ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.954
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16

Поступила в редакцию 25.11.2019
Received 25.11.2019

А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь

ЗАДАЧА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ТИПА В R^3

Аннотация. Рассматривается класс эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$. В произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей для систем этого класса изучается вопрос регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта. По коэффициентам эллиптической системы и матрицы граничного оператора строится специальное векторное поле, невхождение которого в касательную плоскость в каждой точке границы области обеспечивает выполнимость условия Лопатинского регуляризуемости краевой задачи. Полученное условие позволяет доказать, что множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для рассматриваемого класса систем имеет две компоненты гомотопической связности, а также что индекс произвольной регуляризуемой задачи равен минус единице.

Ключевые слова: эллиптическая система, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского, гомотопическая классификация, индекс

Для цитирования. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16

Aliaxandr I. Basik, Evgenij V. Hrytsuk, Tatsiana A. Hrytsuk

Brest State A. S. Pushkin University, Brest, Belarus

THE RIEMANN – HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC SYSTEMS OF THE ORTHOGONAL TYPE IN R^3

Abstract. In this paper, a class of elliptic systems of four 1st order differential equations of the orthogonal type in $\mathbf{R}^3$ is considered. For such systems we study the issue of regularizability of the Riemann – Hilbert boundary value problem in an arbitrary limited simply-connected region with a smooth boundary in $\mathbf{R}^3$. Using the coefficients of the elliptic system and the matrix of the boundary operator, a special vector field is constructed, and its not entering the tangent plane in any point of the boundary provides the Lopatinski condition of the regularizability of the boundary value problem. The obtained condition permits to prove that the set of regularizable Riemann – Hilbert boundary value problems for the considered class of systems has two components of homotopic connectedness, and the index of an arbitrary regularizable problem equals to minus one.

Keywords: elliptic system, regularizable boundary value problem, Lopatinski condition, homotopic classification, index

For citation. Basik A. I., Hrytsuk E. V., Hrytsuk T. A. The Riemann – Hilbert boundary value problem for elliptic systems of the orthogonal type in $\mathbf{R}^3$. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 7–16 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-7-16

Введение. Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$, задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами

$$A_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+A_3\frac{\partial U}{\partial x_3}=0, \tag{1}$$

где $U=(U_1,U_2,U_3,U_4)^T$ – неизвестная вектор-функция, A_1, A_2 и A_3 – заданные матрицы размера 4×4 вида

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & a_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a_1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & a_2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & a_2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & a_3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & a_3 & 0\\ -1 & 0 & 0 & a_3\end{pmatrix},$$

a_1, a_2, a_3 – заданные действительные числа.

Эллиптичность системы (1) означает, что для каждого вектора $\xi\in\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$ ее характеристическая матрица-форма

$$A(\xi):=A_1\xi_1+A_2\xi_2+A_3\xi_3=\begin{pmatrix} \langle a;\xi\rangle & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\\ -\xi_1 & \langle a;\xi\rangle & -\xi_3 & \xi_2\\ -\xi_2 & \xi_3 & \langle a;\xi\rangle & -\xi_1\\ -\xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & \langle a;\xi\rangle\end{pmatrix}$$

является невырожденной, где $a=(a_1,a_2,a_3)$, $\langle x;y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$. Поскольку при всех $\xi\in\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$ выполняется неравенство

$$\det A(\xi)=\left(\langle a;\xi\rangle^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)^2>0,$$

то система (1) является эллиптической. Отметим, что для матрицы $A(\xi)$ выполняется равенство

$$A(\xi)A^T(\xi)=\left(\langle a;\xi\rangle^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)E.$$

Здесь T означает транспонирование, E – единичная матрица четвертого порядка.

Эллиптические системы, характеристическая матрица $A(\xi)$ которых имеет вид

$$A(\xi)=\begin{pmatrix} \langle a;\xi\rangle & \langle b;\xi\rangle & \langle c;\xi\rangle & \langle d;\xi\rangle\\ -\langle b;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle & -\langle d;\xi\rangle & \langle c;\xi\rangle\\ -\langle c;\xi\rangle & \langle d;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle & -\langle b;\xi\rangle\\ -\langle d;\xi\rangle & -\langle c;\xi\rangle & \langle b;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle\end{pmatrix},$$

где $a,b,c,d\in\mathbf{R}^3$, будем называть системами ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$. Таким образом (1) является системой ортогонального типа.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в области Ω и непрерывного по Гельдеру в $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y)=f(y)\quad(y\in\partial\Omega), \tag{2}$$

где B – заданная непрерывная по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4 вида

$$B(y)=\begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) & m_4(y) \\ n_1(y) & n_2(y) & n_3(y) & n_4(y) \end{pmatrix},$$

f – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция.

В настоящей статье проводится гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для класса эллиптических систем ортогонального типа четырех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными. Проблема гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач была сформулирована И. М. Гельфандом в 1960 г. и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [1]. (Напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского [2, 3].) Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, и по ней имеются лишь отдельные результаты. Отметим некоторые из них. В. И. Шевченко провел классификацию регуляризуемых задач Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску [4], А. Т. Усс – для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5]. В статье [6] проведена гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для класса эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$. Заметим, что частным случаем систем вида (1) является система Моисила – Теодореску, и рассматриваемый нами класс систем имеет непустое пересечение, но не совпадает ни с классом трехмерных аналогов системы Коши – Римана, ни с классом систем кососимметрического типа в $\mathbf{R}^3$.

Исследования проводятся методом, предложенным В. И. Шевченко [4]. Изложим кратко его суть. Для систем рассматриваемого класса доказывается критерий, позволяющий в явном виде описать условие регуляризуемости Лопатинского произвольной краевой задачи Римана – Гильберта в терминах матрицы граничного оператора и нормального вектора к граничной поверхности. Это условие обеспечивает нетеровость задачи в широком классе гильбертовых пространств [3]. Подобный критерий, как указывалось выше, был ранее получен В. И. Шевченко для системы Моисила – Теодореску [4] (см. также [7]), А. Т. Уссом – для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], а также для эллиптических кососимметрических систем [6]. Следует отметить, что для четырехмерных аналогов системы Коши – Римана [8] и псевдосимметрических эллиптических систем в $\mathbf{R}^4$ [9, 10] такого критерия не существует – в произвольной односвязной ограниченной области и для любого граничного оператора краевая задача для указанных систем не является регуляризуемой.

Доказываемый ниже критерий регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта позволяет провести гомотопию произвольной краевой задачи Римана – Гильберта для рассматриваемых систем в классе регуляризуемых краевых задач к простейшему виду и, тем самым, установить равенство индексов этих задач. Индекс регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску [4], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], а также для эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ [6] равен минус единице. В настоящей работе мы распространим этот результат на класс эллиптических систем (1) ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$.

Условие регуляризуемости. Задача (1), (2) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Лопатинского. Оно представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$B(y)\cdot\int_{\gamma} A^{-1}\big(\lambda\nu(y)+\tau(y)\big)d\lambda \tag{3}$$

является максимальным в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau=\tau(y)=\big(\tau_1(y),\tau_2(y),\tau_3(y)\big)$. Здесь через $\nu=\nu(y)=\big(\nu_1(y),\nu_2(y),\nu_3(y)\big)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, и интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости и охватывающему корень $\lambda_1=\alpha+i\beta$ $(\beta>0)$ уравнения $\det A\big(\lambda\nu(y)+\tau(y)\big)=0$.

Отметим, что для максимальности ранга матрицы (3) необходимо, чтобы $\operatorname{rank} B(y) = 2$ в каждой точке $y \in \partial\Omega$, что и предполагаем выполненным в дальнейшем.

Рассмотрим векторное поле

$$P(y) = L + \left[L; a\right] + a \cdot \left\langle L; a \right\rangle, \tag{4}$$

где $[x;y]$ – векторное произведение в $\mathbf{R}^3$, $L = (L_1, L_2, L_3)$ – вектор с компонентами

$$L_1 = \Lambda_{12} - \Lambda_{34}, \ \ L_2 = \Lambda_{13} + \Lambda_{24}, \ \ L_3 = \Lambda_{14} - \Lambda_{23},$$

Λ_{jk} – минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j-го и k-го столбцов (j, k = 1, 2, 3, 4).

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $y \in \partial\Omega$ *выполняется условие*

$$\left\langle \nu(y); P(y) \right\rangle \neq 0,$$

где ν – *единичное поле внутренних нормалей на поверхности* $\partial\Omega$.

Доказательство. Пусть H_{jk} – минор матрицы Лопатинского (3), составленный из ее j-го и k-го столбцов (j, k = 1, 2, 3, 4). Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{12} = -H_{34}, \quad H_{13} = H_{24}, \quad H_{14} = -H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя

$$H_{12} = L_1\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle^2 + \left(\lambda_1\nu_1 + \tau_1\right)^2\right) + L_2\left(-\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle\left(\lambda_1\nu_3 + \tau_3\right) + \left(\lambda_1\nu_1 + \tau_1\right)\left(\lambda_1\nu_2 + \tau_2\right)\right) +$$
$$+ L_3\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle\left(\lambda_1\nu_2 + \tau_2\right) + \left(\lambda_1\nu_1 + \tau_1\right)\left(\lambda_1\nu_3 + \tau_3\right)\right),$$
$$H_{13} = L_1\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle\left(\lambda_1\nu_3 + \tau_3\right) + \left(\lambda_1\nu_1 + \tau_1\right)\left(\lambda_1\nu_2 + \tau_2\right)\right) + L_2\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle^2 + \left(\lambda_1\nu_2 + \tau_2\right)^2\right) -$$
$$- L_3\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle\left(\lambda_1\nu_1 + \tau_1\right) - \left(\lambda_1\nu_2 + \tau_2\right)\left(\lambda_1\nu_3 + \tau_3\right)\right),$$
$$H_{14} = -L_1\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle\left(\lambda_1\nu_2 + \tau_2\right) - \left(\lambda_1\nu_1 + \tau_1\right)\left(\lambda_1\nu_3 + \tau_3\right)\right) +$$
$$+ L_2\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle\left(\lambda_1\nu_1 + \tau_1\right) + \left(\lambda_1\nu_2 + \tau_2\right)\left(\lambda_1\nu_3 + \tau_3\right)\right) + L_3\left(\left\langle a; \lambda_1\nu + \tau \right\rangle^2 + \left(\lambda_1\nu_3 + \tau_3\right)^2\right).$$

Заметим, что

$$\left(H_{12}\right)^2 + \left(H_{13}\right)^2 + \left(H_{14}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, сумма квадратов мнимых частей миноров H_{12}, H_{13} и H_{14} равна сумме квадратов их действительных частей. Поэтому задача (1), (2) регуляризуема тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left(\operatorname{Im} H_{12}\right)^2 + \left(\operatorname{Im} H_{13}\right)^2 + \left(\operatorname{Im} H_{14}\right)^2 > 0.$$

Представим мнимые части миноров H_{12}, H_{13} и H_{14} в виде

$$\operatorname{Im} H_{12} = A_1R_1 - B_1R_0 + C_1R_3 - D_1R_2,$$
$$\operatorname{Im} H_{13} = A_1R_2 - B_1R_3 - C_1R_0 + D_1R_1,$$
$$\operatorname{Im} H_{14} = A_1R_3 + B_1R_2 - C_1R_1 - D_1R_0,$$

где

$$A_1 = \frac{\left\langle a; \tau \right\rangle}{1 + \left\langle a; \nu \right\rangle^2}, \quad A_2 = \beta\left\langle a; \nu \right\rangle, \tag{5}$$

$$B_1 = \frac{\left(1 + \langle a; \nu\rangle^2 - a_1\nu_1\langle a; \nu\rangle\right)\tau_1 - a_2\nu_1\langle a; \nu\rangle\tau_2 - a_3\nu_1\langle a; \nu\rangle\tau_3}{1 + \langle a; \nu\rangle^2}, \quad B_2 = \beta\nu_1, \tag{6}$$

$$C_1 = \frac{-a_1\nu_2\langle a; \nu\rangle\tau_1 + \left(1 + \langle a; \nu\rangle^2 - a_2\nu_2\langle a; \nu\rangle\right)\tau_2 - a_3\nu_2\langle a; \nu\rangle\tau_3}{1 + \langle a; \nu\rangle^2}, \quad C_2 = \beta\nu_2, \tag{7}$$

$$D_1 = \frac{-a_1\nu_3\langle a; \nu\rangle\tau_1 - a_2\nu_3\langle a; \nu\rangle\tau_2 + \left(1 + \langle a; \nu\rangle^2 - a_3\nu_3\langle a; \nu\rangle\right)\tau_3}{1 + \langle a; \nu\rangle^2}, \quad D_2 = \beta\nu_3, \tag{8}$$

$$R_0 = \left(-L_1\nu_1 - L_2\nu_2 - L_3\nu_3\right)\beta, \quad R_1 = \left(L_1\langle a; \nu\rangle - L_2\nu_3 + L_3\nu_2\right)\beta, \tag{9}$$

$$R_2 = \left(L_1\nu_3 + L_2\langle a; \nu\rangle - L_3\nu_1\right)\beta, \quad R_3 = \left(-L_1\nu_2 + L_2\nu_1 + L_3\langle a; \nu\rangle\right)\beta. \tag{10}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\left(\operatorname{Im} H_{12}\right)^2 + \left(\operatorname{Im} H_{13}\right)^2 + \left(\operatorname{Im} H_{14}\right)^2 = \\ = \left(R_0^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2\right)\left(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2\right) - \left(A_1R_0 + B_1R_1 + C_1R_2 + D_1R_3\right)^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Случай $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 = 0$ не возможен, так как из явного вида формул (5)–(8) получаем, что $\tau = 0$. Тогда, в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца, равенство нулю в неравенстве (11) имеет место тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $\tau \in T_y\partial\Omega$, являющийся решением системы линейных (по координатам вектора τ) уравнений

$$\begin{cases} \langle a; \tau\rangle = \mu\left(1 + \langle a; \nu\rangle^2\right)R_0, \\ \left(1 + \langle a; \nu\rangle^2 - a_1\nu_1\langle a; \nu\rangle\right)\tau_1 - a_2\nu_1\langle a; \nu\rangle\tau_2 - a_3\nu_1\langle a; \nu\rangle\tau_3 = \mu\left(1 + \langle a; \nu\rangle^2\right)R_1, \\ -a_1\nu_2\langle a; \nu\rangle\tau_1 + \left(1 + \langle a; \nu\rangle^2 - a_2\nu_2\langle a; \nu\rangle\right)\tau_2 - a_3\nu_2\langle a; \nu\rangle\tau_3 = \mu\left(1 + \langle a; \nu\rangle^2\right)R_2, \\ -a_1\nu_3\langle a; \nu\rangle\tau_1 - a_2\nu_3\langle a; \nu\rangle\tau_2 + \left(1 + \langle a; \nu\rangle^2 - a_3\nu_3\langle a; \nu\rangle\right)\tau_3 = \mu\left(1 + \langle a; \nu\rangle^2\right)R_3, \end{cases} \tag{12}$$

где $\mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Единственным решением подсистемы, состоящей из второго, третьего и четвертого уравнений системы (12), является вектор τ с координатами

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mu\left(R_1 + \nu_1\langle a; \nu\rangle\left(a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3\right)\right), \\ \tau_2 &= \mu\left(R_2 + \nu_2\langle a; \nu\rangle\left(a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3\right)\right), \\ \tau_3 &= \mu\left(R_3 + \nu_3\langle a; \nu\rangle\left(a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3\right)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Решение (13) удовлетворяет первому уравнению системы (12) при дополнительном условии

$$a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3 = R_0. \tag{14}$$

Покажем, что вектор τ не может быть нулевым. Предположим противное, т. е. пусть в формуле (13) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$, с учетом условия (14) получаем равенство

$$\langle a; \tau\rangle = \left(1 + \langle a; \nu\rangle^2\right)R_0 = 0,$$

значит, $R_0 = 0$. Из формул (13) с учетом условия (14) получаем $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Из формул (12) получаем $A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = 0$, что невозможно. Таким образом, $\tau \neq 0$, и с учетом формул (9) и (10) убеждаемся, что $\tau \in T_y\partial\Omega$.

Подставим в формулу (14) значения $R_j, j = 0,1,2,3$, предварительно разделив обе части условия (14) на $\beta > 0$, и получим условие

$$\begin{gathered}\nu_1\left(L_1\left(1+a_1^2\right)+L_2\left(a_1a_2+a_3\right)+L_3\left(a_1a_3-a_2\right)\right)+\\+\nu_2\left(L_1\left(a_1a_2-a_3\right)+L_2\left(1+a_2^2\right)+L_3\left(a_2a_3+a_1\right)\right)+\\+\nu_3\left(L_1\left(a_1a_3+a_2\right)+L_2\left(a_2a_3-a_1\right)+L_3\left(1+a_3^2\right)\right)=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Учитывая обозначения (4), равенство (15) запишем в виде

$$\langle \nu(y); P(y)\rangle = 0. \tag{16}$$

Таким образом, $\left(\operatorname{Im} H_{12}\right)^2+\left(\operatorname{Im} H_{13}\right)^2+\left(\operatorname{Im} H_{14}\right)^2=0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (16). Теорема 1 доказана.

Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач. Напомним, что две регуляризуемые задачи Римана – Гильберта называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского. При этом предполагается, что деформация сохраняет гладкость (непрерывность по Гельдеру) коэффициентов этих задач.

Через $\mathfrak{I}$ обозначим множество всех регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта (1), (2); $\mathfrak{I}_+$ – множество регуляризуемых задач Римана – Гильберта (1), (2), для которых выполняется неравенство $\langle \nu(y); P(y)\rangle > 0$ всюду на $\partial\Omega$; $\mathfrak{I}_-$ − множество регуляризуемых задач, для которых $\langle \nu(y); P(y)\rangle < 0$ всюду на $\partial\Omega$.

Теорема 2. *Множество $\mathfrak{I}$ регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ имеет две компоненты гомотопической связности $\mathfrak{I}_+$, $\mathfrak{I}_-$. Гомотопическим инвариантом является знак скалярного произведения. Индекс произвольной задачи из $\mathfrak{I}$ равен минус единице.*

Доказательство. В силу непрерывности векторного поля $P(y)$ и связности поверхности $\partial\Omega$ скалярное произведение $\langle \nu(y); P(y)\rangle$ сохраняет знак на $\partial\Omega$, и, следовательно, задачи, для которых соответствующие скалярные произведения имеют разные знаки, не гомотопны. Таким образом, достаточно установить гомотопическую связность множеств $\mathfrak{I}_+$, $\mathfrak{I}_-$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{I}_+$. Так как $\operatorname{rank} B(y) = 2$ в каждой точке $y \in \partial\Omega$, то на поверхности $\partial\Omega$ первая строка

$$m(y) := \left(m_1(y), m_2(y), m_3(y), m_4(y)\right)$$

матрицы $B(y)$ не обращается в нуль. Поэтому существует [11] непрерывное отображение $M: \partial\Omega\times[0;1] \to \mathbf{R}^4\setminus\{0\}$, такое что при каждом $y \in \partial\Omega$

$$M(y,0) = m(y), \quad M(y,\ 1) = (1,\ 0,\ 0,\ 0),$$

и при каждом $t \in [0; 1]$ вектор-функция $M(\ \cdot\ , t)$ непрерывна по Гельдеру на $\partial\Omega$.

Проведем гомотопию матрицы граничного оператора задачи (1), (2). Для этого рассмотрим линейную систему уравнений относительно неизвестной строки $N = \left(N_1(y,t), N_2(y,t), N_3(y,t), N_4(y,t)\right)$:

$$\Xi(y,t)N^T(y,t) = \tilde{P}(y,t) \tag{17}$$

где матрица $\Xi(y,t)$ имеет вид (для упрощения записей точка $(y,t)\in\partial\Omega\times[0;1]$, в которой вычисляются элементы матрицы, не указывается):

$$\Xi = \sum_{j=1}^{4} M_j \Xi_j,$$

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2+a_3 & a_1a_3-a_2 \\ 0 & a_1a_2-a_3 & 1+a_2^2 & a_2a_3+a_1 \\ 0 & a_1a_3+a_2 & a_2a_3-a_1 & 1+a_3^2 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1-a_1^2 & 0 & -a_1a_3+a_2 & a_1a_2+a_3 \\ -a_1a_2+a_3 & 0 & -a_2a_3-a_1 & 1+a_2^2 \\ -a_1a_3-a_2 & 0 & -1-a_3^2 & a_2a_3-a_1 \end{pmatrix},$$

$$\Xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1a_2-a_3 & a_1a_3-a_2 & 0 & -1-a_1^2 \\ -1-a_2^2 & a_2a_3+a_1 & 0 & -a_1a_2+a_3 \\ -a_2a_3+a_1 & 1+a_3^2 & 0 & -a_1a_3-a_2 \end{pmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1a_3+a_2 & -a_1a_2-a_3 & 1+a_1^2 & 0 \\ -a_2a_3-a_1 & -1-a_2^2 & a_1a_2-a_3 & 0 \\ -1-a_3^2 & -a_2a_3+a_1 & a_1a_3+a_2 & 0 \end{pmatrix},$$

а правая часть системы (17):

$$\tilde{P}(y,t) = \begin{pmatrix} t\big(m_1(y)n_1(y)+m_2(y)n_2(y)+m_3(y)n_3(y)+m_4(y)n_4(y)\big) \\ (1-t)P_1(y)+t\nu_1(y) \\ (1-t)P_2(y)+t\nu_2(y) \\ (1-t)P_3(y)+t\nu_3(y) \end{pmatrix}.$$

Так как в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом $t \in [0;\ 1]$

$$\det\Xi(y,t) = \left(1+a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2 \left(M_1^2+M_2^2+M_3^2+M_4^2\right)^2 \neq 0,$$

то система (17) однозначно разрешима, при этом отображение $N:\partial\Omega\times[0;1]\to\mathbf{R}^4$ непрерывно и, как нетрудно видеть, при каждом фиксированном $t \in [0;\ 1]$ непрерывно по Гельдеру на $\partial\Omega$. При $t = 0$ решением системы (17) является вторая строка матрицы $B(y)$.

Рассмотрим гомотопию задачи (1), (2), при которой система (1) остается неизменной, а матрица соответствующего этой системе граничного условия

$$B(y,t)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega) \tag{18}$$

имеет вид

$$B(y,t) = \begin{pmatrix} M_1(y,t) & M_2(y,t) & M_3(y,t) & M_4(y,t) \\ N_1(y,t) & N_2(y,t) & N_3(y,t) & N_4(y,t) \end{pmatrix}.$$

Так как векторное поле $P(y,t)$, отвечающее задаче (1), (18), имеет вид

$$P(y,t) = (1-t)P(y)+t\nu(y),$$

то

$$\big\langle \nu(y); P(y,t)\big\rangle = (1-t)\big\langle \nu(y); P(y)\big\rangle + t > 0$$

при всех $y \in \partial\Omega$ и любом $t \in [0;\ 1]$. Следовательно, задача (1), (2) в классе регуляризуемых краевых задач гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием ($y \in \partial\Omega$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\nu_1-a_3\nu_2+a_2\nu_3}{1+|a|^2} & \dfrac{\nu_2-a_1\nu_3+a_3\nu_1}{1+|a|^2} & \dfrac{\nu_3-a_2\nu_1+a_1\nu_2}{1+|a|^2} \end{pmatrix} U(y) = f(y). \tag{19}$$

Отметим, что для любых действительных чисел a_1, a_2 и a_3 задача (1), (19) регуляризуема $\left(|a|^2=\langle a;a\rangle\right)$. Поэтому, если указанные параметры заменить на значения непрерывных функций

$$a_1(t)=(1-t)a_1,\quad a_2(t)=(1-t)a_2,\quad a_3(t)=(1-t)a_3,$$

то мы получим гомотопию задачи (1), (19) задаче

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}=0,\\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}-\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_4}{\partial x_2}=0,\\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}=0,\\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}=0\end{cases}\quad (x\in\Omega), \tag{20}$$

$$\begin{cases}u_1\big|_{\partial\Omega}=f_1(y),\\ (u_2\nu_1+u_3\nu_2+u_4\nu_3)\big|_{\partial\Omega}=f_2(y)\end{cases}\quad (y\in\partial\Omega). \tag{21}$$

Таким образом, произвольная задача из $\Im_+$ гомотопна задаче (20), (21), и тем самым гомотопическая связность множества $\Im_+$ доказана.

Поскольку индексы гомотопных регуляризуемых задач равны, то для вычисления индекса произвольной задачи из множества $\Im_+$ достаточно вычислить индекс задачи (20), (21). Заменой $V=(u_2,u_3,u_4)$ и $W=u_1$ задача (20), (21) приводится к виду

$$\operatorname{div} V(x)=0,\quad \operatorname{rot} V(x)=\operatorname{grad} W(x)\quad (x\in\Omega), \tag{22}$$

$$W\big|_{\partial\Omega}=f_1(y),\quad \langle V;\nu\rangle\big|_{\partial\Omega}=f_2(y)\quad (y\in\partial\Omega). \tag{23}$$

Индекс последней задачи вычислен в работе [11] и равен минус единице.

Аналогично доказывается, что каждая задача из множества $\Im_-$ гомотопна задаче для системы (20) с граничным условием

$$\begin{cases}u_1\big|_{\partial\Omega}=f_1(y),\\ (-u_2\nu_1-u_3\nu_2-u_4\nu_3)\big|_{\partial\Omega}=f_2(y)\end{cases}\quad (y\in\partial\Omega). \tag{24}$$

Отметим основные отличия доказательства. При гомотопии матрицы граничного оператора задачи (1), (2) правая часть системы (17) имеет вид

$$\tilde{P}(y,t)=\begin{pmatrix}t\left(m_1(y)n_1(y)+m_2(y)n_2(y)+m_3(y)n_3(y)+m_4(y)n_4(y)\right)\\ (1-t)P_1(y)-t\nu_1(y)\\ (1-t)P_2(y)-t\nu_2(y)\\ (1-t)P_3(y)-t\nu_3(y)\end{pmatrix}.$$

Тогда неравенство

$$\langle\nu(y);P(y,t)\rangle=(1-t)\langle\nu(y);P(y)\rangle-t<0$$

выполняется при всех $y\in\partial\Omega$ и любом $t\in[0;1]$ и полученная задача гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\nu_1 - a_3\nu_2 + a_2\nu_3}{1+|a|^2} & -\dfrac{\nu_2 - a_1\nu_3 + a_3\nu_1}{1+|a|^2} & -\dfrac{\nu_3 - a_2\nu_1 + a_1\nu_2}{1+|a|^2} \end{pmatrix} U(y) = f(y).$$

Далее, заменой $V = (u_2, u_3, u_4)$ и $W = u_1$ задача (20), (24) приводится к виду (22) с граничными условиями

$$W\big|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad \langle V;\nu\rangle\big|_{\partial\Omega} = -f_2(y) \quad (y \in \partial\Omega), \tag{25}$$

индекс которой, как отмечалось выше, равен минус единице. Теорема 2 доказана.

Заключение. В статье в терминах матрицы граничного оператора и коэффициентов системы описано условие Лопатинского регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта для класса эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$. Полученное условие состоит в том, что регуляризуемость задачи равносильна тому, что некоторое специальное векторное поле не касается границы области ни в одной точке. Выполнение этого условия обеспечивает нетеровость краевой задачи как в классической постановке, так и в широкой шкале гильбертовых пространств. Полученное условие регуляризуемости позволяет провести гомотопическую классификацию множества $\mathfrak{I}$ регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для рассматриваемого класса систем:

– доказать, что $\mathfrak{I}$ имеет две компоненты гомотопической связности;

– для каждой компоненты указать представителя;

– вычислить индекс произвольной задачи из множества $\mathfrak{I}$.

Отметим, что индекс задачи, являясь гомотопическим инвариантом, в рассматриваемом случае не различает компоненты гомотопической связности множества $\mathfrak{I}$.

Список использованных источников

1. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

2. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.

3. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

4. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика: Респ. межвед. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

5. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

6. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології: зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

7. Полунин, В. А. Об условии Шапиро – Лопатинского в задаче Римана – Гильберта для эллиптической системы первого порядка / В. А. Полунин, А. П. Солдатов // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. – 2010. – № 17 (88), вып. 20. – С. 91–99.

8. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.

9. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.

10. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

11. Шевченко, В. И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика: Респ. межвед. сб. – Киев, 1970. – Вып. 8. – С. 172–186.

References

1. Gel’fand I. M. About elliptic equation. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 3, pp. 121–132 (in Russian).

2. Lopatinskii Ya. B. About one way of carrying out boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 1953, vol. 5, pp. 123–151.

3. Agranovich M. S. Elliptic Singular Integro-Differential Operators. *Russian Mathematical Surveys*, 1965, vol. 20, no. 5, pp. 1–121. https://doi.org/10.1070/rm1965v020n05abeh001190

4. Shevchenko V. I. The Homotopy Classification of Riemann – Gilbert problem for Holomorphic Vector. *Matematicheskaya fizika: Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik* [Mathematical Physics: Republican Interdepartmental Book of Articles]. Kiev, 1975, iss. 17, pp. 184–186 (in Russian).

5. Uss A. T. Riemann-Hilbert boundary value problems for Cauchy-Riemann's analog in $\mathbf{R}^3$. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2003, vol. 47, no. 6, pp. 10–15 (in Russian).

6. Basik A. I., Gricyk E. V. The homotopic classification of regularizable Riemann-Hilbert boundary value problems for one class of elliptic systems in $\mathbf{R}^3$. *Matematika. Informatsiini tekhnologiї: Zbirnik statej = Mathematics. Information Technologies: Book of Articles*. Luc'k, 2019, no. 6, pp. 12–18 (in Russian).

7. Polunin V. A., Soldatov A. P. About the Shapiro – Lopatinskii condition in the Riemann – Gilbert problem of the first order elliptic system. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika = Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2010, no. 17 (88), iss. 20, pp. 91–99 (in Russian).

8. Uss A. T. The Homotopy Classification of Four-Dimensional Analogs of the Cauchy – Riemann System with Real Coefficients. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2003, vol. 47, no. 4, pp. 5–9 (in Russian).

9. Vinogradov V. S. Boundary Value Problem for Pseudosymmetric Systems. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 161–163 (in Russian).

10. Basik A. I., Uss A. T. On Boundary Value Problems for First-Order Elliptic Pseudosymmetric Systems in $\mathbf{R}^4$. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*, 2003, vol. 38, no. 3, pp. 410–412 (in Russian).

11. Shevchenko V. I. On some Boundary Value Problems for Holomorphic Vector. *Matematicheskaya fizika: Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik* [Mathematical Physics: Republican Interdepartmental Book of Articles]. Kiev, 1970, iss. 8, pp. 172–186 (in Russian).

Информация об авторах

Басик Александр Иванович – кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: alex-basik@yandex.ru

Грицук Евгений Васильевич – кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: gricuk_e@tut.by

Грицук Татьяна Алексеевна – магистрант, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: gritsuk_tanya@mail.ru

Information about the authors

Aliaxandr I. Basik – Ph. D. (Physics and Mathematics), Brest State A. S. Pushkin University (21, Kosmonavtov Boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: alex-basik@yandex.ru

Evgenij V. Hrytsuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Brest State A. S. Pushkin University (21, Kosmonavtov Boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: gricuk_e@tut.by

Tatsiana A. Hrytsuk – Undergraduate Student, Brest State A. S. Pushkin University (21, Kosmonavtov Boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: gritsuk_tanya@mail.ru