УДК 517.977

А. И. АСТРОВСКИЙ

РАВНОМЕРНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ И СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ В ФОРМЕ ШВАРЦА

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь, e-mail: aastrov@tut.by

Для равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем со скалярным выходом получены необходимые и достаточные условия приводимости к системам наблюдения в форме Шварца с помощью непрерывно дифференцируемой группы.

Ключевые слова: линейная нестационарная система наблюдения, равномерная наблюдаемость, система наблюдения в форме Шварца.

A. I. ASTROVSKII

UNIFORM OBSERVABILITY AND OBSERVATION SYSTEMS IN THE SCHWARZ FORM

Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus, e-mail: aastrov@tut.by

The necessary and sufficient conditions for uniformly observed linear time-varying systems with scalar output to be transformed to the Schwarz form under the action of a linear continuously differentiable group are obtained.

Keywords: linear time-varying observation system, canonical form, observation system in Schwarz form.

Введение. Наблюдаемость наряду с устойчивостью, управляемостью, стабилизируемостью является фундаментальным структурным свойством динамических систем. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении вопроса о возможности однозначного восстановления текущих (или начальных) состояний системы по данным наблюдений. В литературе [1–6] для линейных нестационарных систем изучаются различные понятия наблюдаемости, а именно полная, дифференциальная, равномерная, аппроксимативная, равномерно-точечная наблюдаемость, наблюдаемость в специальных классах разрешающих операций и др. Среди указанных типов наблюдаемости особо выделяют [1–5] равномерную наблюдаемость, наличие которой позволяет для системы формировать управления типа обратной связи. Заметим, что системы в канонической форме Фробениуса [3] обладают свойством равномерной наблюдаемости. Другими словами, свойство равномерной наблюдаемости является необходимым условием существования канонических форм Фробениуса для систем наблюдения. Отметим также, что в классической постановке понятие равномерной наблюдаемости определяется только для систем наблюдения с достаточно гладкими выходными функциями, например для систем наблюдения класса $(n-1)$ [3].

На примере систем наблюдения в форме Шварца можно показать, как исходя из знания выходной функции и специальным образом построенных ее квазипроизводных можно в момент времени t определить в этот же момент времени состояние системы, что важно для построения управлений типа обратной связи.

В данной работе, продолжающей исследования [3–13], получены необходимые и достаточные условия приводимости линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к форме Шварца [14–16] с помощью непрерывно дифференцируемой группы преобразований.

© Астровский А. И., 2016

Общая концепция исследования линейных систем управления-наблюдения, основанная на классификации их относительно действия различных групп преобразований, изложена в [3], а реализация этой концепции достаточно полно разработана в [4, 7–13].

1. Системы наблюдения в форме Шварца. Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = H(t)x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – n-вектор-столбец состояний, а $H(t)$ – $(n\times n)$-матрица в форме Шварца:

$$H(t)=\begin{pmatrix} 0 & h_0(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $h_i(t)$ − непрерывные на T функции. Присоединим к системе (1) скалярный выход

$$y(t) = x_n(t), \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{3}$$

Систему наблюдения (1), (3) назовем системой наблюдения в форме Шварца и для удобства изложения отождествим ее с парой (H, c^0), где $c^0 = \begin{pmatrix}0, & 0, & \dots, & 1\end{pmatrix}$. Заметим, что выходные функции $y(t)$, $t \in T$ системы (1), (3), вообще говоря, являются только непрерывно дифференцируемыми функциями. Так как понятие равномерной наблюдаемости [3, 4] определено для линейных систем наблюдения, множество выходных функций которых $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемо, то в общем случае к системе наблюдения (1), (3) нельзя применить определение равномерной наблюдаемости. Вместе с тем несложно показать, что состояние $x(t)$ системы (1) в момент времени $t \in T$ можно однозначным образом определить по выходной функции $y(t)$, $t \in T$ следующим образом:

$$\begin{gathered} x_n(t) = y(t), \quad x_{n-1}(t) = \frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t), \quad x_{n-2}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t)\right) - h_{n-2}(t)y(t), \\ x_{n-3}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t)\right) - h_{n-2}(t)y(t)\right) - h_{n-3}(t)\left(\frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t)\right), \dots, \\ x_2(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} - h_2(t)x_4(t), \quad x_1(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} - h_1(t)x_3(t). \end{gathered} \tag{4}$$

Следовательно, можно утверждать, что для систем наблюдения в форме Шварца (H, c^0) существует взаимно-однозначное соответствие между состоянием $x(t)$ системы (1) в момент $t \in T$ и n-вектор-функцией, специальным образом построенной (4) по выходной функции $y(t)$, $t \in T$. Подчеркнем, что в отличие от классического определения равномерной наблюдаемости [3, 4] здесь не требуется $(n-1)$ раз непрерывная дифференцируемость выходных функций.

Опишем понятия и конструкции, которые будут использованы в дальнейшем.

2. Квазидифференцируемость. Пусть m – целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $((m+1)\times(m+1))$ с непрерывными на T элементами $p_{k\,i}(t)$ $(i, k = 0, 1, \dots, m)$, удовлетворяющими условию

$$p_{k\,k}(t) \neq 0 \quad (t \in T), \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Выберем какую-либо матрицу $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_m(T)$. Квазипроизводные

$$ {}^{0}_{P}w(t),\ {}^{1}_{P}w(t),\ \ldots,\ {}^{m}_{P}w(t) $$

порядка $0,1,\ldots,m$ относительно матрицы $P(t)$ для непрерывной функции $w: T \to \mathbb{R}$ определяются по следующим рекуррентным правилам [17]:

$$ {}^{0}_{P}w(t) = p_{00}(t)w(t), \quad {}^{1}_{P}w(t) = p_{11}(t)\frac{d\left({}^{0}_{P}w(t)\right)}{dt} + p_{10}(t)\left({}^{0}_{P}w(t)\right),\ldots, $$

$$ {}^{k}_{P}w(t) = p_{kk}(t)\frac{d\left({}^{k-1}_{P}w(t)\right)}{dt} + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)\left({}^{i}_{P}w(t)\right) \quad (k = 2,3,\ldots,m). \tag{5} $$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (5) выполнимы и приводят к непрерывным функциям. Семейство всех непрерывных функций, обладающих непрерывными квазипроизводными относительно заданной матрицы $P \in \mathcal{U}_m(T)$, обозначим через $C_P^m(T)$.

Ясно, что всякая m раз непрерывно дифференцируемая функция квазидифференцируема по единичной матрице. Однако легко указать примеры, когда не дифференцируемая в обычном смысле функция m раз квазидифференцируема по некоторой матрице $P \in \mathcal{U}_m(T)$.

В литературе квазидифференцируемость активно применяется при исследовании различных краевых задач для дифференциальных уравнений, в теории неосцилляции, при факторизации дифференциальных уравнений, в том числе при разложении Пойа – Маммана и т. д.

Несложно заметить, что все выходные функции $y(t), \quad t \in T$ системы (1), (3) имеют непрерывные квазипроизводные

$$ {}^{0}_{Q}y(t) = y(t), \quad {}^{1}_{Q}y(t) = \frac{d\left({}^{0}_{Q}y(t)\right)}{dt} - h_{n-1}(t)\left({}^{0}_{Q}y(t)\right), \quad {}^{2}_{Q}y(t) = \frac{d\left({}^{1}_{Q}y(t)\right)}{dt} - h_{n-2}(t)\left({}^{0}_{Q}y(t)\right),\ldots, $$

$$ {}^{k}_{Q}y(t) = \frac{d\left({}^{k-1}_{Q}y(t)\right)}{dt} - h_{n-k}(t)\left({}^{k-2}_{Q}y(t)\right) \quad (k = 2,3,\ldots,n) $$

относительно $((n+1)\times(n+1))$-матрицы

$$ Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -h_{n-1}(t) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -h_{n-2}(t) & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_{n-3}(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -h_0(t) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6} $$

которая, очевидно, принадлежит множеству $\mathcal{U}_n(T)$.

Л е м м а 1. *Все выходные функции системы* (1), (3) *в форме Шварца имеют непрерывные квазипроизводные* ${}^{k}_{Q}y(t)$ *порядка* k $(k = 0,1,\ldots,n)$ *относительно матрицы* $Q(t)$ *вида* (6)*, удовлетворяют квазидифференциальному уравнению* ${}^{n}_{Q}y(t) = 0$, *а координаты* $x_i(t)$ *состояний системы* (1) *равны соответствующим квазипроизводным:* $x_i(t) = {}^{n-i}_{Q}y(t)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Таким образом, в случае системы наблюдения в форме Шварца (H, c^0) без труда находится матрица $Q \in \mathcal{U}_n(T)$ и квазипроизводные выходных функций $y(t), \quad t \in T$ системы (1), (3), по которым довольно просто определяются состояния системы наблюдения.

3. Равномерная наблюдаемость. Пусть на отрезке $T = [t_0, t_1]$ задана линейная нестационарная система наблюдения

$$ \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t) \quad (t \in T), \tag{7} $$

в которой $(n \times n)$-матрица $A(t)$ и n-вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T. Отождествим каждую такую систему (7) с парой (A,c), а множество всех их обозначим через Σ_n. Приведем обобщение классического определения равномерной наблюдаемости [3].

Систему (7) *назовем равномерно наблюдаемой на* T*, если существует такая матрица* $P \in \mathcal{U}_n(T)$*, что при любом* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *выходные функции* $y(t) = y(t, x_0)$ *имеют непрерывные квазипроизводные* ${}^{k}_{P} y(t) \quad (k = 0,1,\ldots,n-1)$ *относительно матрицы* $P(t)$ *и отображение*

$$x(t) \to \left({}^{0}_{P} y(t),\ {}^{1}_{P} y(t), \ldots,\ {}^{n-1}_{P} y(t) \right)$$

инъективно для каждого $t \in T$.

Следуя [4], приведем ряд понятий и утверждений. Пусть $P(t)$ – заданная матрица из множества $\mathcal{U}_n(T)$. Говорят, что система наблюдения (7) имеет P-класс $(n-1)$, и при этом будем писать $(A,c) \in \{P, n-1\}$, если каждая выходная функция этой системы имеет непрерывные квазипроизводные до порядка $(n-1)$ включительно.

Лемма 2. *Система* (7) *имеет* P*-класс* $(n-1)$ *тогда и только тогда, когда существуют и непрерывны* n-вектор *строки* $s_k(t)$*, определяемые формулами*

$$s_0(t) = p_{00}(t)c(t), \quad s_1(t) = p_{11}(t)\left(s_0(t)A(t) + \frac{ds_0(t)}{dt} \right) + p_{10}(t)s_0(t), \ldots,$$

$$s_k(t) = p_{kk}(t)\left(s_{k-1}(t)A(t) + \frac{ds_{k-1}(t)}{dt} \right) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(t)s_j(t) \quad (k = 2,3,\ldots,n-1). \tag{8}$$

Составим из строк $s_k(t)$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ матрицу наблюдаемости

$$S_P(t) = \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ \ldots \\ s_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что для любого решения $x(t)$ системы (7) и соответствующего ему выхода $y(t)$ выполняется равенство

$$Y(t) = S_P(t)x(t),$$

где $Y(t)$ – столбец, образованный элементами ${}^{0}_{P} y(t),\ {}^{1}_{P} y(t), \ldots, {}^{n-1}_{P} y(t)$.

Обозначим через $P_n(A,c)$ семейство всех матриц $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_n(T)$, относительно которых все выходные функции системы (7) $(n-1)$ раз непрерывно квазидифференцируемы. Для любой матрицы $P \in P_n(A,c)$ определим матрицу наблюдаемости $S_P(t)$ по формулам (8).

Теорема 1. *Система наблюдения* (A,c) *класса* $\{P, n-1\}$ *равномерно наблюдаема на* T *тогда и только тогда, когда ранг* $S_P(t) = n$ *при каждом* $t \in T$.

Из теоремы 1.3 монографии [4] следует, что условия равномерной наблюдаемости системы (7) не зависят от выбора матрицы $P \in P_n(A,c)$.

При использовании техники квазидифференцирования возникает нетривиальная проблема нахождения хотя бы одного элемента $P(t)$ множества $\mathcal{U}_n(T)$, относительно которого выходные функции системы наблюдения $(n-1)$ раз квазидифференцируемы. Как показано выше, эта проблема довольно просто решается для систем наблюдения в форме Шварца. Поэтому если исходную систему наблюдения (7) можно преобразовать с помощью подходящей замены переменных к системе в форме Шварца, то выходные функции системы (7) будут иметь непрерывные квазипроизводные порядка $0,1,\ldots,n$ относительно матрицы $Q(t)$ вида (6).

Пусть $\mathcal{G}_n$ – совокупность всех невырожденных при каждом $t \in T$ $(n \times n)$ матриц $G(t)$, принадлежащих классу $C^1(T, \mathbb{R}^{n \times n})$. Действие группы $\mathcal{G}_n$ на паре (A,c) из Σ_n зададим по правилу

$$G*(A,c) = \left(G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\frac{dG(t)}{dt},\ c(t)G(t) \right), \quad G \in \mathcal{G}_n.$$

Символом $\mathcal{O}(A,c)$ обозначим орбиту системы $(A,c)\in\Sigma_n$ относительно группы $\mathcal{G}_n$. Говорят, что система (7) обладает формой Шварца, если в множестве $\mathcal{O}(A,c)$ существует система $\left(H,c^0\right)$, где $H(t)$ – матрица вида (3).

Поскольку множество всех выходных функций пары (A,c) инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}_n$, то если система (A,c) имеет P-класс $(n-1)$, то такой же P-класс имеет и любая система орбиты $\mathcal{O}(A,c)$. Поэтому если в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ содержится система в форме Шварца, то каждая выходная функция $y(t)$ пары (A,c) n раз квазидифференцируема относительно матрицы (6) и удовлетворяет однородному квазидифференциальному уравнению $\overset{n}{\underset{Q}{}}y(t)=0$. Следовательно, наличие в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ пары в форме Шварца позволяет сравнительно просто решить вопрос о квазидифференцируемости выходных функций и равномерной наблюдаемости системы (A,c).

Сказанное выше приводит к необходимости исследования вопроса о возможности преобразования системы (A,c) к форме Шварца, т. е. к вопросу о наличии в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ хотя бы одной пары $(H,\ c^0)$. Как показывают примеры, это бывает не всегда.

Отметим, что если в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ пары (A,c) существует форма Шварца, то, вообще говоря, она не является единственной. Например, если $n=3$ и для системы (A,c) существует форма Шварца

$$H(t)=\begin{pmatrix}0 & h_0(t) & 0\\ 1 & 0 & h_1(t)\\ 0 & 1 & h_2(t)\end{pmatrix},$$

то у этой системы имеется множество форм Шварца

$$H_g(t)=\begin{pmatrix}0 & h_0(t)\pm g(t) & 0\\ 1 & 0 & h_1(t)\mp g(t)\\ 0 & 1 & h_2(t)\end{pmatrix},$$

где $g(t)=\exp\left(C-\int\limits_{t_0}^{t}h_2(\tau)d\tau\right)$, C – произвольная постоянная. Других форм Шварца, кроме указанных, в данном случае нет.

З а м е ч а н и е. Если предположить, что $h_0(t)\equiv 1$, то при $n=2,3,4$ форма Шварца единственна.

4. Существование формы Шварца для систем наблюдения со скалярным выходом. Получим условия существования формы Шварца в орбите пары (A,c). Предположим, что для системы (7) форма Шварца существует. Это значит, что найдется такая матрица $G\in\mathcal{G}_n$, что

$$G^{-1}(t)A(t)G(t)-G^{-1}(t)\frac{dG(t)}{dt}=H(t),\quad c(t)G(t)=c^0. \tag{9}$$

Анализ соотношения (9) показывает, что для существования формы Шварца $\left(H,c^0\right)$ необходимо выполнение условий

$$c\in C^1(T,R^n)\ \text{ и }\ c(t)\neq 0,\ t\in T.$$

Считая их выполненными, определим функции $b_{ij}(t)$ и n-вектор функции $p_i(t)$ $\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ по правилу

$$b_{10}(t)=\left\|c(t)\right\|,\quad p_1(t)=\frac{c(t)}{\left\|c(t)\right\|},\quad b_{nn}(t)=\left(p_1(t)A(t)+\frac{dp_1(t)}{dt}\right)p_1'(t),$$

$$b_{n,n-1}(t)=\left\|p_1(t)A(t)+\frac{dp_1(t)}{dt}-b_{nn}(t)p_1(t)\right\|,\quad p_2(t)=\frac{p_1(t)A(t)+\frac{dp_1(t)}{dt}-b_{nn}(t)p_1(t)}{b_{n,n-1}(t)},\ldots,$$

$$b_{n+1-i,n+1-j}(t)=\left(p_i(t)A(t)+\frac{dp_i(t)}{dt}\right)p_j'(t),\quad \left(j=1,2,\ldots,i\right), \tag{10}$$

$$b_{n+1-i,n-i}(t)=\left\| p_i(t)A(t)+\frac{dp_i(t)}{dt}-\sum_{k=1}^{i} b_{n+1-i,n+1-k}(t)p_k(t)\right\|,$$

$$p_{i+1}(t)=\frac{p_i(t)A(t)+\dfrac{dp_i(t)}{dt}-\sum\limits_{k=1}^{i} b_{n+1-i,n+1-k}(t)p_k(t)}{b_{n+1-i,n-i}(t)},$$

$$\left(i=1,2,\ldots,n-1\right).$$

Далее по матрицам систем наблюдения (A,c) и (H,c^0) построим дифференциальное уравнение

$$\frac{dG(t)}{dt}=H(t)G(t)-G(t)A(t) \quad (t\in T) \tag{11}$$

относительно $(n\times n)$-матрицы $G(t)$, которая подчиняется условию

$$c^0G(t)=c(t) \quad (t\in T). \tag{12}$$

Обозначим через $q_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ строки матрицы $G(t)$. Несложно убедиться, что соотношения (11), (12) равносильны при $i=1,2,\ldots,n-1$ уравнениям

$$q_n(t)=c(t),\quad q_{n-1}(t)=\frac{dq_n(t)}{dt}+q_n(t)A(t)-h_{n-1}(t)c(t),\quad q_{n-2}(t)=\frac{dq_{n-1}(t)}{dt}+q_{n-1}(t)A(t)-h_{n-2}(t)c(t),$$

$$q_{n-i}(t)=\frac{dq_{n-i+1}(t)}{dt}+q_{n-i+1}(t)A(t)-h_{n-i}(t)q_{n-i+2}(t) \quad (i=3,4,\ldots,n-1),$$

$$\dot q_1(t)+q_1(t)A(t)-h_0(t)q_2(t)=0 \quad (t\in T).$$

С помощью метода ортогонализации Грамма – Шмидта запишем матрицу $G(t)$ в виде произведения $G(t)=G_o(t)G_\Delta(t)$ ортогональной непрерывно дифференцируемой матрицы $G_o(t)$ и верхнетреугольной непрерывно дифференцируемой матрицы $G_\Delta(t)$. Пусть $p_n(t)$, $p_{n-1}(t),\ldots,$ $p_1(t)$ соответственно первая, вторая, $\ldots,n$-я строки матрицы $G'_o(t)$ (штрих означает транспонирование), а $g_{ij}(t)$ – элементы матрицы $G_\Delta(t)$. Очевидно, функции $p_i(t)$ и $g_{ij}(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ii}(t)\neq 0,\quad \|p_i(t)\|=1,\quad p_i(t)p'_j(t)=0 \quad (i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j).$$

Используя разложение $G(t)=G_o(t)G_\Delta(t)$, представим равенство (9) следующим образом:

$$\left(G'_o(t)A(t)+\frac{dG'_o(t)}{dt}\right)G_o(t)G_\Delta(t)=G_\Delta(t)H(t)+\frac{dG_\Delta(t)}{dt},\quad c(t)G_o(t)=c^0G_\Delta^{-1}(t).$$

Анализ равенства $c(t)G_o(t)=c^0G_\Delta^{-1}(t)$ приводит к соотношениям

$$\|c(t)\|\neq 0,\quad p_1(t)=c(t)\|c(t)\|^{-1},\quad g_{nn}(t)=\|c(t)\|^{-1}.$$

Положим $B(t)=\left(G'_o(t)A(t)+\dfrac{dG'_o(t)}{dt}\right)G_o(t)$ и обозначим через $b_{ij}(t)$ элементы этой матрицы. Если для системы (A,c) существует форма Шварца, то, учитывая свойства матрицы $G_o(t)$, можно рекуррентно определить функции $b_{ij}(t)$, $p_i(t)$ по формулам (10). Функции $h_i(t)$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$, определяющие форму Шварца, последовательно выражаются через элементы матрицы $G_\Delta(t)$, диагональные элементы которой равны

$$g_{nn}(t)=\frac{1}{\|c(t)\|},\quad g_{i-1,i-1}(t)=\frac{g_{ii}(t)}{b_{i,i-1}(t)}.$$

Исходя из равенства наддиагональных элементов матриц $B(t)G_{\Delta}(t)$ и $G_{\Delta}(t)H(t)+\dfrac{dG_{\Delta}(t)}{dt}$ получаем дифференциальные уравнения для определения остальных неизвестных элементов матрицы $G_{\Delta}(t)$.

Справедлива

Теорема 2. *Система (A,c) обладает формой Шварца, если функции $p_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ непрерывно дифференцируемы на T, функции $b_{ij}(t)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=i,i+1,\ldots,n)$ $(n-2)$ раза непрерывно дифференцируемы и выполняются условия $b_{i,i-1}(t)\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $t\in T$.*

Формы Шварца тесно связаны с каноническими формами Фробениуса $\left(A^0,c^0\right)$, $A^0(t)=\left(\delta_{i,j+1}+\delta_{nj}\alpha_{i-1}(t)\right)_{i,j=1}^{n}$ (δ_{ij} – символ Кронекера), которые широко используются в математической теории систем [1, 3, 4]. Например, для систем пятого порядка форма Шварца $\left(H,c^0\right)$ преобразуется к канонической форме Фробениуса с помощью следующей матрицы:

$$G(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & h_0(t) & -\dot{h}_0(t) & \ddot{h}_0(t)+h_0^2(t)+h_0(t)h_1(t)\\ 0 & 1 & 0 & h_0(t)+h_1(t) & -2\dot{h}_0(t)-\dot{h}_1(t)\\ 0 & 0 & 1 & 0 & h_0(t)+h_1(t)+h_2(t)\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

при этом функции, определяющие каноническую форму Фробениуса, находятся по формулам

$$\alpha_4(t)=h_4(t),\quad \alpha_3(t)=h_0(t)+h_1(t)+h_2(t)+h_3(t),$$

$$\alpha_2(t)=-3\frac{dh_0(t)}{dt}-2\frac{dh_1(t)}{dt}-\frac{dh_2(t)}{dt}-h_4(t)\left(h_0(t)+h_1(t)+h_2(t)\right),$$

$$\alpha_1(t)=3\frac{d^2h_0(t)}{dt^2}+\frac{d^2h_1(t)}{dt^2}+h_4(t)\left(2\frac{dh_0(t)}{dt}+\frac{dh_1(t)}{dt}\right)-h_0(t)h_2(t)-h_3(t)\left(h_0(t)+h_1(t)\right),$$

$$\alpha_0(t)=-\frac{d^3h_0(t)}{dt^3}+\frac{dh_0(t)}{dt}h_2(t)+h_0(t)\frac{dh_2(t)}{dt}-h_4(t)\left(\frac{d^2h_0(t)}{dt^2}-h_0(t)h_2(t)\right)+\frac{dh_0(t)}{dt}h_3(t).$$

Заметим, что несмотря на неединственность формы Шварца, из всех таких форм, находящихся в орбите $\mathcal{O}(A,c)$, получается одна и та же каноническая форма Фробениуса.

5. Существование формы Шварца для равномерно наблюдаемых систем. Пусть на отрезке $T=[t_0,t_1]$ задана линейная нестационарная равномерно наблюдаемая система (A,c) класса *n*. Для такого класса систем существует непрерывно дифференцируемая невырожденная при каждом $t\in T$ матрица наблюдаемости $S(t)$, строки которой находятся по рекуррентным формулам

$$s_0(t)=c(t),\quad s_{i+1}(t)=s_i(t)A(t)+\frac{ds_i(t)}{dt}\quad \left(i=0,1,\ldots,n-1\right),$$

а полный инвариант пары (A,c) относительно действия группы $\mathcal{G}_n$ равен

$$\left(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t)\right)=s_n(t)S^{-1}(t).$$

Теорема 3. *Форма Шварца для равномерно наблюдаемых систем (A,c) класса n существует тогда и только тогда, когда $f_i\in C^{i-1}\left(T,R\right)$ $\left(i=1,2,\ldots,n\right)$.*

Например, для системы третьего порядка функции $h_0(t),h_1(t),h_2(t)$, определяющие форму Шварца, находятся по формулам

$$h_2(t)=f_3(t),\quad h_0(t)=f_2(t)-h_1(t)-2f_3(t),$$

$$h_1(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_3(\tau)d\tau\right)\left(C + \int_{t_0}^{t}\left(f_1(\tau) + f_3(\tau)f_2(\tau) - \frac{d^2 f_3(\tau)}{dt^2} - 2f_3(\tau)\frac{df_3(\tau)}{dt}\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_3(\xi)d\xi\right)d\tau\right),$$

где C – произвольная постоянная. Коэффициенты же канонической формы Фробениуса в данном случае имеют вид

$$\alpha_2(t) = f_3(t), \quad \alpha_1(t) = f_2(t) - 2f_3(t), \quad \alpha_0(t) = f_1(t) - \frac{df_2(t)}{dt} + \frac{d^2 f_3(t)}{dt^2}.$$

Список использованной литературы

1. *Silverman, L. M.* Transformation time-variable systems to canonical (phase-variable) form / L. M. Silverman // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 300–303.

2. *Silverman, L. M.* Controllability and observability in time-variable linear systems / L. M. Silverman, H. E. Meadows // SIAM J. Control.– 1967. – Vol. 5, N 1. – P. 64–73.

3. *Гайшун, И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

4. *Астровский, А. И.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А. И. Астровский, И. В. Гайшун. – Минск: Беларус. навука, 2013.

5. *Гайшун, И. В.* Описание множества равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун, А. И. Астровский // Докл. АН Беларуси. − 1996. − Т. 40, № 5. − С. 5–8.

6. *Астровский, А. И.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 7. – С. 3–13.

7. *Астровский, А. И.* Связь между каноническими формами линейных дифференциальных систем наблюдения и каноническими формами их дискретных аппроксимаций / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2011. − Т. 47, № 7. − С. 954–962.

8. *Астровский, А. И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения с квазидифференцируемыми коэффициентами относительно различных групп преобразований / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2011. − Т. 47, № 2. − С. 254–263.

9. *Астровский, А. И.* Один способ построения канонических форм Фробениуса линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2010. − Т. 46, № 10. – С. 1479–1487.

10. *Астровский, А. И.* Квазидифференцируемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2010. − Т. 46, № 3. − С. 423–431.

11. *Астровский, А. И.* Преобразование линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к каноническим формам Фробениуса / А. И. Астровский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. − 2009. − Т. 53, № 6. − С. 16–21.

12. *Астровский, А. И.* Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. − 2009. − Т. 45, № 11. − С. 1567–1576.

13. *Астровский, А. И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения и хессенбергова наблюдаемость / А. И. Астровский // Докл. Рос. акад. наук. − 2002. − Т. 383, № 4. − С. 439–442.

14. *Chen, C. F.* A matrix for evaluating Schwarz's form / C. F. Chen, H. Chu // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 303–305.

15. *Lab, M.* On Schwarz canonical form for large system simplification / M. Lab // IEEE Trans. Autom. Control. – 1975. – Vol. AC-20, N 2. – P. 262–263.

16. *Anderson, B. D. O.* Schwarz matrix properties for continuous and discrete systems / B. D. O. Anderson, E. I. Jury, M. Mansour // Int. J. Control. – 1976. – Vol. 23, N 1. – P. 1–16.

17. *Дерр, В. Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В. Я. Дерр // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. – 1999. – Вып. 1 (16). – С. 3–105.

Поступила в редакцию 18.02.2016