ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-445-456

Поступила в редакцию 26.08.2019
Received 26.08.2019

**А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЭРМИТА – ПАДЕ

**Аннотация.** Введены новые понятия: вполне нормальный индекс и вполне совершенная система функций, с помощью которых доказан критерий единственности решения двух задач Эрмита – Паде, определены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода для произвольной системы степенных рядов. Полученные результаты дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

**Ключевые слова:** задача Эрмита – Паде, многочлены Эрмита – Паде, нормальный индекс, совершенная система функций, определители Адамара

**Для цитирования.** Старовойтов, А. П. О единственности решений задач Эрмита – Паде / А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 445–456. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-445-456

**A. P. Staravoitov, N. V. Ryabchenko**

*Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

## UNIQUENESS OF THE SOLUTIONS OF THE HERMITE – PADE PROBLEMS

**Abstract.** New concepts are introduced in the present work. They are a quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, the uniqueness criterion for solution of two Hermite – Pade problems is proved, the explicit determinant representations of type I and II Hermite – Padé polynomials for an arbitrary system of power series are obtained. The results obtained complement and generalize the well-known result in the theory of Hermite – Padé approximations.

**Keywords:** problem Hermite – Padé, Hermite – Padé polynomials, normal index, perfect system, Hadamard determinant

**For citation.** Staravoitov A. P., Ryabchenko N. V. Uniqueness of the solutions of the Hermite – Pade problems. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 445–456 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-445-456

**1. Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода.** ***Постановка задачи.*** Пусть $f=(f_1,...,f_k)$ – набор степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j=1,2,...,k \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Множество $k$-мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных $k$ целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\vec{m}=(m_1,...,m_k)$ – это сумма $m=m_1+...+m_k$. Зафиксируем индекс $n\in\mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m}=(m_1,\dots,m_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу Эрмит – Паде (см. [1, гл. 4, § 3; 2–4]).

З а д а ч а А. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z)=Q_{n,\vec{m}}(z;f)$, $\deg Q_m\leqslant m$ и такие многочлены $P_{n_j}^j(z)=P_{n,\vec{m}}^j(z;f)$, $\deg P_{n_j}^j\leqslant n_j$, $n_j=n+m-m_j$, чтобы при $j=1,...,k$

$$R_{n,\vec{m}}^j(z):=Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=A_j z^{n+m+1}+\dots \,. \tag{2}$$

Если $k$ = 1, то $f$ состоит из одной функции $f(z):=f_1(z)$. В этом случае решение поставленной задачи было получено Паде, который нашел явный вид многочленов $Q_m(z)$, $P_n(z):=P_{n,m}^1(z;f)$ (их называют многочленами Паде). Например, если $f_i:=f_i^1$, $i=0,1,...$, то [2, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1]

$$Q_m(z)=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь и далее при $i < 0$ считаем, что $f_i^j = 0$.

Когда $f$ состоит из экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{k}$, где $\lambda_j$ – различные не равные нулю комплексные числа, решение задачи A в явном виде найдено Ш. Эрмитом в его известной работе [5], посвященной доказательству трансцендентности числа $e$. При этом искомые многочлены представлены им несобственными интегралами Римана.

Хорошо известно [1], что в общем случае решение задачи A существует, а соответствующие многочлены $Q_m$, $P_{n_j}^j$ находятся с точностью до мультипликативного множителя: если пара $(Q_m, P)$, где $P = (P_{n_1}^1, \dots, P_{n_k}^k)$, удовлетворяет необходимым условиям, то для любого отличного от нуля комплексного числа $\lambda$ новая пара $(\lambda Q_m, \lambda P)$ также удовлетворяют необходимым условиям. Эта неединственность может быть и более существенной.

П р и м е р 1. Пусть $k = 1$, $n = 2$, $m = 2$, а

$$f(z) = \frac{1}{2-4z} = \frac{1}{2} + z + 2z^2 + 4z^3 + 8z^4 + \dots .$$

Тогда любое решение задачи можно представить в виде $(\lambda Q_2, \lambda P_2)$, где

$$Q_2(z) = a + bz - (4a+2b)z^2,\ P_2(z) = \frac{1}{2} + \left(a + \frac{1}{2}b\right)z,$$

а $a$ и $b$ – произвольные действительные числа.

Принято говорить (см. [1]), что задача A имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде $(\lambda Q_m, \lambda P)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а $(Q_m, P)$ – некоторое одно фиксированное решение.

О п р е д е л е н и е 1. Если пара $(Q_m, P)$, где $P = (P_{n_1}^1, \dots, P_{n_k}^k)$ – решение задачи A с индексом $n$ и мультииндексом $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$, то многочлены $Q_m$, $P_{n_1}^1, \dots, P_{n_k}^k$ называют многочленами Эрмита – Паде 2-го рода (German type) для набора (системы) $f$ формальных степенных рядов (1).

Центральными понятиями в теории таких многочленов является понятие нормального индекса и совершенной системы [1, гл. 4, § 1].

О п р е д е л е н и е 2. Индекс $(n, \vec{m}) = (n, m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ называется нормальным для системы $f$ относительно задачи A, если для любого решения $(Q_m, P)$ задачи A с индексом $n$ и мультииндексом $\vec{m}$

$$\deg Q_m = m,\ \deg P_{n_j}^j = n_j,\ j = 1, \dots, k.$$

Здесь и далее считаем, что степень многочлена $T$ $\deg T = -1$, тогда и только тогда, когда $T(z) \equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 3. Систему $f$ назовем совершенной относительно задачи A, если все индексы $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ являются нормальными для $f$ относительно задачи A.

При $k = 1$ критерий нормальности индекса $(n, m)$ выражается условием [4]:

$$H_{n,m} \cdot H_{n,m+1} \neq 0, \qquad (4)$$

где определители Адамара $H_{n,m}$ определяются равенствами

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}.$$

Если индекс $(n,\vec{m})$ является нормальным, то задача А имеет единственное решение (см. [1]). В этом случае однозначно определяется вектор

$$\pi_{n,\vec{m}} = \left(\pi^1,\ldots,\pi^k\right), \quad \pi^j = \frac{P^j_{n_j}}{Q_m},$$

компоненты которого $\pi^j$ называют аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода (совместными аппроксимациями Паде) для системы $f$. Следующий пример показывает, что уже при $k = 1$ нормальность индекса $(n, m)$ не является необходимым условием единственности решения поставленной задачи.

Пример 2. Пусть $k = 1$, $n = 2$, $m = 2$, а

$$f(z) = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4}z = \frac{1}{z} + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} + \ldots .$$

Тогда любое решение задачи А можно записать в виде $(\lambda Q_2, \lambda P_2)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а

$$Q_2(z) = 2 - z, \quad P_2(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}.$$

При этом индекс (2,2) не является нормальным, так как $\deg Q_2 = 1$. Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $(n,\vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и систему $f$, при которых решение задачи А единственно.

***Критерий единственности решения задачи А.*** Компоненты вектора $f = \{f_1,\ldots,f_k\}$ являются, вообще говоря, формальными степенными рядами. Уже по этой причине поставленная задача – чисто алгебраическая и, следовательно, имеет алгебраическое решение.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что радиусы сходимости всех степенных рядов (1) не равны нулю, а $\vec{m}$ – ненулевой мультииндекс. Для нулевого мультииндекса $\vec{m}$ решение задачи А очевидно: $Q_m(z) \equiv 1$, а $P_n^j$ – многочлены Тейлора функции $f_j$.

Введем необходимые обозначения. Для каждого $j = 1,\ldots,k$, фиксированных индекса $n$ и мультииндекса $\vec{m} = (m_1,\ldots,m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы-строки порядка $1 \times (m + 1)$

$$F_i^j = \left(f^j_{n-m_j+i} \quad f^j_{n-m_j+i+1} \quad \cdots \quad f^j_{n_j+i}\right), \quad i = 1,2,\ldots,$$

матрицу порядка $m_j \times (m + 1)$

$$F^j = \left[F_1^j \quad F_2^j \quad \ldots \quad F_{m_j}^j\right]^T = \begin{bmatrix} F_1^j \\ \vdots \\ F_{m_j}^j \end{bmatrix}, \tag{5}$$

матрицу порядка $m \times (m + 1)$

$$F_{n,\vec{m}} = \left[F^1 \quad F^2 \quad \ldots \quad F^k\right]^T, \tag{6}$$

и определители ($m$ + 1)-го порядка:

$$d^{\,j}_{n,\vec{m},i} = \det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & F^j_{m_j+i} \end{bmatrix}^T,$$

где $C^T$ является матрицей транспонированной к матрице $C$ (транспонирование определяется так же, как и в (5)). В случае, если $m_j = 0$, матрица $F_{n,\vec{m}}$ и определитель $d^{\,j}_{n,\vec{m},i}$ не содержат блок-матрицу $F^j$.

При произвольном $m_j$ определим также функциональные матрицы-строки порядка $1\times(m+1)$:

$$E(z) = \begin{pmatrix} z^m & z^{m-1} & \ldots & z & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{m_j}(z) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n-m_j} f_i^j z^{m+i} & \sum\limits_{i=0}^{n-m_j+1} f_i^j z^{m+i-1} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n_j} f_i^j z^i \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Индекс $(n,\vec{m})$ будем называть вполне нормальным для $f$ относительно задачи A, если ранг матрицы $F_{n,\vec{m}}$ равен $m$.

В примере 1 индекс (2,2) не является нормальным и не является вполне нормальным, а в примере 2 индекс (2,2) не является нормальным, но является вполне нормальным относительно задачи A для рассматриваемых в этих примерах систем функций.

Далее будет установлено, что любой нормальный индекс $(n,\vec{m})$ для $f$ относительно задачи A является также и вполне нормальным индексом для $f$ относительно задачи A. Пример 2 показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Определение 5. Систему $f$ назовем вполне совершенной относительно задачи A, если все индексы $(n,\vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ являются вполне нормальными для $f$ относительно задачи A.

Отметим, что любая совершенная система $f$ относительно задачи A является также и вполне совершенной системой относительно задачи A.

Сформулируем основную теорему этого раздела.

Теорема 1. *Для того, чтобы для фиксированного индекса* $(n,\vec{m})$ *задача A имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс* $(n,\vec{m})$ *был вполне нормальным для* $f$ *относительно задачи A, т. е.* $\operatorname{rang} F_{n,\vec{m}} = m$.

В случае, если $\operatorname{rang} F_{n,\vec{m}} = m$, при определенном выборе мультипликативного множителя для решений задачи $(Q_m, P)$ справедливы следующие представления:

$$Q_m(z) = \det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T, \tag{7}$$

$$P^j_{n_j}(z) = \det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & E_{m_j}(z) \end{bmatrix}^T, \tag{8}$$

$$R^j_{n,\vec{m}}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d^{\,j}_{n,\vec{m},i} z^{n+m+i}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть

$$Q_m(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m.$$

Обозначим через $(g)_k$ коэффициент при $z^k$ степенного ряда $g(k)$. Рассмотрим систему $m$ линейных однородных уравнений относительно $m$ + 1 неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_m$:

$$\left(Q_m f_j\right)_p = 0, \tag{10}$$

$$p = n_j + 1,\ n_j + 2, \ldots, n_j + m_j;\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

В матричном виде система (10) выглядит так:

$$F_{n,\vec{m}} \times b^T = \theta^T, \tag{11}$$

где $b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ – матрица-строка, а $\theta$ – матрица-строка порядка $1 \times (m + 1)$, все элементы которой нулевые. Поскольку система (11) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что у системы (11) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (11) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} F_{n,\vec{m}} = m$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого решения на число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем теперь равенство (7). Так как ранг матрицы $F_{n,\vec{m}}$ равен $m$, то при некотором $p \in \{1, \ldots, m+1\}$ определитель, полученный в результате вычеркивания в матрице $F_{n,\vec{m}}$ $p$-го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = m + 1$. Тогда в развернутом виде систему (11) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1} \\ f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k} \\ f^k_{n-m_k+2} & f^k_{n-m_k+3} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ . \\ b_{n-m_1+1} \\ . \\ b_{m_k} \\ b_{m_k-1} \\ . \\ b_1 \end{pmatrix} = -b_0 \begin{pmatrix} f^1_{n_1+1} \\ f^1_{n_1+2} \\ . \\ f^1_{n+m} \\ . \\ f^k_{n_k+1} \\ f^k_{n_k+2} \\ . \\ f^k_{n+m} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Обозначим главный определитель системы (12) через $H_{n,\vec{m}}$. По предположению $H_{n,\vec{m}}$ не равен нулю. Если бы $b_0 = 0$, то система (12) имела бы только нулевое решение. Тогда и система (11) имела бы только нулевое решение. Поэтому $b_0 \neq 0$. Учитывая, что мы ищем решение с точностью до мультипликативного множителя, можно считать, что $b_0 = 1$. Решаем систему (12) по правилу Крамера. Пренебрегая числовым множителем, результат можно записать в виде

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det\begin{bmatrix} F^1 & \ldots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T.$$

Равенство (7) доказано. Справедливость равенств (8), (9) устанавливается непосредственной проверкой. Теорема 1 доказана.

***Замечания и некоторые следствия.*** Компонента $m_j$ мультииндекса $\vec{m}$ определяет число коэффициентов ряда $f_j$, которые учитываются при построении многочлена $Q_m$. В частности, если $m_j = 0$, то матрица $F_{n,\vec{m}}$ и определитель в (7) не содержат блока $F^j$ и, следовательно, при построении многочлена $Q_m$ формальный ряд $f_j$ не участвует, а порядок мультииндекса $\vec{m}$ определяется остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $\vec{m} = (m_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то $m = m_1$, и тогда, как и в одномерном случае, при нахождении $Q_m$ учитываются только коэффициенты ряда $f_1$. При этом представление (7) совпадает с (3).

В том случае, если $\vec{m}$ – нулевой индекс, из равенств (7), (8) получаем, что $Q_m(z) \equiv 1$, а $P_n^j$ – многочлен Тейлора функции $f_j$. Отсюда, в частности, следует, что если система $f$ является совершенной относительно задачи А, то все коэффициенты рядов (1) не равны нулю. Например, если одно из чисел $\{\lambda_p\}_{p=1}^k$ равно нулю, то система экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=1}^k$ не является совершенной системой относительно задачи А.

Следует также сказать, что если индекс $(n, \vec{m})$ не является вполне нормальным для $f$ относительно задачи А, то многочлены $Q_m$ и $P_{n_j}^j$, определенные равенствами (7) и (8), не являются решениями задачи А. В частности, в примере 1 для индекса (2,2) искомый многочлен $Q_2(z) = a + bz - (4a + 2b)z^2$. Однако, если $Q_2$ находить по формуле (3), то получим, что $Q_2(z) \equiv 0$. Как уже отмечалось, представление многочлена Паде в виде (3) вытекает из общего представления многочленов Эрмита – Паде (7), поэтому оно также справедливо только в том случае, когда индекс $(n, m)$ является вполне нормальным относительно задачи А. В монографии [2] при доказательстве теоремы 1.1.1 на это обстоятельство внимание не обращено (см. [2, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1]).

Из (7) и (8) вытекает следующий критерий нормальности индекса $(n, \vec{m})$.

С л е д с т в и е 1. *Индекс $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^k$ будет нормальным для $f$ относительно задачи А тогда и только тогда, когда*

$$H_{n,\vec{m}} \cdot \prod_{j=1}^{k} H_{n,\vec{m}}^j \neq 0, \tag{13}$$

где

$$H_{n,\vec{m}}^j = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n_1+1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \cdots & f_{n_k+1}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \cdots & f_{n+m}^k \\ f_{n-m_j}^j & f_{n-m_j+1}^j & \cdots & f_{n_j}^j \end{vmatrix}.$$

В частности, при $k = 1$ получим критерий нормальности индекса $(n, m)$, совпадающий с (4). При $m_j = 0$ в (10) предполагается, что определители $H_{n,\vec{m}}$, $H_{n,\vec{m}}^j$ не содержат блок $F^j$.

Следующее следствие можно рассматривать как некоторый аналог теоремы Кронекера [1].

С л е д с т в и е 2. *Пусть индекс $n = (n, \vec{m})$ является вполне нормальным для $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ относительно задачи А и $m_j \neq 0$. Тогда для того, чтобы функция $f_j$ была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы $d_{n,\vec{m},i}^j = 0$ для всех достаточно больших $i$.*

**2. Многочлены Эрмита – Паде 1-го рода.** ***Постановка задачи.*** Рассмотрим задачу Эрмита – Паде, двойственную задаче А (см. [1, гл. 4, § 3; 3; 4]).

З а д а ч а В. Для системы $f$ степенных рядов (1) и ненулевого индекса $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ найти такой набор не равных тождественно нулю одновременно многочленов $A_1 = A_n^1, ..., A_k = A_n^k$, $\deg A_1 \leqslant n_1 - 1, \ldots, \deg A_k \leqslant n_k - 1$, для которых

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) = c_n z^{|n|-1} + \ldots , \tag{14}$$

где по определению $|n| = n_1 + \ldots + n_k$.

В случае, когда $k = 2$, $(n_1, n_2) = (n+1, m+1)$, $f = (f_1, 1)$, задача А совпадает с задачей В. Вследствие этого многочлен $A_1$ (как и $A_2$) является многочленом Паде и в предположении, что индекс $(n+1, m+1)$ является вполне нормальным для $f$ относительно задачи А, он, как и $Q_m$, с точностью до множителя определяется равенством (3).

Если $f$ является набором экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\lambda_j$ – различные комплексные числа, то решение задачи В в явном виде получено в [6]. В этой работе искомые многочлены представлены Эрмитом в виде интегралов Коши.

В общем случае решение задачи В существует, но не единственно [1, гл. 4, § 1]. В частности, многочлены $A_j$ также находятся с точностью до мультипликативного множителя: если набор $A = (A_1, \ldots, A_k)$ удовлетворяет необходимым условиям, то для любого отличного от нуля комплексного числа $\lambda$ набор $\lambda A = (\lambda A_1, \ldots, \lambda A_k)$ также удовлетворяет условиям задачи. Эта неединственность может быть и более существенной.

П р и м е р 3. Пусть $k = 2$, $n = (3,3)$, а $f = (f_1, 1)$, где $f_1$ – функция из примера 1, тогда любое решение задачи В представимо в виде $(\lambda A_1, \lambda A_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$,

$$A_1(z) = a + bz - (4a + 2b)z^2, \quad A_2(z) = -\frac{1}{2}a - \left(a + \frac{1}{2}b\right)z,$$

где $a$, $b$ – произвольные действительные числа, не равные нулю одновременно.

Принято говорить [1], что задача В имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде $\lambda A$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а $A = (A_1, \ldots, A_k)$ – некоторое одно фиксированное решение.

О п р е д е л е н и е 6. Если $A = (A_1, ..., A_k)$ – решение задачи В с ненулевым индексом $n \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлены $A_1, ..., A_k$ называются многочленами Эрмита – Паде 1-го рода (Latin Type) для набора (системы) $f$ степенных рядов (1). Центральными понятиями в теории таких многочленов также являются понятия нормального индекса и совершенной системы [1, гл. 4, § 1].

О п р е д е л е н и е 7. Ненулевой индекс $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ называется нормальным для $f$ относительно задачи В, если для любого решения задачи В с индексом $n$

$$\deg A_j = n_j - 1, \ j = 1, ..., k.$$

О п р е д е л е н и е 8. Систему $f$ назовем совершенной относительно задачи В, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для $f$ относительно задачи В.

При $f = (f_1, 1)$, $k = 2$, критерий нормальности индекса $(n_1, n_2) = (m+1, n+1)$ выражается условием (4).

Известно [1], что если индекс $n$ является нормальным для $f$ относительно задачи В, то последняя имеет единственное решение. Следующий пример показывает, что уже при $k = 2$ нормальность индекса $n$ не является необходимым условием единственности решения задачи В.

П р и м е р 4. Пусть $k = 2$, $n = (3,3)$, а $f = (f_1, 1)$, где $f_1$ – функция из примера 2. Тогда любое решение задачи В можно записать в виде $(\lambda A_1, \lambda A_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, где

$$A_1(z) = 8 - 4z, \quad A_2(z) = -4 - 2z + z^2.$$

В этом примере индекс $n = (3,3)$ не является нормальным, так как $\deg A_1 = 1$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему $f$, определяемую равенствами (1), при которых решение задачи B является единственным.

***Критерий единственности решения задачи B.*** Введем необходимые обозначения. Для каждого $j = 1,...,k$ и индекса $n = (n_1,...,n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ в предположении, что $n_j \neq 0$, определим матрицы-столбцы порядка $(|n|-1)\times 1$

$$G_i^j = \begin{pmatrix} f_{1-i}^j & f_{2-i}^j & \dots & f_{|n|-i-1}^j \end{pmatrix}^T, \ i = 1,...,n_j,$$

матрицы порядка $(|n|-1)\times n_j$

$$G^j = \begin{pmatrix} G_1^j & G_2^j & \dots & G_{n_j}^j \end{pmatrix},$$

и матрицу порядка $(|n|-1)\times |n|$

$$G_n = \begin{pmatrix} G^1 & G^2 & \dots & G^k \end{pmatrix}.$$

В случае, если компонента индекса $n_j = 0$, матрица $G_n$ не содержит блок $G^j$.

Рассмотрим также функциональные матрицы-строки порядка $1\times |n|$

$$U_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & \dots & z^{n_1-1} & 0\ 0 \dots 0 & \dots & 0\ 0 \dots 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$U_k(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z & \dots & z^{n_k-1} \end{pmatrix},$$

$$U(z) = U_1(z) + \dots + U_k(z).$$

Если в матрице $G_n$ добавить в качестве последней строки строку $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу порядка $|n|\times|n|$. Определитель этой матрицы обозначим через $A_j(z)$. Тогда при $j = 1,2,\dots,k$

$$A_j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_0^j & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_0^k & \cdot\cdot & 0 \\ f_1^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_1^j & f_0^j & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_1^k & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n_j-1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j-n_1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j-1}^j & f_{n_j-2}^j & \cdot\cdot & f_0^j & \cdot\cdot & f_{n_j-1}^k & \cdot\cdot & f_{n_j-n_k}^k \\ f_{n_j}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j-n_1+1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j}^j & f_{n_j-1}^j & \cdot\cdot & f_1^j & \cdot\cdot & f_{n_j}^k & \cdot\cdot & f_{n_j-n_k+1}^k \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{|n|-2}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-n_1-1}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-3}^j & \cdot\cdot & f_{|n|-n_j-1}^j & \cdot\cdot & f_{|n|-2}^k & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-1}^k \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 1 & z & \cdot\cdot & z^{n_j-1} & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Если в определителе (15) последнюю строку заменить матрицей-строкой

$$\begin{pmatrix} f_{i+|n|-2}^1 & f_{i+|n|-3}^1 & \dots & f_{i+|n|-n_1-1}^1 & \dots & f_{i+|n|-2}^k & f_{i+|n|-3}^k & \dots & f_{i+|n|-n_k-1}^k \end{pmatrix},$$

то полученный определитель обозначим через $\widetilde{d}_{n,i}$.

О п р е д е л е н и е 9. Ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ назовем вполне нормальным для $f$ относительно задачи B, если ранг матрицы $G_n$ равен $|n|-1$.

В примере 3 индекс $n = (3,3)$ не является нормальным и не является вполне нормальным, а в примере 4 – не является нормальным, но является вполне нормальным относительно задачи B для рассматриваемых в этих примерах систем функций.

Определение 10. Систему $f$ назовем вполне совершенной относительно задачи B, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются вполне нормальными для $f$ относительно задачи B.

Далее будет установлено, что любой нормальный индекс $n$ для $f$ относительно задачи B является также и вполне нормальным индексом для $f$ относительно задачи B. Вследствие этого любая совершенная система $f$ относительно задачи B является также и вполне совершенной системой относительно задачи B.

Теорема 2. *Для того чтобы для ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *задача B имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным для f относительно задачи B, т. е.* $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$. *В случае, если* $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$, *при определенном выборе мультипликативного множителя справедливы следующие представления*:

$$A_j(z) = \det \begin{bmatrix} G_n \\ U_j(z) \end{bmatrix}, \quad j = 1,...,k, \tag{16}$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{d}_{n,i}\, z^{|n|+i-2}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}_+^k,\ n \neq 0$, а

$$A_j(z) = b_0^j + b_1^j z + \ldots + b_{n_j-1}^j z^{n_j - 1}, \ \ j = 1, \ldots, k.$$

Опираясь на равенство (14), запишем в матричной форме систему уравнений для определения коэффициентов многочлена $A_j(z)$:

$$G_n \times b^T = \theta^T, \tag{18}$$

где $b = (b_0^1\ b_1^1\ \ldots\ b_{n_1-1}^1 \ldots\ b_0^k\ b_1^k\ \ldots\ b_{n_k-1}^k)$ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$ (при $n_j = 0$ матрица $b$ не содержит элементов $b_0^j, \ldots, b_{n_j-1}^j$), а $\theta$ – матрица порядка $1 \times |n|$, все элементы которой равны нулю. Система линейных уравнений (18) является однородной, и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Поэтому из теоремы Кронекера – Капелли следует, что система (18) имеет ненулевое решение, а множество всех ее линейно независимых решений состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого решения на комплексное число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 2 доказана.

Докажем теперь равенство (16). Так как $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$, то при некотором $p \in \{1, 2, \ldots, |n|\}$ определитель, полученный из матрицы $G_n$ вычеркиванием в ней $p$-го столбца , отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = |n|$. Тогда систему (18) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_0^k & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_1^k & f_0^k & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n_k-1}^1 & f_{n_k-2}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k-n_1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k-1}^k & f_{n_k-2}^k & \cdot\cdot & f_1^k \\ f_{n_k}^1 & f_{n_k-1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k-n_1+1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k}^k & f_{n_k-1}^k & \cdot\cdot & f_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{|n|-3}^1 & f_{|n|-4}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-2}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-3}^k & f_{|n|-4}^k & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-1}^k \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-1}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-3}^k & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^1 \\ \vdots \\ b_{n_k-1}^1 \\ \vdots \\ b_0^k \\ \vdots \\ b_{n_k-2}^k \end{pmatrix} = -b_{n_k-1}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_0^k \\ f_1^k \\ \vdots \\ f_{|n|-n_k-1}^k \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Обозначим главный определитель системы (19) через $\widetilde{H}_n^{n_k}$. По предположению $\widetilde{H}_n^{n_k} \neq 0.$ Если бы $b_{n_k-1}^k = 0,$ то система (19) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (18) имела только нулевое решение. Следовательно, $b_{n_k-1}^k \neq 0.$ Решая систему (19) по правилу Крамера, получим решение, которое символически можно записать в виде

$$\det\begin{bmatrix} G_n & U(z) \end{bmatrix}^T = A_1(z) + \ldots + A_k(z), \tag{20}$$

где $A_j(z)$ определяются равенствами (16). В случае, если бы вместо $p = |n|$ вычеркивали столбец матрицы $G_n$ с другим номером, рассуждая аналогичным образом, пришли бы к символической записи решения в виде (20).

Докажем, что многочлены $A_j(z)$, определенные равенствами (16), действительно являются искомыми многочленами. Разложив определитель в (16) по элементам последней строки, получим, что $\deg A_j(z) \leqslant n_j - 1.$ Непосредственная проверка показывает, что для таких многочленов

$$L_n(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_0^k & \cdot\cdot & 0 \\ f_1^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_1^k & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ f_{|n|-2}^1 & & f_{|n|-n_1-1}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-2}^k & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-1}^k \\ \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_i^1 z^i & \cdot\cdot & \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-n_1+1}^1 z^i & \cdot\cdot & \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_i^k z^i & \cdot\cdot & \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-n_k+1}^k z^i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{d}_{n,i} z^{|n|+i-2}.$$

Теорема 2 доказана.

***Замечания и некоторые следствия.*** Из теоремы 2 следует, что $n_j$-я компонента вполне нормального индекса $n = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ определяет число коэффициентов ряда $f_j$, которое учитывается при построении многочленов $\{A_p\}_{p=1}^k$. В частности, если $n_j = 0$, то в матрице $G_n$ отсутствует блок $G^j$ и, следовательно, коэффициенты ряда $f_j$ не учитываются, многочлен $A_j(z) \equiv 0,$ а порядок мультииндекса $n$ определяется остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $n = (n_1, n_2, 0, \ldots, 0),$ то при построении многочленов учитываются только коэффициенты рядов $f_1$, $f_2$, и если $f_2(z) \equiv 1,$ то, например, многочлен $A_1$ согласно равенству (16) с точностью до мультипликативного множителя представим в виде

$$A_1(z) = \begin{vmatrix} f_{n_2}^1 & f_{n_2-1}^1 & \cdots & f_{n_2-n_1+1}^1 \\ f_{n_2+1}^1 & f_{n_2}^1 & \cdots & f_{n_2-n_1+2}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_2+n_1-2}^1 & f_{n_2+n_1-3}^1 & \cdots & f_{n_2-1}^1 \\ 1 & z^2 & \ldots & z^{n_1-1} \end{vmatrix}.$$

Полученное представление многочлена $A_1$ полностью согласуется с равенством Паде (3). Кроме того, в этом случае $A_j(z) \equiv 0$ при $j = 3, \ldots, k.$

Если же $n = (n_1, 0, \ldots, 0),$ то из (16) получаем, что $A_1(z) = f_0^1 z^{n_1-1},$ а $A_j(z) \equiv 0$ при $j = 2, \ldots, k.$ Отсюда, в частности, следует, что если система $f$ совершенна относительно задачи B, то $f_0^j \neq 0,$ $j = 1, \ldots, k.$

Следует также сказать, что если индекс $n$ не является вполне нормальным для $f$ относительно задачи B, то многочлены $A_j$, определенные равенствами (16), не являются решениями задачи B, так как все они тождественно равны нулю. В частности, в примере 3 $A_1(z) = a + bz - (4a + 2b)z^2.$ Однако если $A_1$ находить по формуле (16), то получим, что $A_1(z) \equiv 0.$

Из (16) вытекает следующий критерий нормальности индекса *n* для системы *f* относительно задачи B.

С л е д с т в и е 3. *Ненулевой индекс* $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ *будет нормальным для f относительно задачи B тогда и только тогда, когда*

$$\prod_{j=1}^{k} \widetilde{H}_n^{n_j} \neq 0, \tag{21}$$

*где* $\widetilde{H}_n^{n_j}$ *– определитель, полученный из определителя* (15) *вычеркиванием в нем последней строки и столбца, в котором находится элемент* $z^{n_j - 1}$, *при этом, если* $n_j = 0$, *либо* $n_j = 1$, *то в определителе* $\widetilde{H}_n^{n_j}$ *отсутствует блок* $G^j$.

Если $k = 2$, $f = (f_1, 1)$ и $(n_1, n_2) = (n+1, m+1)$, то (21) равносильно условию $H_{n,m} \cdot H_{n,m+1} \neq 0$, поэтому следствие 3 согласуется с критерием нормальности индекса (4).

С л е д с т в и е 4. *Если система* $f = (f_1, \dots, f_k)$ *совершенна относительно задачи B, то для любого ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *и решения* $A = (A_1, \dots, A_k)$ *задачи B с этим индексом в равенстве* (14) *коэффициент* $c_n \neq 0$.

Наряду с системой $f = (f_1, \dots, f_k)$ рассмотрим расширенную систему функций $\overline{f} = (1, f_1, \dots, f_k)$.

С л е д с т в и е 5. *Система f является совершенной относительно задачи A тогда и только тогда, когда расширенная система* $\overline{f}$ *является совершенной относительно задачи B.*

Из следствия 5 и сделанных ранее замечаний можно сделать вывод о том, что если система $\overline{f}$ является совершенной относительно задачи B, то все коэффициенты степенных рядов (1) не равны нулю.

Следствие 5 не в полной мере является новым. Утверждение, что система $\overline{f}$ является совершенной относительно задачи B, когда система *f* является совершенной относительно задачи A, без подробного доказательства приведено в монографии [1, гл. 4, § 1, утверждение 1.3].

## Список использованных источников


1. Никишин, Е. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
2. Бейкер, Дж. мл. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
3. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.
4. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А. И. Аптекарев [и др.] // Успехи мат. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.
5. Hermite, C. Sur la function exponentielle / C. Hermite // C. R. Akad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
6. Hermite, C. Sur la generalisation des fractions continues algebriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. – 1893. – Vol. 11, № 1. – P. 289–308. https://doi.org/10.1007/bf02420446


## References


1. Nikishin E. M., Sorokin V. N. *Rational Approximations and Orthogonality.* Moscow, Nauka Publ., 1988. 256 p. (in Russian).
2. Baker Jr. G. A., Graves-Morris P. *Pad´e Approximants.* 2nd ed. Cambridge University Press, 1996. https://doi.org/10.1017/CBO9780511530074
3. Stahl H. Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomals associated with the exponential function. *Electronic Transactions on Numerical Analysis,* 2002, no. 14, pp. 193–220.
4. Aptekarev A. I., Buslaev V. I., Mart´ınez-Finkelshtein A., and Suetin S. P. Pad´e approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials. *Russian Mathematical Surveys*, 2011, vol. 66, no. 6, pp. 1049–1131. https://doi.org/10.1070/rm2011v066n06abeh004770
5. Hermite C. Sur la function exponentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1873, vol. 77, pp. 18–293.
6. Hermite C. Sur la generalisation des fractions continues algebriques. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1893, vol. 21, no. 1, pp. 289–308. https://doi.org/10.1007/bf02420446

## Информация об авторах

**Старовойтов Александр Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Республика Беларусь). E-mail: svoitov@gsu.by; apsvoitov@gmail.com

**Рябченко Наталия Валерьевна** – старший преподаватель кафедры математического анализа и дифференциальных уравнний, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Республика Беларусь). E-mail: nmankevich@tut.by

## Information about the authors

**Aleksandr P. Staravoitov** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Francisk Scorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: svoitov@gsu.by, apsvoitov@gmail.com

**Nataliya V. Ryabchenko** – Senior Lecturer, Francisk Scorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: nmankevich@tut.by