; 4 – subgrid in the subregion of electron beam propagation; 5 – subgrid in the near emitter domain



тенциалов в приэмиттерной области в дополнительных узлах сетки, вложенной в предыдущую. Таким образом, при расчете полей во внутренней и приэмиттерной подобласти используются значения потенциалов, полученные в узлах более крупных сеток на предыдущих этапах [10].

На границах подобластей применяются формулы Лагранжа для интерполяции значений потенциалов в узлах, расположенных между узлами более крупных сеток [10]:

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}(-u_{i-1} + 9u_i + 9u_{i+1} - u_{i+2}); \quad (27)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}); \quad (28)$$

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(3u_i + 6u_{i-1} - u_{i-2}). \quad (29)$$

В результате решения системы конечно-разностных уравнений (25)–(29) получим скалярный и векторный потенциалы аксиально-симметричных полей  $\varphi = \varphi(r, z)$  и  $\vec{A} = \vec{A}(r, z)$ . Затем вычислим магнитный поток  $\Psi$  по формулам (11) или (10) и эквивалентный потенциал  $\Phi$  по формуле (16).

Алгоритмическая реализация разработанного численного метода расчета траекторий движения электронов в аксиально-симметричных электро- и магнитостатическом полях и характеристик пучка основана на технологии дискретизации электронного потока на токовые слои. Для граничной траектории деформируемой трубки тока в плоскости поперечного сечения путем численного решения уравнения (20) находим значения угла наклона скорости электронов к оси  $z$  (расходимость  $\theta = \arctg\left(\frac{dr}{dz}\right)$ ), а также радиус трубки тока и радиус пучка.

Определяя из уравнения (19) осевую скорость  $\dot{z}$  и исключая время из уравнений (19) и (13), получим соотношение

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{q_0}{2\pi m_0} \frac{\Psi - \Psi_0}{r^2} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}{v^2(0) - \frac{2q_0}{m_0}(\Phi - \varphi_{pl})}}. \quad (30)$$

Путем численного решения уравнения (30) рассчитаем азимутальную координату  $\varepsilon$  электронов, движущихся на границе токовой трубки.

Ток эмиссии  $I_e$  для каждой токовой трубки и плотность тока  $j$  электронов пучка, вылетевших из эмиттера с начальной скоростью  $v(0)$ , определяем по формулам

$$I_e = en_{pl}v(0)S_0; \quad (31a)$$

$$j = \frac{I_e}{S_n(z)}, \quad (31b)$$

а затем находим объемный заряд  $\rho$ :

$$\rho = \frac{I_e}{v \cdot S_n(z)}. \quad (32)$$

Здесь  $S_0$  – площадь эмитирующей поверхности плазмы для каждой трубки тока,  $n_{pl}$  – концентрация электронов плазмы,  $S_n(z)$  – площадь поперечного сечения трубки тока пучка плоскостью  $z = \text{const}$ ,  $v$  – скорость электронов пучка в точке расчетной области находится из уравнения (2).

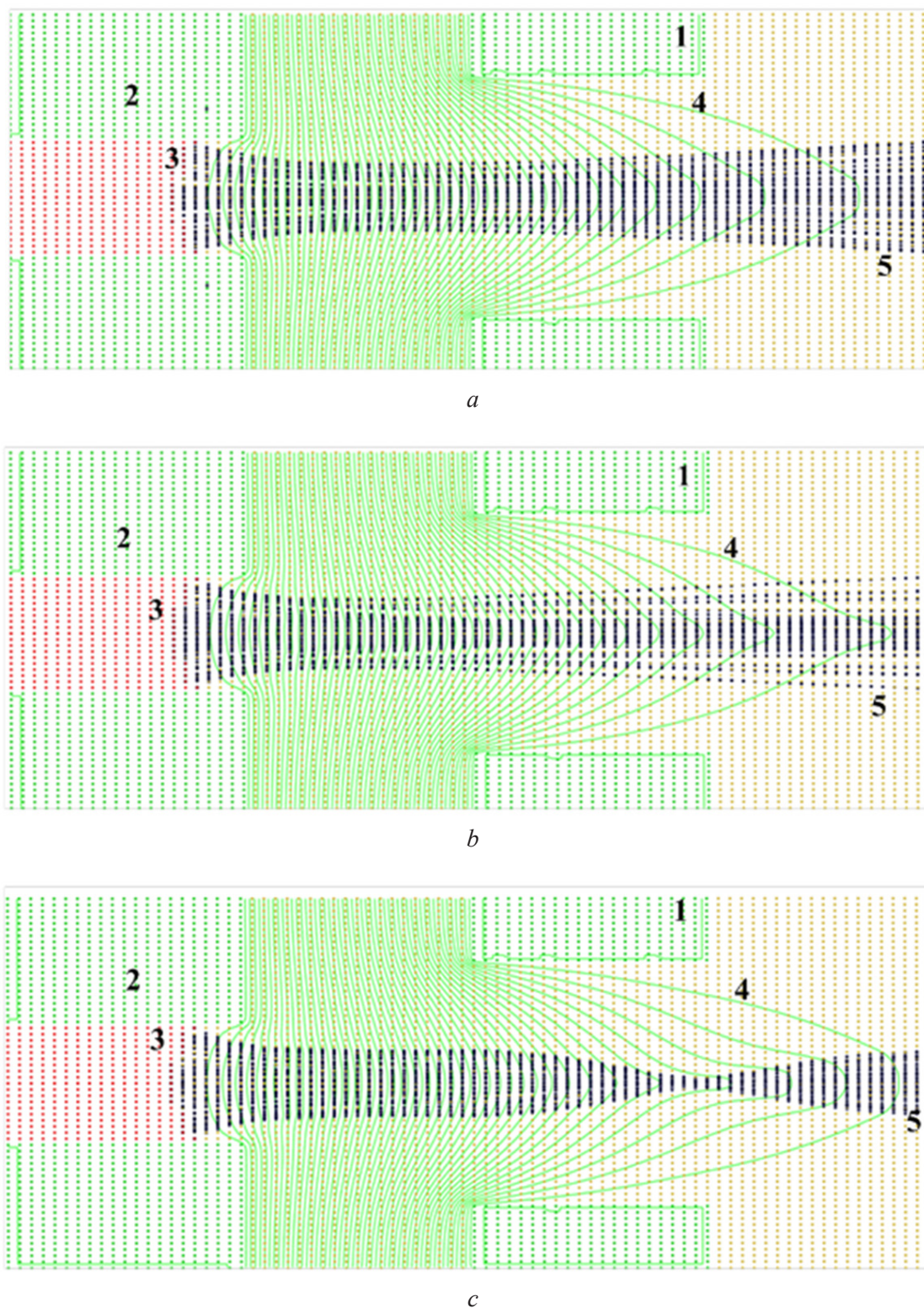


Рис. 2. Формирование и фокусировка электронного пучка в электронно-оптической системе с плазменным эмиттером (1 – ускоряющий электрод; 2 – фокусирующий электрод; 3 – плазменный эмиттер; 4 – эквипотенциальные линии электростатического поля; 5 – траектории электронов): *a* – формирование пучка в электростатическом поле; *b*, *c* – формирование пучка в электро- и магнитостатических полях

Fig. 2. Formation and focusing of an electron beam in the electron-optical system with a plasma emitter (1 – accelerating electrode; 2 – focusing electrode; 3 – plasma emitter; 4 – equipotential lines of the electrostatic field; 5 – electron trajectories): *a* – beam formation in the electrostatic field; *b*, *c* – beam formation in electrostatic and magnetostatic fields



На рис. 2 приведен результат моделирования электронно-оптической системы в устройствах плазменной эмиссионной электроники в качестве примера программной реализации изложенного алгоритма. Представлены траектории (5) электронов формируемого пучка и эквипотенциальные линии электростатического поля (4) в электронно-оптической системе со следующими параметрами: ускоряющая разность потенциалов – 10 кВ; промежуток ускорения между фокусирующим (2) и ускоряющим (1) электродами – 2 мм; радиус и длина канала в фокусирующем электроде – 1 и 2 мм соответственно; радиус и длина канала в ускоряющем электроде – 2 и 2 мм соответственно; концентрация плазменных электронов –  $5 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ . На рис. 2, а поток электронов движется в электростатическом поле; на рис. 2, б и 2, в показано влияние внешнего продольного магнитостатического поля на характеристики пучка. На выходе из электронно-оптической системы диаметр и расходимость электронного пучка равны соответственно 1,8 мм и  $8^\circ$  в электростатическом поле (см. рис. 2, а); 1,4 мм и  $4^\circ$  – для электронно-оптической системы с электро- и магнитостатическим ( $B_z = 0,1 \text{ Тл}$ ) полями (см. рис. 2, б); 1,2 мм и  $4^\circ$  – для электронно-оптической системы с электро- и магнитостатическим ( $B_z = 0,5 \text{ Тл}$ ) полями (см. рис. 2, в). Ток пучка для случаев, представленных на рис. 2, равен 150 мА.

**Заключение.** Разработан алгоритм численного решения нелинейных самосогласованных задач по расчету формирования и движения электронных пучков в совмещенных аксиально-симметричных электростатическом и магнитостатическом полях, основанный на технологиях дискретизации электронного потока деформированными трубками тока и декомпозиции расчетной области при расчете полей и уравнений движения частиц.

Представленный алгоритм позволяет проводить сравнительный анализ траекторий электронов и характеристик пучка как в электростатическом поле системы формирования пучка, так и совмещенных электро- и магнитостатическом полях. Данная разработка расширяет возможности программного кода ELIS, так как учитывает влияние внешних и собственных магнитостатических полей на формирование и фокусировку пучка, и может быть использована при проектировании электронно-оптических систем с плазменным эмиттером с целью численного анализа и оптимизации характеристик пучка.

**Благодарности.** Работа выполнена частично в рамках предоставленного гранта Президента Республики Беларусь в науку на 2019 г., а также при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17-122).

**Acknowledgements.** This work was partially supported by the Grant of the President of the Republic of Belarus in science for 2019 and carried out with financial support of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project No. F17-122).

### Список использованных источников

1. Котельников, И. А. Теория плазменного эмиттера положительных ионов / И. А. Котельников, В. Т. Астрелин // Успехи физ. наук. – 2015. – Т. 185, № 7. – С. 753–771. <https://doi.org/10.3367/ufnr.0185.201507c.0753>
2. Boers, J. E. An interactive version of the PBGUNS program for the simulation of axisymmetric and 2-D, electron and ion beams and guns / J. E. Boers // Proc. Particle Accelerator Conf., 1–5 May 1995. – IEEE, 1996. – P. 2312. <https://doi.org/10.1109/pac.1995.505535><https://far-tech.com/pbguns.php>
3. PBGUNS (Particle Beam GUN Simulations) [Electronic Resource]. Mode of access: <https://far-tech.com/pbguns.php>
4. KOBRA3-INP, INP, Junkernstr. 99, 65205 Wiesbaden.
5. Spädtke, P. Computer Simulation of High-Current DC Ion Beams / P. Spädtke // Proc. 1984 Linear Accelerator Conf. (LINAC'84), Seeheim, Germany, May 1984, paper THP0012. – Seeheim, 1984. – P. 356–358.
6. Астрелин, В. Т. Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц / В. Т. Астрелин, В. Я. Иванов // Автометрия. – 1980. – № 3. – С. 92–99.
7. Астрелин, В. Т. Особенности решения задач плазменной эмиссионной электроники в пакете прикладных программ POISSON-2 / В. Т. Астрелин // Успехи прикладной физики. – 2013. – Т. 1, № 5. – С. 574–579.
8. Петрович, О. Н. Программный комплекс ELIS для моделирования ЭОС ПИЭЛ / О. Н. Петрович, В. А. Груздев // Прикладная физика. – 2012. – № 2. – С. 79–85.
9. Петрович, О. Н. Моделирование электронно-оптических систем с плазменным эмиттером: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / О. Н. Петрович. – Новополоцк, 2012. – 199 л.
10. Петрович, О. Н. Численные методы расчета электромагнитных полей на квазиструктурированных сетках в устройствах плазменной эмиссионной электроники / О. Н. Петрович, И. С. Русецкий // Вестн. Полоц. Гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2018. – № 4. – С. 124–127.
11. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 504 с.

12. Яворский, Б. М. Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М.: Физматгиз, 1963. – 848 с.
13. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 840 с.
14. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
15. Молоковский, С. И. Интенсивные электронные и ионные пучки / С. И. Молоковский, А. Д. Сушков. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
16. Солитоны и нелинейные волновые уравнения: пер. с англ. / Р. Додд [и др.]. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
17. Krot, A. M. Development of the generalized nonlinear Schrödinger equation of rotating cosmogonical body formation / A. M. Krot // *Complex Systems: Theory and Applications*, Ch. 3. – New York: Nova Science Publ., 2017. – P. 49–94.

## References

1. Kotel'nikov I. A., Astrelin V. T. Theory of plasma emitter of positive ions. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk = Physics-Uspekhi*, 2015, vol. 185, no. 7, pp. 753–771. <https://doi.org/10.3367/ufnr.0185.201507c.0753>
2. Boers J. E. An interactive version of the PBGUNS program for the simulation of axisymmetric and 2-D, electron and ion beams and guns. *Proceedings Particle Accelerator Conference*, 1–5 May 1995. IEEE, 1996. P. 2312. <https://doi.org/10.1109/pac.1995.505535>
3. *PBGUNS (Particle Beam GUN Simulations)*. Available at: <https://far-tech.com/pbguns.php>
4. KOBRA3-INP, INP, Junkernstr. 99, 65205 Wiesbaden.
5. Spädtke P. Computer Simulation of High-Current DC Ion Beams. *Proc. 1984 Linear Accelerator Conf. (LINAC'84)*, Seeheim, Germany, May 1984, paper THP0012. Seeheim, 1984, pp. 356–358.
6. Astrelin V. T., Ivanov V. Ya. Software package for calculating the characteristics of intense beams of relativistic charged particles. *Avtometriya = Optoelectronics, Instrumentations and Data Processing*, 1980, no. 3, pp. 92–99 (in Russian).
7. Astrelin V. T. Features of solving the plasma emission electronics problems in CAD POISSON-2. *Uspekhi Prikladnoi Fiziki = Advances in Applied Physics*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 574–579 (in Russian).
8. Petrovich O. N., Gruzdev V. A. The software package ELIS for simulation of EOS of PES. *Prikladnaya Fizika = Applied Physics*, 2012, no. 2, pp. 79–85 (in Russian).
9. Petrovich O. N. *Simulation of Electron-Optical Systems with a Plasma Emitter*. Novopolotsk, 2012. 199 p. (in Russian).
10. Petrovich O. N., Rusetskiy I. S. Numerical methods for calculation of electromagnetic fields on quasi-structured grids in devices of plasma emission electronics. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya S, fundamental'nye nauki = Vestnik of Polotsk State University. Part C, Fundamental Sciences*, 2018, no. 4, pp. 124–127 (in Russian).
11. Landau L. D., Lifschitz E. M. *Classical Theory of Fields*. Reading, Addison-Wesley Publ., 1951.
12. Yavorskii B. M., Detlaf A. A. *A Handbook of Physics for Engineers and Students*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 848 p. (in Russian).
13. Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Fluid and Gas*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 848 p. (in Russian).
14. Landau L. D., Lifschitz E. M. *Mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 208 p. (in Russian).
15. Molokovskii S. I., Sushkov A. D. *Intensive Electron and Ion Beams*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 304 p. (in Russian).
16. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London, Academic Press, 1984. 630 p.
17. Krot A. M. Development of the generalized nonlinear Schrödinger equation of rotating cosmogonical body formation. *Complex Systems: Theory and Applications. Ch. 3*. New York, Nova Science Publ., 2017, pp. 49–94.

## Информация об авторах

**Крот Александр Михайлович** – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [alxkrot@newman.bas-net.by](mailto:alxkrot@newman.bas-net.by)

**Петрович Ольга Николаевна** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой технологий программирования, Полоцкий государственный университет (ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк, Республика Беларусь). E-mail: [o.petrovich@psu.by](mailto:o.petrovich@psu.by)

**Русецкий Игорь Станиславович** – старший преподаватель кафедры энергетики и электронной техники, Полоцкий государственный университет (ул. Блохина, 29, 211440, Новополоцк, Республика Беларусь). E-mail: [i.rusetski@psu.by](mailto:i.rusetski@psu.by)

## Information about the authors

**Alexander M. Krot** – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Laboratory of Self-Organization Systems Modeling, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [alxkrot@newman.bas-net.by](mailto:alxkrot@newman.bas-net.by)

**Olga N. Petrovich** – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Programming Technologies, Polotsk State University (29, Blokhin Str., 211440, Novopolotsk, Republic of Belarus). E-mail: [o.petrovich@psu.by](mailto:o.petrovich@psu.by)

**Igor S. Rusetski** – Senior Lecturer at the Department of Energy and Electronic Engineering, Polotsk State University (29, Blokhin Str., 211440, Novopolotsk, Republic of Belarus). E-mail: [i.rusetski@psu.by](mailto:i.rusetski@psu.by)