ІНФАРМАТЫКА

УДК 513+681.3

В. Г. НАЙДЕНКО

ОС-ВЫПУКЛАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЧАСТИЧНО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Институт математики НАН Беларуси

(*Поступила в редакцию 01.10.2013*)

Теория частичной выпуклости – сравнительно новое и перспективное направление в геометрии, которое находит все большее применение в решении различных прикладных проблем, таких как задачи синтеза сверхбольших интегральных схем (СБИС), обработки изображений, проектирования баз данных и др. [1]. Настоящая статья посвящена проблеме нахождения частично выпуклых оболочек объединений многогранников.

Дадим необходимые определения. Пусть в *n*-мерном линейном пространстве R^n задано множество единичных векторов $O \subseteq S^{n-1}$ (направлений), где S^{n-1} – единичная сфера. Мы предполагаем симметричность множества *O*, или $O = -O$, что не является ограничением в контексте частичной выпуклости. Напомним, что множество $X \subseteq R^n$ называется частично выпуклым (*O*-выпуклым), если пересечение *X* с произвольной прямой с направляющим вектором из *O* связно или пусто. Такие прямые назовем *O*-прямыми. Примеры частично выпуклых множеств на плоскости можно проиллюстрировать рис. 1.

Несвязное множество (см. рис. 1, *г*) показывает, насколько существенно могут отличаться частично выпуклые множества от выпуклых множеств, которые, как известно, всегда связны.

По аналогии с обычной выпуклостью [2], флаговым полупространством (или семипространством) S_x^O частичной выпуклости в точке $x \in R^n$ называется максимальное по включению частично выпуклое множество, не содержащее *x*. Флаговые полупространства частичной выпуклости вида $S_x^O = R^n \setminus (x + C)$ называются флаговыми *C*-полупространствами, где *C* – острый выпуклый конус. В работе [3] был выделен один специальный класс семипространств частичной выпуклости, так называемые *C*-семипространства. В [4] была введена обобщенная выпуклость, называемая *OC*-выпуклостью, где *OC*-выпуклые множества представляют собой пересечения *C*-семипространств. *OC*-выпуклость является специальным случаем частичной выпуклости.

Напомним определение *OC*-выпуклости. Семейство подмножеств *OC* из R^n образует *OC*-выпуклость, если *OC* содержит только следующие множества: 1) R^n; 2) все *C*-семипространства *O*-выпуклости; 3) всевозможные пересечения между собой *C*-семипространств *O*-выпуклости.

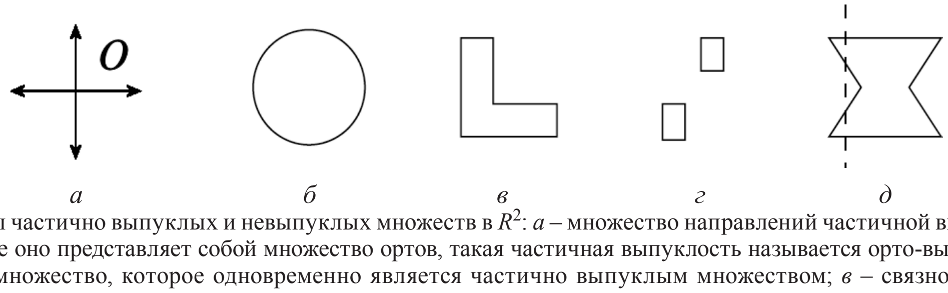

Рис. 1. Примеры частично выпуклых и невыпуклых множеств в R^2: *а* – множество направлений частичной выпуклости, в данном случае оно представляет собой множество ортов, такая частичная выпуклость называется орто-выпуклостью; *б* – выпуклое множество, которое одновременно является частично выпуклым множеством; *в* – связное частично выпуклое множество; *г* – несвязное частично выпуклое множество; *д* – множество, не являющееся частично выпуклым (пересечение с вертикальной прямой несвязно)

Пара $(R^n,\ OC)$ с точки зрения аксиоматической теории выпуклости [5] называется пространством OC-выпуклости, а элементы семейства OC – OC-выпуклыми множествами. OC-выпуклость можно считать частным случаем O-выпуклости, так как все OC-выпуклые множества являются O-выпуклыми. Очевидно, что обратное не верно. Однако OC-выпуклость позволяет эффективно строить аппроксимации частично выпуклых оболочек. Семипространство OC-выпуклости в произвольной точке $x \in R^n$ будем для краткости называть OC-семипространством S_x^{oc}.

Множество $M \subset O$ назовем половинным для O, если $M \cup -M = O$ и $M \cap -M = \varnothing$. Половинные множества позволяют охарактеризовать OC-семипространства следующим образом.

1. Пусть $M \subset O$ – половинное множество. Если $CH[M]$ – острый конус, то $R^n \setminus (CH[M]+x)$ – OC-семипространство в произвольной точке $x \in R^n$.

2. Для любого OC-семипространства $S_x^{oc} = R^n \setminus (C+x)$ существует половинное для O множество $M \subseteq C$ такое, что $R^n \setminus (CH[M]+x) = S_x^{oc}$.

Для иллюстрации приведем в пространстве R^2 пример OC-семипространства (показанное штриховкой на рис. 2) в начале координат **0** для случая орто-выпуклости.

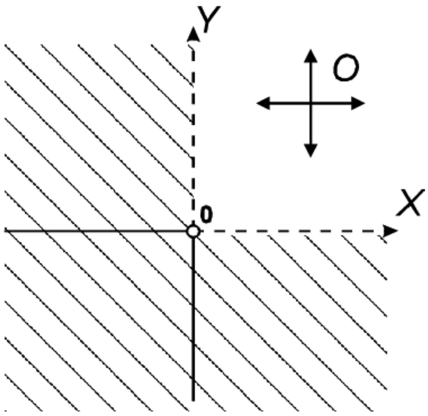

Рис. 2. Пример OC-семипространства в R^2

Легко видеть, что для приведенного на рис. 2 OC-семипространства $R^2 \setminus C$ максимальный острый выпуклый конус C представляет собой верхний правый квадрант. Аналогично в начале координат **0** можно построить другие три OC-семипространства типа $R^2 \setminus C$, где C может быть правым нижним, левым нижним или левым верхним квадрантом. OC-семипространство $R^2 \setminus (C+x)$ в любой другой точке $x \in R^2$, отличной от начала координат **0**, может быть получено параллельным переносом OC-семипространства $R^2 \setminus C$ из начала координат **0** в точку x. Все построенные таким образом OC-семипространства и их всевозможные пересечения друг с другом образуют семейство множеств OC. В этом случае множество $X \subseteq R^2$ называется OC-выпуклым тогда и только тогда, когда $X \in OC$ или $X = R^2$.

Перейдем теперь к проблеме нахождения частично-выпуклых оболочек.

Определение частично-выпуклой оболочки аналогично ее классическому варианту. Для произвольного $X \subseteq R^n$ частично-выпуклая оболочка (O-оболочка) $\mathrm{conv}^o[X]$ есть пересечение всех частично-выпуклых множеств, содержащих X. Возникает следующая проблема: как для произвольно заданной точки $a \in R^n$ определить, принадлежит ли она $\mathrm{conv}^o[X]$. Отметим, что в отличие от подобной проблемы нахождения выпуклой оболочки данная задача представляется весьма сложной. До настоящего времени известны только алгоритмы построения частично-выпуклых оболочек для полигонов (т. е. объединений двумерных многогранников) на плоскости [1]. Даже для трехмерного пространства пока не найдено никакого алгоритма решения указанной проблемы. Однако, используя описанный выше класс OC-выпуклых множеств, мы приближенно решаем этот вопрос.

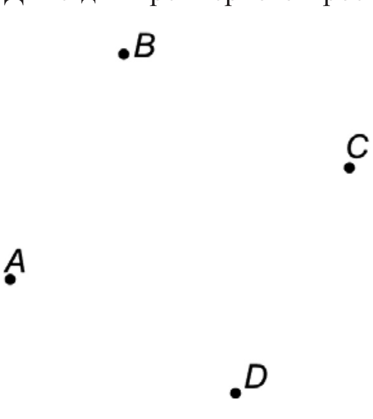

Рис. 3. Орто-выпуклое множество $X = \{A, B, C, D\}$ в R^2

Аналогично частично-выпуклой оболочке $\mathrm{conv}^o[X]$ мы можем определить OC-выпуклую оболочку $\mathrm{conv}^{oc}[X]$ как пересечение всех OC-выпуклых множеств, содержащих множество X. Так как любое OC-выпуклое множество по определению является частично выпуклым, то $\mathrm{conv}^{oc}[X]$ представляет собой внешнюю аппроксимацию $\mathrm{conv}^o[X]$, т. е. $\mathrm{conv}^o[X] \subseteq \mathrm{conv}^{oc}[X]$. Имея в своем распоряжении алгоритм построения OC-выпуклой оболочки $\mathrm{conv}^{oc}[X]$, мы можем приближенно определить частично выпуклую оболочку $\mathrm{conv}^o[X]$. Легко показать, что OC-выпуклая оболочка $\mathrm{conv}^{oc}[X]$ может не совпадать с частично выпуклой оболочкой $\mathrm{conv}^o[X]$ уже для множества X, содержащего всего четыре точки. На рис. 3 показано орто-выпуклое множество X, состоящее из четырех точек A,B,C,D. Поскольку X орто-выпукло, то его частично выпуклая оболочка $\operatorname{conv}^o[X]$ совпадает с X.

Представленная на рис. 4 OC-выпуклая оболочка $\operatorname{conv}^{oc}[X]$ множества $X=\{A,B,C,D\}$ содержит не только исходные точки A,B,C,D, но и отрезки AE,BF,CG,DH вместе с заштрихованным квадратом $EFGH$. Следовательно, в этом примере OC-выпуклая оболочка $\operatorname{conv}^{oc}[X]$ не совпадает с частично выпуклой оболочкой $\operatorname{conv}^o[X]$.

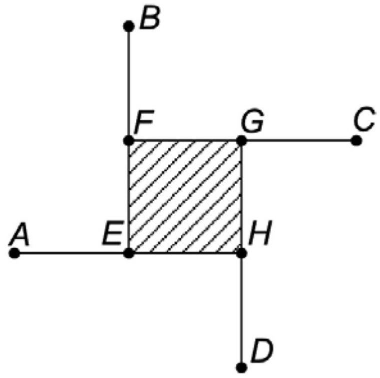

Рис. 4. OC-выпуклая оболочка $\operatorname{conv}^{oc}[X]$ множества $X=\{A,B,C,D\}$ в R^2

Перейдем теперь к алгоритму построения OC-выпуклой оболочки $\operatorname{conv}^{oc}[A]$, где множество $A=P_1\cup\ldots\cup P_k$ представляет собой объединение многогранников $P_1,\ldots,P_k$. Мы предполагаем, что эти многогранники заданы в виде пересечений полупространств (H-представления). Любой многогранник P_j, входящий в A, можно записать в виде системы линейных уравнений $\{x\in R^n \mid P^{(j)}x\ge p_j\}$, где $p^{(j)}$ и p_j – матрица и вектор-столбец, соответствующие P_j.

Пусть $M_0=\{e_1,\ldots,e_l\}$ – некоторое произвольное фиксированное половинное множество векторов из O. Тогда все половинные множества векторов из O можно представить в виде кортежей из l элементов вида $<s_1,\ldots,s_l>$, где $s_i\in\{-e_i,e_i\}$ для любого $i\in\overline{1,l}$. На множестве O зададим частичное упорядочение векторов: $\forall i\in\overline{1,l},\ e_i>-e_i$. На множестве всех половинных множеств векторов из O введем лексикографический порядок. Пусть заданы два произвольных половинных множества $M'=<s_1',\ldots,s_l'>$ и $M''=<s_1'',\ldots,s_l''>$. Будем считать, что $M'>M''$ тогда и только тогда, когда существует i такое, что $s_i'>s_i''$, и если $i>1$, то $s_j'=s_j''$ для любого j, $j<i$, причем $i,j\in\overline{1,l}$.

Из работы [6] используем итерационный алгоритм ENUMCONE перечисления всех половинных множеств, порождающих острые конусы. Переменные алгоритма $s_1,\ldots,s_l$ определены на множестве векторов $\{-e_1,e_1,\ldots,-e_l,e_l\}=O$. Переменная i обозначает номер итерации.

Алгоритм ENUMCONE

Шаг 1. $i:=1$; $r:=1$.
Шаг 2. Если $CH[<s_1,\ldots,s_{r-1},e_r>]$ – острый конус, то $s_r:=e_r$, иначе $s_r:=-e_r$.
Шаг 3. $r:=r+1$.
Шаг 4. Если $r\le l$, то переход к шагу 2.
Шаг 5. Выдать половинное множество векторов $M_i=<s_1,\ldots,s_l>$.
Шаг 6. $i:=i+1$.
Шаг 7. Найти наибольшее j, $j\in\overline{1,l}$, при котором $s_j=e_j$ и $CH[<s_1,\ldots,s_{j-1},-s_j>]$ – острый конус.
В противном случае остановить ENUMCONE (все требуемые половинные множества найдены).
Шаг 8. $s_j:=-e_j$.
Шаг 9. $r:=j+1$.
Шаг 10. Переход к шагу 2.

З а м е ч а н и е. Для $r=1$ и $j=1$ конусы $CH[<s_1,\ldots,s_{r-1},e_r>]$ и $CH[<s_1,\ldots,s_{j-1},-s_j>]$ обозначают соответственно $CH[<e_1>]$ и $CH[<-s_1>]$.

Алгоритм ENUMCONE в лексикографическом порядке, начиная с самого большего, перечисляет все половинные множества $M_1,\ldots,M_m$, порождающие острые конусы.

Пусть a – произвольная точка в R^n. Для любого $i=\overline{1,m}$ многогранное множество $CH[M_i]+a$ можно выразить через M_i следующим образом: $\{x\in R^n \mid x-a=\sum_{j=1}^{l}\alpha_j e_{i_j},\ \alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_l\ge 0\}$, где $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_l}\}=M_i$. Отметим, что $l=|O|/2$ – постоянная величина для всех M_i.

Теперь можем представить алгоритм FindConv для нахождения *OC*-выпуклой оболочки (или, другими словами, *OC*-выпуклой аппроксимации *O*-выпуклой оболочки) объединения конечного числа многогранников.

Алгоритм FindConv вычисления *OC*-выпуклой оболочки

Вход алгоритма: множество $A = P_1 \cup \ldots \cup P_k$ и произвольно выбранная точка $a \in R^n$.

Шаг 1. Найти с помощью алгоритма ENUMCONE все половинные множества $M_1,\ldots,M_m$, порождающие острые конусы. Для каждого $i=\overline{1,m}$ построить систему линейных уравнений $\{x \in R^n \mid x - a = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j e_{i_j},\ \alpha_1 \ge 0,\ldots,\alpha_l \ge 0\}$, где $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_l}\} = M_i$.

Шаг 2. $i := 1$.

Шаг 3. Для всех $j=\overline{1,k}$ проверить относительно переменных $x \in R^n$ и $\boldsymbol{\alpha} \in R^l$ каждую систему линейных уравнений $\{x \in R^n,\ \boldsymbol{\alpha} \in R^l \mid x - a = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j e_{i_j},\ \alpha_1 \ge 0,\ldots,\alpha_l \ge 0,\ P^{(j)}x \ge p_j\}$, где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, на наличие решений. Если ни одна из этих систем не имеет решения, то выдать ответ, что $a \notin \mathrm{conv}^{oc}[A]$. Иначе перейти к шагу 4.

Шаг 4. $i := i+1$. Если $i > m$, то выдать ответ, что $a \in \mathrm{conv}^{oc}[A]$. Иначе перейти к шагу 3.

Корректность алгоритма FindConv вытекает из следующих утверждений. Если для некоторого i ни одна из систем линейных уравнений $\{x \in R^n,\ \boldsymbol{\alpha} \in R^l \mid x - a = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j e_{i_j},\ \alpha_1 \ge 0,\ldots,\alpha_l \ge 0,\ P^{(j)}x \ge p_j\}$, где $j=\overline{1,k}$, не имеет решения, то это означает, что $CH[M_i]+a$ не пересекает ни один из многогранников $P_1,\ldots,P_k$. Но тогда *OC*-семипространство $R^n \setminus (CH[M_i]+a)$ целиком содержит все эти многогранные множества $P_1,\ldots,P_k$. В этом случае $a \notin \mathrm{conv}^{oc}[A]$, так как из утверждения $A \subseteq R^n \setminus (CH[M_i]+a)$ вытекает $\mathrm{conv}^{oc}[A] \subseteq R^n \setminus (CH[M_i]+a)$, но $a \notin R^n \setminus (CH[M_i]+a)$. Если же для любого i какая-то из систем $\{x \in R^n,\ \boldsymbol{\alpha} \in R^l \mid x - a = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j e_{i_j},\ \alpha_1 \ge 0,\ldots,\alpha_l \ge 0,\ P^{(j)}x \ge p_j\}$, где $j=\overline{1,k}$, имеет решение, то это означает, что для любого *OC*-семипространства $R^n \setminus (CH[M_i]+a)$ существует такая точка $x \in A$, что $x \notin R^n \setminus (CH[M_i]+a)$. Тогда в силу следствия из теоремы 3 из статьи [4] точка a принадлежит $\mathrm{conv}^{oc}[A]$.

Следующая теорема показывает вычислительную сложность алгоритма FindConv.

Т е о р е м а 1. *Если размерность n линейного пространства R^n фиксирована, то время работы алгоритма FindConv полиномиально по размеру его входа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [6], что алгоритм ENUMCONE работает с полиномиальной скоростью. При фиксированной размерности n линейного пространства R^n общее количество *OC*-семипространств в точке a полиномиально зависит от мощности множества направлений O частичной выпуклости [6]. Следовательно, общее время работы алгоритма ENUMCONE полиномиально. Заметим, что алгоритм FindConv решает не более чем $k \cdot m$ систем линейных уравнений вида $\{x \in R^n \mid x - a = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j e_{i_j},\ \alpha_1 \ge 0,\ldots,\alpha_l \ge 0\}$. Тогда общее время работы алгоритма FindConv полиномиально. Теорема доказана.

Отметим, что если размерность n линейного пространства R^n не фиксирована, то время работы алгоритма FindConv экспоненциально зависит от n. Это следует из того факта [6], что общее количество *OC*-семипространств экспоненциально растет по отношению к размерности n. Возникает вопрос, можем ли мы найти полиномиальный алгоритм построения *OC*-выпуклой оболочки объединения многогранников, если размерность n не фиксирована? Если **NP** ≠ P, то на этот вопрос следует ответить отрицательно, что показывает теорема 2.

Т е о р е м а 2. *Задача построения OC-выпуклой оболочки объединения многогранников в пространстве R^n является* **NP**-трудной, если n не фиксировано.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся тем фактом [6], что задача построения *OC*-выпуклой оболочки конечного множества точек **NP**-трудна. Так как точка представляет собой частный случай многогранника, то задача построения *OC*-выпуклой оболочки конечного множества точек сводится к задаче построения *OC*-выпуклой оболочки объединения многогранников. Следовательно, задача построения *OC*-выпуклой оболочки объединения многогранников также **NP**-трудна. Теорема доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция».

Литература

1. *Rawlins G., Wood D.* // Computational Morphology / ed. G. T. Toussaint. Amsterdam, 1988. P. 137–152.
2. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М., 1985.
3. *Метельский Н. Н., Мартынчик В. Н.* // Мат. заметки. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 406–413.
4. *Метельский Н. Н., Найденко В. Г.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 4. С. 47–52.
5. *Солтан В. П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев, 1984.
6. *Метельский Н. Н., Найденко В. Г.* // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 3. С. 399–410.

V. G. NAIDENKO

***OC*-CONVEX APPROXIMATION OF PARTIALLY CONVEX HULLS**

Summary

We investigate the *OC*-convexity defined by the intersections of conic semispaces of partial convexity. A polynomial time algorithm is developed to determine the *OC*-convex approximation of directional convex hull of a finite set of polytopes in case of the direction set being finite.