ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 539.12 Поступила в редакцию 02.05.2019
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-467-478 Received 02.05.2019

Я. А. Войнова[1], А. Д. Коральков[2], Е. М. Овсиюк[2]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА СО СТРУКТУРОЙ ДАРВИНА – КОКСА ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Аннотация. Обобщенное уравнение Клейна – Фока – Гордона для частицы со структурой Дарвина – Кокса, учитывающее распределение заряда частицы по сфере конечного радиуса, исследуется с учетом внешнего кулоновского поля. Проведено разделение переменных, полученное радиальное уравнение сложнее уравнения в случае обычной частицы – оно имеет существенно особые точки $r = 0$ ранга 3, $r = \infty$ ранга 2 и 4 регулярные особые точки. В случае минимального орбитального момента $l = 0$ структура сингулярностей упрощается: есть существенно особые точки $r = 0$, $r = \infty$ ранга 2 и 4 регулярные особые точки. Построены решения Фробениуса этого уравнения, исследована структура рекуррентных соотношений для коэффициентов возникающего 7-членного степенного ряда. В качестве аналитического условия квантования используется обобщенное требование трансцендентности решений, которое позволяет получить алгебраическое уравнение 4-й степени для уровней энергии. Уравнение имеет 4 множества корней, зависящих от орбитального момента l и главного квантового числа $k = 1,2,3,\dots$. Численный анализ показывает, что одно из множеств корней $0 < \varepsilon_{l,k} < mc^2$ может интерпретироваться как отвечающее некоторым связанным состояниям частицы в кулоновском поле.

Ключевые слова: скалярная частица со структурой Дарвина – Кокса, кулоновское поле, уравнение Клейна – Фока – Гордона, существенно особые точки, решения Фробениуса, связанное состояние

Для цитирования. Войнова, Я. А. Скалярная частица со структурой Дарвина – Кокса во внешнем кулоновском поле / Я. А. Войнова, А. Д. Коральков, Е. М. Овсиюк // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 467–478. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-467-478

Ya. A. Voynova[1], A. D. Koral'kov[2], E. M. Ovsiyuk[2]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

SCALAR PARTICLE WITH THE DARWIN – COX INTRINSIC STRUCTURE IN THE EXTERNAL COULOMB FIELD

Abstract. The generalized Klein – Fock – Gordon equation for a particle with the Darwin–Cox structure allowing for a charge distribution of a particle over a sphere of finite radius is studied with regard to the external Coulomb field. The separation of variables is carried out, the obtained radial equation is significantly more complicated than the equation in the case of ordinary particles, it has essentially singular points $r = 0$ of rank 3, $r = \infty$ of rank 2 and 4 regular singular points. In the case of a minimum orbital momentum $l = 0$, the structure of singularities is simplified: there are essentially singular points $r = 0$, $r = \infty$ of rank 2 and 4 regular singular points. Frobenius solutions of this equation are constructed and the structure of the 7-term recurrence relations for the coefficients of the arising power series is investigated. As an analytical quantization condition, the generalized transcendence requirement of solutions is used; it allows one to obtain a fourth-degree algebraic equation for energy levels. The equation has 4 sets of roots depending on the orbital moment l and the main quantum number $k = 1,2,3,\dots$. The numerical analysis shows that one of the sets of the roots $0 < \varepsilon_{l,k} < mc^2$ can be interpreted as those corresponding to certain bound states of the particle in the Coulomb field.

Keywords: scalar particle with the Darwin – Cox structure, Coulomb field, Klein – Fock – Gordon equation, essentially singular points, Frobenius solutions, bound state

For citation. Voynova Ya. A., Koral'kov A. D., Ovsiyuk E. M. Scalar particle with the Darwin – Cox intrinsic structure in the external Coulomb field. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 467–478 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-467-478

1. Постановка задачи. Исходим из системы уравнений для скалярной частицы Кокса с распределенным по конечному объему зарядом в тензорной форме Прока (см. [1–8])

$$\frac{mc}{\hbar}\left(\delta_{\alpha}^{\beta}+\frac{\lambda}{mc/\hbar}F_{\alpha}^{\ \beta}\right)\Phi_{\beta}=D_{\alpha}\Phi,\quad D^{\alpha}\Phi_{\alpha}=\frac{mc}{\hbar}\Phi, \tag{1}$$

где используем обозначение $D_{\alpha}=i\nabla_{\alpha}+(e/\hbar c)A_{\alpha}$ (учитываем отрицательность заряда электрона). Ненулевой параметр λ соответствует наличию у частицы дополнительной структуры Дарвина – Кокса. Представим уравнения (1) в краткой форме:

$$\frac{mc}{\hbar}\Lambda_{\alpha}^{\ \beta}\Phi_{\beta}=D_{\alpha}\Phi,\quad D^{\alpha}\Phi_{\alpha}=\frac{mc}{\hbar}\Phi$$

или

$$\frac{mc}{\hbar}\Phi_{\rho}=(\Lambda^{-1})_{\rho}^{\ \alpha}D_{\alpha}\Phi,\quad D^{\alpha}\Phi_{\alpha}=\frac{mc}{\hbar}\Phi.$$

Исключая векторную компоненту, получаем обобщенное уравнение для скалярной функции Ф:

$$\left(D_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\rho\alpha}D_{\alpha}\Phi-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Phi=0. \tag{2}$$

В пространстве-времени с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ уравнение (2) примет вид

$$\left[\left(\frac{i}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\sqrt{-g}+\frac{e}{c\hbar}A_{\rho}\right)(\Lambda^{-1})^{\rho\alpha}\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}+\frac{e}{c\hbar}A_{\alpha}\right)-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi=0. \tag{3}$$

2. Разделение переменных. Будем рассматривать частицу Кокса во внешнем кулоновском поле, используя сферические координаты

$$A_0=\frac{e}{r},\quad e>0,\quad F_{r0}=-\frac{e}{r^2},\quad dS^2=c^2dt^2-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2.$$

Исходная матрица $\Lambda_{\alpha}^{\ \beta}$ имеет вид

$$\Lambda=(\Lambda_{\alpha}^{\ \beta})=\begin{vmatrix}1 & \frac{\mu}{r^2} & 0 & 0\\ \frac{\mu}{r^2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix},\quad \mu=-\frac{\lambda e}{mc/\hbar};$$

обратная матрица задается равенством

$$\Lambda^{-1}=K=(K_{\beta}^{\ \rho})=\begin{vmatrix}\frac{r^4}{r^4-\mu^2} & -\frac{\mu r^2}{r^4-\mu^2} & 0 & 0\\ -\frac{\mu r^2}{r^4-\mu^2} & \frac{r^4}{r^4-\mu^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

или

$$(K^{\beta\rho}) = \begin{vmatrix} \dfrac{r^4}{r^4-\mu^2} & -\dfrac{\mu r^2}{r^4-\mu^2} & 0 & 0 \\ +\dfrac{\mu r^2}{r^4-\mu^2} & -\dfrac{r^4}{r^4-\mu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2\sin^2\theta \end{vmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$\bar{D}_\alpha = \frac{i}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar}A_\rho, \quad D_\beta = i\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{e}{c\hbar}A_\alpha,$$

тогда уравнение (3) принимает вид

$$\left[\bar{D}_0 K^{00} D_0 + \bar{D}_0 K^{0r} D_r + \bar{D}_r K^{r0} D_0 + \bar{D}_r K^{rr} D_r + \bar{D}_\theta K^{\theta\theta} D_\theta + \bar{D}_\phi K^{\phi\phi} D_\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi = 0.$$

Далее (пусть $\alpha = e^2/\hbar c$)

$$\left\{\left(i\partial_0 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 \frac{r^4}{r^4-\mu^2} - \left(i\partial_0 + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{\mu r^2}{r^4-\mu^2} i\partial_r + \frac{i}{r^2}\partial_r r^2 \frac{\mu r^2}{r^4-\mu^2}\left(i\partial_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{r^2}\partial_r r^2 \frac{r^4}{r^4-\mu^2} i\partial_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi\partial_\phi\right) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\Phi = 0. \tag{4}$$

После разделения переменных на основе подстановки

$$\Phi = e^{-E'x^0/c\hbar}\, Y_{lm}(\theta,\phi)\, R(r), \quad \varepsilon = E'/c\hbar$$

из (4) найдем радиальное уравнение

$$\left\{\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 \frac{r^4}{r^4+\gamma^2} - \gamma\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{r^2}{r^4+\gamma^2}\frac{d}{dr} + \right.$$

$$\left. + \gamma\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{r^2}{r^4+\gamma^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{r^4}{r^4+\gamma^2}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - M^2\right\}R = 0, \tag{5}$$

где использованы обозначения (учтена вещественность величины $i\mu$)

$$M = \frac{mc}{\hbar}, \quad e^2 = \alpha = \frac{1}{137}, \quad L = l(l+1), \quad i\mu = \gamma, \ \gamma^* = \gamma.$$

Уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \left[\frac{2}{r} + \frac{4\gamma^2}{r(r^4+\gamma^2)}\right]\frac{dR}{dr} + \left[\varepsilon^2 - M^2 + \frac{2\alpha\varepsilon}{r} + \frac{\alpha^2 - l(l+1)}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\gamma\varepsilon}{r^3} + \frac{3\alpha\gamma - \gamma^2M^2}{r^4} - \frac{l(l+1)\gamma^2}{r^6} - \frac{4(\gamma\varepsilon r + \gamma\alpha)}{r^4+\gamma^2}\right]R = 0. \tag{6}$$

Здесь имеем 4 регулярные и 2 нерегулярные особые точки:

$$r^4+\gamma^2=\left(r-e^{+i\pi/4}\sqrt{\gamma}\right)\left(r+e^{+i\pi/4}\sqrt{\gamma}\right)\left(r-e^{-i\pi/4}\sqrt{\gamma}\right)\left(r+e^{-i\pi/4}\sqrt{\gamma}\right),$$

$$r=0,\quad \text{Rang}=3,\quad r=\infty,\quad \text{Rang}=2;$$

справедливо тождество (пусть $\sigma\equiv(-\gamma^2)^{1/4}$)

$$\frac{1}{r^4+\gamma^2}=\frac{1}{4\sigma^3}\left(\frac{1}{r-\sigma}-\frac{1}{r+\sigma}+\frac{i}{r-i\sigma}-\frac{i}{r+i\sigma}\right).$$

Решение около 4 регулярных особых точек имеет простой вид:

$$r\to+\sigma,\quad R\sim(r-\sigma)^{\rho},\quad \rho=0,2;\quad r\to-\sigma,\quad R\sim(r+\sigma)^{\rho},\quad \rho=0,2;$$

$$r\to+i\sigma,\quad R\sim(r-i\sigma)^{\rho},\quad \rho=0,2;\quad r\to-i\sigma,\quad R\sim(r+i\sigma)^{\rho},\quad \rho=0,2.$$

В соответствии с тем, что $r = 0$ – особая точка ранга 3, подстановка для локальных решений Фробениуса уравнения (6) около точки $r = 0$ должна иметь вид

$$R(r)=r^C e^{Ar}e^{B/r}e^{D/r^2}f(r). \tag{7}$$

3. Состояния с нулевым орбитальным моментом *l* = 0. Ограничимся наиболее простым случаем минимального значения момента, $l = 0$, уравнение (6) упрощается:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{6}{r}-\frac{4r^3}{r^4+\gamma^2}\right)\frac{dR}{dr}+$$

$$+\left[\varepsilon^2-M^2+\frac{2\alpha\varepsilon}{r}+\frac{\alpha^2}{r^2}+\frac{4\gamma\varepsilon}{r^3}+\frac{3\alpha\gamma-\gamma^2M^2}{r^4}-\frac{4\gamma(\varepsilon r+\alpha)}{r^4+\gamma^2}\right]R=0. \tag{8}$$

Здесь имеем прежние 4 регулярные особые точки и 2 нерегулярные точки $r = 0$, $r = \infty$ ранга 2. Разложим на простые дроби 2 выражения (напоминаем, что $\sqrt[4]{-\gamma^2}=\sigma$):

$$-\frac{4r^3}{(r^4+\gamma^2)}=-\frac{1}{r-\sigma}-\frac{1}{r-i\sigma}-\frac{1}{r+\sigma}-\frac{1}{r+i\sigma},$$

$$\frac{-4\gamma\varepsilon r-4\alpha\gamma}{r^4+\gamma^2}=\frac{1}{\sigma^3}\left\{\frac{-\gamma\varepsilon\sigma-\alpha\gamma}{r-\sigma}+\frac{i(-i\gamma\varepsilon\sigma-\alpha\gamma)}{r-i\sigma}-\frac{\gamma\varepsilon\sigma-\alpha\gamma}{r+\sigma}-\frac{i(i\gamma\varepsilon\sigma-\alpha\gamma)}{r+i\sigma}\right\}.$$

Уравнение (8) примет вид

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{6}{r}-\frac{1}{r-\sigma}-\frac{1}{r-i\sigma}-\frac{1}{r+\sigma}-\frac{1}{r+i\sigma}\right)\frac{dR}{dr}+$$

$$+\left[\varepsilon^2-M^2+\frac{2\alpha\varepsilon}{r}+\frac{\alpha^2}{r^2}+\frac{4\gamma\varepsilon}{r^3}+\frac{3\alpha\gamma-\gamma^2M^2}{r^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma(\varepsilon\sigma+\alpha)}{(r-\sigma)\sigma^3}+\frac{\gamma(\varepsilon\sigma+i\alpha)}{(r+i\sigma)\sigma^3}+\frac{\gamma(-\varepsilon\sigma+\alpha)}{(r+\sigma)\sigma^3}-\frac{\gamma(-\varepsilon\sigma+i\alpha)}{(r-i\sigma)\sigma^3}\right]R=0. \tag{9}$$

Специально отметим форму уравнения (9) около точки $r = 0$:

$$R'' + \frac{6}{r}R' - \frac{\gamma^2 M^2 - 3\gamma\alpha}{r^4}R = 0. \tag{10}$$

Условие, при котором область около нуля является запрещенной для классического движения частицы, имеет вид

$$\gamma\left(\gamma - \frac{3\alpha}{M^2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma < 0;$$

вариант $\gamma > 3\alpha / M^2$ кажется нефизическим, поскольку изначально предполагается, что параметр γ может быть сколь угодно близким к нулю, включая и нуль. Обратное к (10) ограничение (соответствующее разрешенности классического движения в области около нуля) дает

$$\gamma\left(\gamma - \frac{3\alpha}{M^2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \gamma < \frac{3\alpha}{M^2};$$

это условие предполагает ограничение на параметр γ сверху.

Напомним, что для состояний $l = 0$ качественное рассмотрение запрещенности классического движения в области около нуля не является надежной аргументацией и в случае обычной частицы. Действительно, здесь имеем следующее поведение решений:

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{\alpha^2}{r^2}R = 0, \quad r \sim r^a, \quad a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} < 0;$$

т. е. оба решения около нуля стремятся к бесконечности. С использованием подстановки $R = r^{-1}\overline{R}$ получим обращение решений в нуль в области, разрешенной для классического движения:

$$\overline{R}'' + \frac{\alpha^2}{r^2}\overline{R} = 0, \quad r \sim r^{ba}, \quad b = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} > 0.$$

Таким образом, пока вопрос с выбором правильного знака для параметра γ остается неясным.

В соответствии со структурой сингулярных точек решения Фробениуса для уравнения (9) ищем в виде (сравн. с (7))

$$R(r) = r^C e^{Ar} e^{B/r} f(r),$$

в результате получаем уравнение для $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{2C+6}{r} - \frac{2B}{r^2} + 2A - \frac{1}{r+i\sigma} - \frac{1}{r+\sigma} - \frac{1}{r-\sigma} - \frac{1}{r-i\sigma}\right)\frac{df}{dr} +$$

$$+\left[\frac{2\alpha\varepsilon + 6A + 2AC}{r} + \frac{\alpha^2 - 2AB + 5C + C^2}{r^2} + \frac{4\gamma\varepsilon - 4B - 2BC}{r^3} + \frac{3\alpha\gamma - \gamma^2 M^2 + B^2}{r^4} + \right.$$

$$+A^2 - M^2 + \varepsilon^2 + \frac{-\gamma\varepsilon\sigma + \alpha\gamma - A\sigma^3 + B\sigma + C\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r+\sigma)} + \frac{-\gamma\varepsilon\sigma - \alpha\gamma - A\sigma^3 + B\sigma - C\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r-\sigma)} +$$

$$\left. + \frac{\gamma\varepsilon\sigma + i\gamma\alpha - A\sigma^3 - B\sigma - iC\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r+i\sigma)} + \frac{\gamma\varepsilon\sigma - i\gamma\alpha - A\sigma^3 - B\sigma + iC\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r-i\sigma)}\right] f = 0.$$

Накладывая 3 ограничения, упрощающие уравнение, на параметры A, B, C, находим 4 набора значений:

$$A^2 - M^2 + \varepsilon^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \pm\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}\,;$$

$$3\alpha\gamma - \gamma^2 M^2 + B^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \pm\sqrt{\gamma(\gamma M^2 - 3\alpha)}\,;$$

$$C = 2\left(\frac{\gamma\varepsilon}{B} - 1\right) = -2 \pm \frac{2\gamma\varepsilon}{\sqrt{\gamma(\gamma M^2 - 3\alpha)}}. \tag{11}$$

Для описания связанных состояний в силу требования обращения решений в нуль на бесконечности будем использовать отрицательное значение параметра

$$A = -\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}\,.$$

Если параметр B вещественный, то требование обращения в нуль решений будет заведомо удовлетворяться только при знаке минус перед корнем:

$$B = -\sqrt{\gamma(\gamma M^2 - 3\alpha)}, \quad \gamma < 0 \quad (R > 0).$$

Теперь предположим, что параметр B чисто мнимый:

$$\gamma\left(\gamma M^2 - 3\alpha\right) < 0, \quad e^{B/r} = e^{\pm iR/r}\left(R > 0\right), \quad \gamma \in \left(0, \frac{3\alpha}{M^2}\right).$$

Следует обратить внимание на то, что при этом имеем очень необычное (расходящееся и осциллирующее) поведение решений в окрестности $r = 0$:

$$r \to 0, \quad R \sim \frac{1}{r^2} e^{\mp i\frac{2\gamma\varepsilon}{R}\ln r} e^{\pm iR/r}\,;$$

едва ли такое поведение совместимо с пониманием связанных состояний в квантовой механике. Вследствие этого в дальнейшем будем предполагать, что $\gamma < 0$.

С учетом ограничений (11) уравнение для $f(r)$ принимает более простой вид

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{2C+6}{r} - \frac{2B}{r^2} + 2A - \frac{1}{r+\sigma} - \frac{1}{r-\sigma} - \frac{1}{r+i\sigma} - \frac{1}{r-i\sigma}\right)\frac{df}{dr} +$$

$$+\left[\frac{2\alpha\varepsilon + 6A + 2AC}{r} + \frac{\alpha^2 - 2AB + 5C + C^2}{r^2} + \right.$$

$$+\frac{-\gamma\varepsilon\sigma + \alpha\gamma - A\sigma^3 + B\sigma + C\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r+\sigma)} + \frac{-\gamma\varepsilon\sigma - \alpha\gamma - A\sigma^3 + B\sigma - C\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r-\sigma)} +$$

$$\left. + \frac{\gamma\varepsilon\sigma + i\gamma\alpha - A\sigma^3 - B\sigma - iC\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r+i\sigma)} + \frac{\gamma\varepsilon\sigma - i\gamma\alpha - A\sigma^3 - B\sigma + iC\sigma^2}{\sigma^3}\frac{1}{(r-i\sigma)}\right] f = 0.$$

Будем использовать сокращенную запись этого уравнения

$$f'' + \left(a + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} - \frac{1}{r+\sigma} - \frac{1}{r-\sigma} - \frac{1}{r+i\sigma} - \frac{1}{r-i\sigma}\right) f' +$$

$$+\left(\frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{\beta_1}{r+\sigma} + \frac{\beta_2}{r-\sigma} + \frac{\beta_3}{r+i\sigma} + \frac{\beta_4}{r-i\sigma}\right) f = 0.$$

Умножив это уравнение на $r^2(r+\sigma)(r-\sigma)(r+i\sigma)(r-i\sigma)=r^2(r^4-\sigma^4),$ получим

$$\left(r^6-\sigma^4 r^2\right)\frac{d^2 f}{dr^2}+\left[ar^6+\left(a_1-4\right)r^5+a_2 r^4-\sigma^4 ar^2-\sigma^4 a_1 r-\sigma^4 a_2\right]\frac{df}{dr}+$$

$$+\Big[\left(b_1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\right)r^5+\left(\left(-\beta_1+\beta_2-i\beta_3+i\beta_4\right)\sigma+b_2\right)r^4+\sigma^2\left(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4\right)r^3+$$

$$+\left(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\right)\sigma^3 r^2-b_1\sigma^4 r-b_2\sigma^4\Big]f=0.$$

Строим решения в виде степенных рядов:

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}c_k r^k,\qquad \frac{df}{dr}=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k r^{k-1},\qquad \frac{d^2 f}{dr^2}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k r^{k-2}.$$

В результате находим рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда

$$k=0,\qquad a_2 c_1+b_2 c_0=0,$$

$$k=1,\qquad 2a_2 c_2+a_1 c_1+b_1 c_0+b_2 c_1=0,$$

$$k=2,\qquad -2\sigma c_2-\sigma a c_1-2\sigma a_1 c_2-3\sigma a_2 c_3+\left(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\right)c_0-b_1\sigma c_1-b_2\sigma c_2=0,$$

$$k=3,\qquad -6\sigma^2 c_3-2\sigma^2 a c_2-3\sigma^2 a_1 c_3-4\sigma^2 a_2 c_4+\left(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4\right)c_0+$$

$$+\left(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\right)\sigma c_1-b_1\sigma^2 c_2-b_2\sigma^2 c_3=0,$$

$$k=4,\qquad -12\sigma^4 c_4+a_2 c_1-3\sigma^4 a c_3-\sigma^4 a_1 4c_4-5\sigma^4 a_2 c_5+\left[\left(-\beta_1+\beta_2-i\beta_3+i\beta_4\right)\sigma+b_2\right]c_0+$$

$$+\sigma^2\left(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4\right)c_1+\left(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\right)\sigma^3 c_2-b_1\sigma^4 c_3-b_2\sigma^4 c_4=0,$$

$$k=5,\qquad -20\sigma^4 c_5+\left(a_1-4\right)c_1+2a_2 c_2-4\sigma^4 a c_4-\sigma^4 a_1 5c_5-6\sigma^4 a_2 c_6+$$

$$+\left(b_1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\right)c_0+\left[\left(-\beta_1+\beta_2-i\beta_3+i\beta_4\right)\sigma+b_2\right]c_1+$$

$$+\sigma^2\left(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4\right)c_2+\left(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\right)\sigma^3 c_3-b_1\sigma^4 c_4-b_2\sigma^4 c_5=0,$$

$$k=6,\qquad 2c_2-30\sigma^4 c_6+ac_1+2\left(a_1-4\right)c_2+3a_2 c_3-5\sigma^4 a c_5-\sigma^4 a_1 6c_6-$$

$$-7\sigma^4 a_2 c_7+\left(b_1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\right)c_1+\left[\left(-\beta_1+\beta_2-i\beta_3+i\beta_4\right)\sigma+b_2\right]c_2+$$

$$+\sigma^2\left(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4\right)c_3+\left(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\right)\sigma^3 c_4-b_1\sigma^4 c_5-b_2\sigma^4 c_6=0,$$

т. е. имеем 7-членное рекуррентное соотношение

$$k=5,6,7,...,\qquad \left[a(k-5)+\left(b_1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\right)\right]c_{k-5}+$$

$$+\left[(k-4)(k-5)+\left(a_1-4\right)(k-4)+\left\{\left(-\beta_1+\beta_2-i\beta_3+i\beta_4\right)\sigma+b_2\right\}\right]c_{k-4}+$$

$$+\left[a_2(k-3)+\sigma^2\left(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4\right)\right]c_{k-3}+\left(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\right)\sigma^3 c_{k-2}+$$

$$+\left[-\sigma^4 a(k-1)-b_1\sigma^4\right]c_{k-1}+\left[-\sigma^4 k(k-1)-\sigma^4 a_1 k-b_2\sigma^4\right]c_k-\sigma^4 a_2(k+1)c_{k+1}=0. \qquad (12)$$

В соответствии с методом Пуанкаре – Перрона разделим последнее соотношение на $k^2 c_{k-5}$:

$$\frac{1}{k^2}\Big[a(k-5)+\big(b_1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\big)\Big]+$$

$$+\frac{1}{k^2}\Big[(k-4)(k-5)+\big(a_1-4\big)(k-4)+\big\{\big(-\beta_1+\beta_2-i\beta_3+i\beta_4\big)\sigma+b_2\big\}\Big]\frac{c_{k-4}}{c_{k-5}}+$$

$$+\frac{1}{k^2}\Big[a_2(k-3)+\sigma^2\big(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4\big)\Big]\frac{c_{k-3}}{c_{k-4}}\frac{c_{k-4}}{c_{k-5}}+$$

$$+\frac{1}{k^2}\big(-\beta_1+\beta_2+i\beta_3-i\beta_4\big)\sigma^3\frac{c_{k-2}}{c_{k-3}}\frac{c_{k-3}}{c_{k-4}}\frac{c_{k-4}}{c_{k-5}}+$$

$$+\frac{1}{k^2}\Big[-\sigma^4 a(k-1)-b_1\sigma^4\Big]\frac{c_{k-1}}{c_{k-2}}\frac{c_{k-2}}{c_{k-3}}\frac{c_{k-3}}{c_{k-4}}\frac{c_{k-4}}{c_{k-5}}+$$

$$+\frac{1}{k^2}\Big[-\sigma^4 k(k-1)-\sigma^4 a_1 k-b_2\sigma^4\Big]\frac{c_k}{c_{k-1}}\frac{c_{k-1}}{c_{k-2}}\frac{c_{k-2}}{c_{k-3}}\frac{c_{k-3}}{c_{k-4}}\frac{c_{k-4}}{c_{k-5}}-$$

$$-\frac{1}{k^2}\sigma^4 a_2(k+1)\frac{c_{k+1}}{c_k}\frac{c_k}{c_{k-1}}\frac{c_{k-1}}{c_{k-2}}\frac{c_{k-2}}{c_{k-3}}\frac{c_{k-3}}{c_{k-4}}\frac{c_{k-4}}{c_{k-5}}=0$$

и устремим $k\to\infty$. В результате получим алгебраическое уравнение для величины, определяющей возможные радиусы сходимости:

$$R_{\text{conv}}=\frac{1}{|r|},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-4}}{c_{k-5}}=r,\quad r-\sigma^4 r^5=0,\quad R_{\text{conv}}=\frac{1}{|\sigma|}=|\sqrt{\gamma}|,\infty.$$

Поскольку на границе круга с радиусом $|\gamma|$ поведение решений регулярное, можно полагать, что ряд сходится при всех конечных r.

Будем пробовать в качестве условия квантования использовать ограничение, выделяющее из всех возможных решений Фробениуса так называемые трансцендентные решения (это обобщение условия, применяющегося для выделения трансцендентных функций Гойна [9–11]). Для этого следует обратиться к рекуррентной формуле (12) и потребовать обращения в нуль коэффициента при c_{k-5}:

$$k=5,6,7,...,\qquad P_{k-5}=\Big[a(k-5)+\big(b_1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\big)\Big]=0. \tag{13}$$

Отметим, что если дополнительно к этому условию потребовать в рекуррентном соотношении (12) обращения в нуль множителей при коэффициентах ряда

$$c_{k-4},\quad c_{k-3},\quad c_{k-2},\quad c_{k-1},\quad c_k,$$

это даст еще 5 уравнений:

$$P_{k-4}=0,\quad P_{k-3}=0,\quad P_{k-2}=0,\quad P_{k-1}=0,\quad P_k=0, \tag{14}$$

в силу рекуррентных соотношений все остальные коэффициенты степенного ряда обратятся в нуль, т. е. ряд превратится в полином. Понятно, что при этом уравнения (13), (14) должны иметь совместные решения.

Не следует думать, что не существует примеров, когда условиям полиномиальности можно удовлетворить и попасть при этом в физически интересные области параметров. Однако анализ возможности получения полиномиальных решений для рассматриваемой в работе системы дает отрицательный результат: в области изменения параметра энергии для связанных состояний $\varepsilon\in(0,1)$ совместных решений условий полиномиальности не существует.

4. Условие квантования при минимальном l = 0. Прежде чем приступить к анализу условия квантования, удобно в уравнении перейти к безразмерным величинам. Для этого учтем, что в качестве единицы измерения длины можно взять комптоновскую длину волны частицы λ: $M = mc/\hbar = 1/\lambda$, тогда возникают безразмерные величины

$$Mr = x, \quad \frac{\varepsilon}{M} = \frac{E'}{c\hbar} \cdot \frac{\hbar}{mc} = \frac{E'}{mc^2} = E, \quad \gamma M^2 = \Gamma.$$

При этом уравнение при $l = 0$ (см. (8)) преобразуется в следующее:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{6}{x} - \frac{4x^3}{x^4+\Gamma^2}\right)\frac{dR}{dx} +$$

$$+\left[E^2 - 1 + \frac{2\alpha E}{x} + \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{4\Gamma E}{x^3} + \frac{3\alpha\Gamma - \Gamma^2}{x^4} - \frac{4\Gamma(Ex+\alpha)}{x^4+\Gamma^2}\right]R = 0.$$

Переход к безразмерным единицам достигается формальными заменами $r \to x$, $M \to 1$, $\varepsilon \to E$, $\gamma \to \Gamma$.

Подстановка для решений Фробениуса имеет вид

$$l = 0, \quad R(x) = x^C e^{Ax} e^{B/x} f(x), \quad A = \pm\sqrt{1-E^2},$$

$$B = \pm\sqrt{-\Gamma(3\alpha - \Gamma)}, \quad C = 2\left(\frac{\Gamma E}{B} - 1\right).$$

Для исследуемого ниже случая с отрицательным значением Γ имеем следующие выражения для параметров (предполагаем описание связанных состояний):

$$A = -\sqrt{1-E^2}, \quad B = -\sqrt{-\Gamma(3\alpha-\Gamma)}, \quad C = \frac{-2\Gamma E}{\sqrt{-\Gamma(3\alpha-\Gamma)}} - 2$$

и явный вид уравнения

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \left(\frac{2C+6}{x} - \frac{2B}{x^2} + 2A - \frac{1}{x+\Sigma} - \frac{1}{x-\Sigma} - \frac{1}{x+i\Sigma} - \frac{1}{x-i\Sigma}\right)\frac{df}{dx} +$$

$$+\left[\frac{2\alpha E + 6A + 2AC}{x} + \frac{\alpha^2 - 2AB + 5C + C^2}{x^2} +\right.$$

$$+\frac{-\Gamma E\Sigma + \alpha\Gamma - A\Sigma^3 + B\Sigma + C\Sigma^2}{\Sigma^3} \cdot \frac{1}{(x+\Sigma)} + \frac{-\Gamma E\Sigma - \alpha\Gamma - A\Sigma^3 + B\Sigma - C\Sigma^2}{\Sigma^3} \cdot \frac{1}{(x-\Sigma)} +$$

$$\left.+\frac{\Gamma E\Sigma + i\Gamma\alpha - A\Sigma^3 - B\Sigma - iC\Sigma^2}{\Sigma^3} \cdot \frac{1}{(x+i\Sigma)} + \frac{\Gamma E\Sigma - i\Gamma\alpha - A\Sigma^3 - B\Sigma + iC\Sigma^2}{\Sigma^3} \cdot \frac{1}{(x-i\Sigma)}\right] f = 0$$

или сокращенно (напоминаем, что $\Gamma^2 = -\Sigma^4$)

$$f'' + \left(a + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} - \frac{1}{x+\Sigma} - \frac{1}{x-\Sigma} - \frac{1}{x+i\Sigma} - \frac{1}{x-i\Sigma}\right)f' +$$

$$+\left(\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{\beta_1}{x+\Sigma} + \frac{\beta_2}{x-\Sigma} + \frac{\beta_3}{x+i\Sigma} + \frac{\beta_4}{x-i\Sigma}\right)f = 0.$$

Обратимся к анализу условия трансцендентности решений (13) для случая $l = 0$:

$$k = 5,6,7,..., \qquad P_{k-5} = \left[a(k-5) + (b_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)\right] = 0;$$

рассматриваем случай отрицательных значений $\Gamma < 0$:

$$a = 2A = -2\sqrt{1-E^2}, \quad b_1 = 2\alpha E + 6A + 2AC,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \frac{-\Gamma E\Sigma + \alpha\Gamma - A\Sigma^3 + B\Sigma + C\Sigma^2}{\Sigma^3} + \frac{-\Gamma E\Sigma - \alpha\Gamma - A\Sigma^3 + B\Sigma - C\Sigma^2}{\Sigma^3} +$$

$$+ \frac{\Gamma E\Sigma + i\Gamma\alpha - A\Sigma^3 - B\Sigma - iC\Sigma^2}{\Sigma^3} + \frac{\Gamma E\Sigma - i\Gamma\alpha - A\Sigma^3 - B\Sigma + iC\Sigma^2}{\Sigma^3} = -4A.$$

Найдем для этого случая аналитическую форму условия квантования

$$a(k-5) + (b_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) =$$
$$= 2Ak - 10A + 2\alpha E + 6A + 2AC - 4A = 2Ak - 8A + 2\alpha E + 2AC = 0,$$

далее получаем уравнение относительно энергий E:

$$k = 6,7,8,9,10,..., \quad 2\alpha E - 2\sqrt{1-E^2}\left(k - 6 - \frac{2\Gamma E}{\sqrt{-\Gamma(3\alpha - \Gamma)}}\right) = 0.$$

Преобразуем уравнение для E к явному виду уравнения 4-й степени:

$$\frac{4\Gamma^2 E^4}{\Gamma(-3\alpha + \Gamma)} - \frac{4(k-6)\Gamma E^3}{\sqrt{\Gamma(-3\alpha + \Gamma)}} +$$

$$+ \left[(k-6)^2 + \alpha^2 - \frac{4\Gamma^2}{\Gamma(-3\alpha + \Gamma)}\right]E^2 + \frac{4(k-6)\Gamma E}{\sqrt{\Gamma(-3\alpha + \Gamma)}} - (k-6)^2 = 0.$$

Найдем его корни (рассматриваем несколько значений для k) при $\Gamma = -0{,}001$:

$$k = 6, \quad E_1 = 0{,}0, \quad E_2 = 0{,}0, \quad E_3 = 0{,}9998474910, \quad E_4 = -0{,}9998474910;$$

$$k = 7, \quad E_1 = 0{,}9999867507, \quad E_2 = -0{,}9999213828,$$

$$E_3 = -2{,}392615505 + 0{,}01922309598i, \quad E_4 = -2{,}392615505 - 0{,}01922309598i;$$

$$k = 8, \quad E_1 = 0{,}9999954436, \quad E_2 = -0{,}9999893567,$$

$$E_3 = -4{,}785168685 + 0{,}01785830114i, \quad E_4 = -4{,}785168685 - 0{,}01785830114i;$$

$$k = 9, \quad E_1 = 0{,}9999977197, \quad E_2 = -0{,}9999960043,$$

$$E_3 = -7{,}177749321 + 0{,}01763591332i, \quad E_4 = -7{,}177749321 - 0{,}01763591332i;$$

$$k = 10, \quad E_1 = 0{,}9999986350, \quad E_2 = -0{,}9999979237,$$

$$E_3 = -9{,}570331642 + 0{,}01755953433i, \quad E_4 = -9{,}570331642 - 0{,}01755953433i.$$

Уравнение имеет 4 множества корней, зависящих от орбитального момента l и главного квантового числа k = 1,2,3… . Помеченное индексом 1 множество значений, одно из множеств корней $0 < E_{1l,k} < mc^2$, может интерпретироваться как отвечающее некоторым связанным состояниям частицы в кулоновском поле.

Анализ радиального уравнения для частицы Кокса в кулоновском поле и условия квантования для уровней энергии при остальных значений l = 1,2,… будут рассмотрены в отдельной работе.

Список использованных источников

1. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // J. Phys. Math. Gen. – 1982. – Vol. 15, № 2. – P. 627–635. https://doi.org/10.1088/0305-4470/15/2/029

2. Ovsiyuk, E. M. Spin-zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields / E. M. Ovsiyuk // Ukr. J. Phys. – 2015. – Vol. 60, № 6. – P. 485–496. https://doi.org/10.15407/ujpe60.06.0485

3. Kazmerchuk, K. V. Cox's particle in magnetic and electric field against the background of Euclidean and spherical geometries / K. V. Kazmerchuk, E. M. Ovsiyuk // Ukr. Phys. J. – 2015. – Vol. 60, № 5. – P. 389–400. https://doi.org/10.15407/ujpe60.05.0389

4. Овсиюк, Е. М. Скалярная частица с внутренней структурой в электромагнитном поле в искривленном пространстве-времени / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, К. В. Казмерчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 32–36.

5. Veko, O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry / O. V. Veko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 1. – P. 50–61.

6. Частица Кокса во внешнем магнитном поле: анализ в пространстве Лобачевского / О. В. Веко [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 4. – С. 55–65.

7. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol. 1. General Theory / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2018. − 404 p.

8. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol. 2. Physical Problems / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2018. − 402 p.

9. Heun, K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten / K. Heun // Math. Ann. – 1989. – Bd. 33, № 2. – S. 161–179. https://doi.org/10.1007/bf01443849

10. Ronveaux, A. Heun's Differential Equation / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford University Press, 1995. – 354 p.

11. Slavyanov, S. Yu. Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 312 p.

References

1. Cox W. Higher-rank representations for zero-spin field theories. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1982, vol. 15, no. 2, pp. 627–635. https://doi.org/10.1088/0305-4470/15/2/029

2. Ovsiyuk E. M. Spin-zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields. *Ukrainian Journal of Physics*, 2015, vol. 60, no. 6, pp. 485–496. https://doi.org/10.15407/ujpe60.06.0485

3. Kazmerchuk K. V., Ovsiyuk E. M. Cox's particle in magnetic and electric field against the background of Euclidean and spherical geometries. *Ukrainian Journal of Physics*, 2015, vol. 60, no. 5, pp. 389–400. https://doi.org/10.15407/ujpe60.05.0389

4. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Kazmerchuk K. V. Scalar particle with internal structure in the electromagnetic field in the curved space-time. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2014, no. 3 (20), pp. 32–36 (in Russian).

5. Veko O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2016, vol. 19, no. 1, pp. 50–61.

6. Veko O. V., Voynova Ya. A., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Nonrelativistic Cox particle with intrinsic structure in magnetic field, analysis in Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 4, pp. 55–65 (in Russian).

7. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Balan V., Veko O. V., Red'kov V. M. *Elementary Particles with Internal Structure in External Field. Vol. 1. General Formalism*. USA, Nova Science Publishers, Inc., 2018. 404 p.

8. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Balan V., Veko O. V., Red'kov V. M. *Elementary Particles with Internal Structure in External Field. Vol. 2. Physical Problems*. USA, Nova Science Publishers, Inc., 2018. 402 p.

9. Heun K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. *Mathematische Annalen*, 1989, vol. 33, no. 2, pp. 161–179. https://doi.org/10.1007/bf01443849

10. Ronveaux A. *Heun's Differential Equations*. Oxford, Oxford University Press, 1995. 354 p.

11. Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities.* Oxford, Oxford University Press, 2000. 312 p.

Информация об авторах

Войнова Янина Александровна – аспирант, Институт физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: voinyuschka@mail.ru

Коральков Артем Дмитриевич – стажер младшего научного сотрудника, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: artemkoralkov@gmail.com

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Information about the authors

Voynova Yanina Alexandrovna – Postgraduate, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: voinyuschka@mail.ru

Koralkov Artem Dmitrievich – Assistant Junior Researcher, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: artemkoralkov@gmail.com

Ovsiyuk Elena Mikhailovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru