ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.968.7
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

Поступила в редакцию 26.12.2019
Received 26.12.2019

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРОВА ТИПА

Аннотация. Изучено линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару. Коэффициенты уравнения имеют частную структуру. Применяется метод аналитического продолжения. Уравнение сводится к краевой задаче линейного сопряжения для аналитических функций и линейным дифференциальным уравнениям Эйлера в областях комплексной плоскости. Ищутся решения уравнений Эйлера, являющиеся однозначными аналитическими функциями. Приводятся в явном виде условия разрешимости исходного уравнения. Решение исходного уравнения, которое получается при выполнении этих условий, также приводится в явном виде. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярные интегралы, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, дифференциальные уравнения Эйлера

Для цитирования. Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

Andrey P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus

A HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE EULER TYPE

Abstract. In this paper, we study an integro-differential equation on a closed curve located on the complex plane. The integrals included in the equation are understood as a finite part by Hadamard. The coefficients of the equation have a particular structure. The analytical continuation method is applied. The equation is reduced to a boundary value linear conjugation problem for analytic functions and linear Euler differential equations in the domains of the complex plane. Solutions of the Euler equations, which are unambiguous analytical functions, are sought. The conditions of solvability of the initial equation are given explicitly. The solution of the initial equation obtained under these conditions is also given explicitly. Examples are considered.

Keywords: integro-differential equation, hypersingular integrals, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, Euler differential equations

For citation. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation of the Euler type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 17–29 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

Введение. В гиперсингулярных интегральных уравнениях интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару [1]. Теория таких уравнений не имеет завершенного вида, основные методы их решения – численные. Выделим работу [2], в которой отмечены приложения гиперсингулярных интегральных уравнений к аэродинамике, электродинамике, квантовой физике, геофизике и разработан метод аналитического решения одного класса таких уравнений.

В [3] на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости, указано и конструктивно решено более общее гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Подобные интегро-дифференциальные уравнения с разными случаями переменных коэффициентов изучались затем в [4–6] и продолжают изучаться в настоящей работе.

Постановка задачи и общая схема решения. Пусть L – простая замкнутая гладкая кривая на расширенной комплексной плоскости, и пусть $D_\pm$ – области с границей L, $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Выберем на кривой L ту ориентацию, которая оставляет область D_+ слева.

Зададим H-непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $f(t)$, $t \in L$. Зададим также целые числа a_k, b_k, $k = \overline{0,n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $a_n = b_n = 1$. Будем искать на кривой L n раз H-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \left(\left(a(t)a_k + b(t)b_k\right) \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!\left(a(t)a_k - b(t)b_k\right)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right) = f\left(t\right), \ t \in L, \tag{1}$$

с интегралами в смысле конечной части по Адамару.

Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Используя для предельных значений аналитических функций $\Phi_{\pm}(z)$ и их производных обобщенные формулы Сохоцкого [7]

$$\begin{cases} \Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_-^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}\left(t\right), \\ \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_-^{(k)}(t) = \dfrac{k!}{\pi i} \displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad t \in L, \quad k = \overline{0,n}, \end{cases}$$

сведем уравнение (1) к краевой задаче линейного сопряжения

$$2a(t) \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \Phi_+^{(k)}(t) = 2b(t) \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \Phi_-^{(k)}(t) + f(t), \quad t \in L. \tag{2}$$

Введем аналитические функции

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \Phi_+^{(k)}(z), \quad z \in D_+, \tag{3}$$

$$F_-(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \Phi_-^{(k)}(z), \quad z \in D_-, \tag{4}$$

с H-непрерывными предельными значениями $F_{\pm}(t)$, $t \in L$, и получим из (2) краевую задачу Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L. \tag{5}$$

Поскольку функция $\Phi_-(z)$ представима интегралом типа Коши, то

$$\Phi_-\left(z\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to \infty.$$

Тогда, очевидно,

$$b_k z^k \Phi_-^{(k)}(z) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to \infty, \quad k = \overline{0,n}.$$

Теперь из равенства (4) усматриваем, что и

$$F_-(z) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to \infty,$$

т. е. задачу (5) следует решать в классе функций, исчезающих на бесконечности.

Если задача Римана (5) окажется разрешимой и функции $F_{\pm}(z)$ будут найдены, то равенства (3), (4) станут линейными дифференциальными уравнениями Эйлера для нахождения функций $\Phi_{\pm}(z)$. Решив эти уравнения, по формуле

$$\varphi(t) = \Phi_{+}(t) - \Phi_{-}(t), \quad t \in L, \tag{6}$$

получим решение исходного уравнения (1).

Очевидно, что функции $\Phi_{\pm}(z)$ были введены как однозначные в соответствующих областях $D_{\pm}$. Для уравнений же Эйлера (3), (4) типичной является ситуация, когда их решения являются многозначными функциями. Желая в последующем устранить эту многозначность, наложим дальнейшие ограничения на числа a_k, b_k, $k = \overline{0, n-1}$. Будем далее предполагать, что как корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ определяющего уравнения $a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \lambda(\lambda-1)\ldots$ $(\lambda - n + 1) = 0$, соответствующего уравнению (3), так и корни $l_1, l_2, \ldots, l_n$ определяющего уравнения $b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{n-1}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) = 0$, соответствующего уравнению (4), являются целыми и однократными. Фундаментальную систему решений уравнений (3) и (4) составят степенные функции с целыми показателями соответственно $z^{k_1}, z^{k_2}, \ldots, z^{k_n}$ и $z^{l_1}, z^{l_2}, \ldots, z^{l_n}$.

Вспомогательные факты. 1. Пусть $æ = \operatorname{Ind}_L \dfrac{b(t)}{a(t)}$. Согласно [8] при $æ \geq 0$ задача Римана (5) разрешима безусловно, а при $æ < 0$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_{+}(\tau)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -æ - 1. \tag{7}$$

Решение задачи (5), если оно существует, записывается в виде

$$F_{\pm}(z) = X_{\pm}(z)\left(\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{æ-1} z^{æ-1} + \Psi_{\pm}(z)\right), \quad z \in D_{\pm}. \tag{8}$$

Здесь $X_{\pm}(z)$ – канонические функции задачи, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{æ-1}$ – произвольные постоянные при $æ > 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{æ-1} = 0$ при $æ \leq 0$,

$$\Psi_{\pm}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_{+}(\tau)(\tau - z)}.$$

2. Лемма. *Вронскиан $W^{+}(z)$ функций $z^{k_1}, z^{k_2}, \ldots, z^{k_n}$ равен Az^k, где $k = \sum_{j=1}^{n} k_j - \dfrac{(n-1)n}{2}$, а A – ненулевая постоянная, равная значению определителя Вандермонда чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$.*

Доказательство. Вынесем за знак определителя

$$W^{+}(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} z^{k_1} & z^{k_2} & \ldots & z^{k_n} \\ k_1 z^{k_1-1} & k_2 z^{k_2-1} & \ldots & k_n z^{k_n-1} \\ k_1(k_1-1)z^{k_1-2} & k_2(k_2-1)z^{k_2-2} & \ldots & k_n(k_n-1)z^{k_n-2} \\ k_1(k_1-1)(k_1-2)z^{k_1-3} & k_2(k_2-1)(k_2-2)z^{k_2-3} & \ldots & k_n(k_n-1)(k_n-2)z^{k_n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1(k_1-1)\ldots(k_1-n+2)z^{k_1-n+1} & k_2(k_2-1)\ldots(k_2-n+2)z^{k_2-n+1} & \ldots & k_n(k_n-1)\ldots(k_n-n+2)z^{k_n-n+1} \end{vmatrix}$$

вначале множители z^{k_j-n+1} из j-го столбца, а затем множители z^{n-j} из j-й строки, $j = \overline{1, n}$. Вынесенные множители дадут z в степени

$$\sum_{j=1}^{n}(k_j-n+1)+\sum_{j=1}^{n}(n-j)=\sum_{j=1}^{n}(k_j+1-j)=\sum_{j=1}^{n}k_j-\frac{n(n-1)}{2}=k.$$

В элементах оставшегося определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1(k_1-1) & k_2(k_2-1) & \ldots & k_n(k_n-1) \\ k_1(k_1-1)(k_1-2) & k_2(k_2-1)(k_2-2) & \ldots & k_n(k_n-1)(k_n-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1(k_1-1)\ldots(k_1-n+2) & k_2(k_2-1)\ldots(k_2-n+2) & \ldots & k_n(k_n-1)\ldots(k_n-n+2) \end{vmatrix}$$

выполним умножение и приведем подобные члены. Тогда определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2-k_1 & k_2^2-k_2 & \ldots & k_n^2-k_n \\ k_1^3-3k_1^2+2k_1 & k_2^3-3k_2^2+2k_2 & \ldots & k_n^3-3k_n^2+2k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1}+\ldots+(-1)^n(n-2)!k_1 & k_2^{n-1}+\ldots+(-1)^n(n-2)!k_2 & \ldots & k_n^{n-1}+\ldots+(-1)^n(n-2)!k_n \end{vmatrix}.$$

Последний определитель представим в виде надлежащей суммы таких определителей, элементами которых будут отдельные слагаемые строк. Ненулевым в этой сумме будет лишь определитель, являющийся определителем Вандермонда чисел $k_1,k_2,...,k_n$. Остальные определители окажутся равными нулю из-за пропорциональности элементов каких-либо строк. Лемма доказана.

Обозначим через $W_j^+(z)$ вронскиан функций $z^{k_1},z^{k_2},\ldots,z^{k_{j-1}},z^{k_{j+1}},\ldots,z^{k_n}$, $j=\overline{1,n}$ (полагаем $W_1^+(z)=1$, если n = 1). Согласно лемме $W_j^+(z)=A_jz^{k_j^+}$, где

$$k_j^+=\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}k_m-\frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

а ненулевые постоянные A_j, $j=\overline{1,n}$, находятся вполне аналогично нахождению постоянной A.

Решение уравнений Эйлера. Применим к уравнению (3) метод вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу, решение уравнения (3) записывается в виде

$$\Phi_+(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(\widetilde{C}_j(z)+C_j\right)z^{k_j},\quad z\in D_+, \tag{9}$$

где C_j – произвольные постоянные, а функции $\widetilde{C}_j(z)$ восстанавливаются как какие-либо первообразные по своим производным $\widetilde{C}_j{}'(z)$, $j=\overline{1,n}$, производные же находятся из системы

$$\begin{cases} \widetilde{C}_1{}'(z)z^{k_1}+\ldots+\widetilde{C}_n{}'(z)z^{k_n}=0, \\ \widetilde{C}_1{}'(z)k_1z^{k_1-1}+\ldots+\widetilde{C}_n{}'(z)k_nz^{k_n-1}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \widetilde{C}_1{}'(z)k_1(k_1-1)\ldots(k_1-n+3)z^{k_1-n+2}+\ldots+\widetilde{C}_n{}'(z)k_n(k_n-1)\ldots(k_n-n+3)z^{k_n-n+2}=0, \\ \widetilde{C}_1{}'(z)k_1\left(k_1-1\right)\ldots(k_1-n+2)z^{k_1-n+1}+\ldots+\widetilde{C}_n{}'(z)k_n(k_n-1)\ldots(k_n-n+2)z^{k_n-n+1}=\dfrac{F_+(z)}{z^n}. \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера и используя лемму, получим

$$\widetilde{C}_j{}'(z)=\frac{(-1)^{n+j}W_j^{+}(z)F_{+}(z)}{W^{+}(z)z^{n}}=\frac{(-1)^{n+j}A_j z^{k_j^{+}}F_{+}(z)}{Az^{k}z^{n}}=\frac{(-1)^{n+j}A_jF_{+}(z)}{Az^{n+k-k_j^{+}}},\quad j=\overline{1,n}.$$

Поскольку

$$n+k-k_j^{+}=n+\sum_{m=1}^{n}k_m-\frac{n(n-1)}{2}-\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}k_m+\frac{(n-2)(n-1)}{2}=k_j+1,$$

то окончательно получаем

$$\widetilde{C}_j{}'(z)=\frac{(-1)^{n+j}A_jF_{+}(z)}{Az^{k_j+1}},\quad j=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Формула (9), вообще говоря, не дает однозначную аналитическую в области D_{+} функцию из-за возможной особенности в точке $z = 0$, где может оказаться полюс либо точка ветвления. Для дальнейших рассуждений будем считать, что среди чисел k_j есть β неотрицательных и $n-\beta$ отрицательных. Случаи $\beta = 0$, $\beta = n$ не исключаются и означают отсутствие соответствующей совокупности чисел. Для определенности будем считать, что $k_1\geq 0,\ k_2\geq 0,\dots,k_\beta\geq 0,\ k_{\beta+1}<0,\ k_{\beta+2}<0,\dots,k_n<0.$

Если $j=\overline{\beta+1,n}$, то функции $\widetilde{C}_j{}'(z)$, найденные по формуле (10), будут аналитическими в области D_{+}, поэтому можно взять

$$\widetilde{C}_j(z)=\frac{(-1)^{n+j}A_j}{A}\int_0^z\frac{F_{+}(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k_j+1}}, \tag{11}$$

а соответствующие постоянные C_j следует положить равными нулю, чтобы формула (9) не приводила к полюсу в точке $z = 0$.

Для $j=\overline{1,\beta}$ обозначим

$$H_j(z)=\frac{c_{-k_j-1,j}}{z^{k_j+1}}+\frac{c_{-k_j,j}}{z^{k_j}}+\ldots+\frac{c_{-1,j}}{z}$$

главные части разложений функций $\widetilde{C}_j{}'(z)$ в ряды Лорана в окрестности точки $z = 0$. Необходимыми условиями существования первообразных у функций $\widetilde{C}_j{}'(z)$ являются условия

$$c_{-1,j}=0,\quad j=\overline{1,\beta}. \tag{12}$$

Если эти условия выполнены, то в качестве таких первообразных можно взять функции

$$\widetilde{C}_j(z)=-\frac{c_{-k_j-1,j}}{k_jz^{k_j}}-\frac{c_{-k_j,j}}{(k_j-1)z^{k_j-1}}-\ldots-\frac{c_{-2,j}}{z}+$$
$$+\int_0^z\left(\frac{(-1)^{n+j}A_jF_{+}(\zeta)}{A\zeta^{k_j+1}}-H_j(\zeta)\right)d\zeta,\quad j=\overline{1,\beta}. \tag{13}$$

(В случае, когда $k_j = 0$ для некоторого j, в правой части формулы (13) внеинтегральные слагаемые будут отсутствовать.)

Несмотря на наличие у функций $\widetilde{C}_j(z)$, записанных по формуле (13), полюсов в точке $z = 0$ (порядка не выше k_j), формула (9) приведет к аналитической функции $\Phi_{+}(z)$ за счет наличия в ней соответствующих множителей z^{k_j}, $j=\overline{1,\beta}$.

Вернемся к равенствам (12). Из формул (11) легко усматривается, что эти равенства могут быть представлены в виде

$$F_+^{(k_j)}(0) = 0, \quad j = \overline{1,\beta}. \tag{14}$$

Если $æ > 0$, то согласно формулам (8) в решение

$$F_+(z) = X_+(z)\left(\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{æ-1} z^{æ-1} + \Psi_+(z)\right)$$

задачи Римана (5) входят произвольные постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{æ-1}$. Разложим функции $X_+(z)$ и $X_+(z)\Psi_+(z)$ в ряды Маклорена:

$$X_+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j z^j, \quad X_+(z)\Psi_+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j.$$

Не будем приводить известные формулы для коэффициентов χ_j и ψ_j таких разложений. Важно только отметить, что эти коэффициенты будут выражаться в конечном счете через заданные в уравнении (1) функции. Тогда условия (14) в развернутом виде будут представлять собой требование совместности системы линейных алгебраических уравнений

$$\chi_{k_j}\alpha_0 + \chi_{k_j-1}\alpha_1 + \ldots + \chi_{k_j-n+1}\alpha_{æ-1} + \psi_{k_j} = 0, \quad j = \overline{1,\beta}, \tag{15}$$

($\chi_p = 0$ при $p < 0$), из-за чего произвол постоянных $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{æ-1}$ станет, вообще говоря, ограничен.

Переходим к решению уравнения (4). Вполне аналогично уравнению (3), применяя метод вариации произвольных постоянных, получим формулу его решения

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\widetilde{D}_j(z) + D_j\right) z^{l_j}, \quad z \in D_-, \tag{16}$$

где D_j – произвольные постоянные, а в качестве функций $\widetilde{D}_j(z)$ можно взять любые первообразные функций

$$\widetilde{D}_j{}'(z) = \frac{(-1)^{n+j} B_j F_-(z)}{B z^{l_j+1}},$$

в которых ненулевые постоянные B_j, B находятся вполне аналогично нахождению постоянных A_j, A, $j = \overline{1,n}$.

Теперь следует добиться отсутствия у функции $\Phi_-(z)$ возможной особенности в точке $z = \infty$. Кроме того, следует обеспечить выполнение условия $\Phi_-(\infty) = 0$.

Пусть среди чисел l_j есть γ неотрицательных и $n - \gamma$ отрицательных. Для определенности считаем $l_1 \geq 0,\ l_2 \geq 0, \ldots, l_\gamma \geq 0,\ l_{\gamma+1} < 0,\ l_{\gamma+2} < 0, \ldots, l_n < 0$. Возможно, что $\gamma = 0$ либо $\gamma = n$, тогда соответствующая совокупность чисел отсутствует.

Для $j = \overline{1,\gamma}$ функции $\widetilde{D}_j{}'(z)$ будут аналитическими в области D_- и имеющими в точке $z = \infty$ нуль по меньшей мере второго порядка, поэтому можно взять

$$\widetilde{D}_j(z) = \frac{(-1)^{n+j} B_j}{B} \int_{\infty}^{z} \frac{F_-(\zeta)d\zeta}{\zeta^{l_j+1}}; \tag{17}$$

соответствующие постоянные D_j следует положить равными нулю, иначе формула (16) даст полюс у функции $\Phi_-(z)$ в точке $z = \infty$. (Если $l_j = 0$ для некоторого j, то соответствующее слагаемое в формуле (16) к полюсу не приведет. Условие $D_j = 0$ для этого слагаемого будет продиктовано требованием $\Phi_-(\infty) = 0$.)

Для $j=\overline{\gamma+1,n}$ обозначим

$$G_j(z)=\frac{d_{-l_j-2,j}}{z^{l_j+2}}+\frac{d_{-l_j-3,j}}{z^{l_j+3}}+\ldots+\frac{d_{1,j}}{z^{-1}}+d_{0,j}+\frac{d_{-1,j}}{z}$$

главные части разложений функций $\widetilde{D}_j'(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ в ряд Лорана с добавленными слагаемыми, содержащими z^0 и z^{-1} этих разложений. Необходимыми условиями существования первообразных у этих функций $\widetilde{D}_j'(z)$ будет выполнение равенств

$$d_{-1,j}=0,\quad j=\overline{\gamma+1,n}. \tag{18}$$

Если эти условия выполнены, то можно взять

$$\widetilde{D}_j(z)=-\frac{d_{-l_j-2,j}}{(l_j+1)z^{l_j+1}}-\frac{d_{-l_j-3,j}}{(l_j+2)z^{l_j+2}}-\ldots-\frac{d_{1,j}}{(-2)z^{-2}}+d_{0,j}z+$$
$$+\int\limits_{\infty}^{z}\left(\frac{(-1)^{n+j}B_jF_-(\zeta)}{B\zeta^{l_j+1}}-G_j(\zeta)\right)d\zeta,\quad j=\overline{\gamma+1,n}. \tag{19}$$

В формулах (19)

$$\frac{(-1)^{n+j}B_jF_-(\zeta)}{B\zeta^{l_j+1}}-G_j(\zeta)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$$

при $\zeta\to\infty$, поэтому интегралы будут сходиться и давать исчезающие на бесконечности функции.

Полюсы в точке $z=\infty$ порядка не выше $-l_j-1$ у функции (19) «погасятся» в формуле (16) соответствующими множителями z^{l_j}, так что формула (16) приведет к исчезающей на бесконечности аналитической функции $\Phi_-(z)$.

Условиям (18) можно придать вид

$$\int\limits_L\frac{F_-(z)dz}{z^{l_j+1}}=0,\quad j=\overline{\gamma+1,n}. \tag{20}$$

Если $æ>0$ и, следовательно, согласно формулам (8)

$$F_-(z)=X_-(z)\left(\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_{æ-1}z^{æ-1}+\Psi_-(z)\right)$$

с произвольным постоянным $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{æ-1}$, то условия (20) станут условиями совместности системы линейных алгебраических уравнений

$$g_{0,j}\alpha_0+g_{1,j}\alpha_1+\ldots+g_{æ-1,j}\alpha_{æ-1}+h_j=0, \tag{21}$$

где

$$g_{s,j}=\int\limits_L\frac{X_-(z)dz}{z^{l_j+1-s}},\quad s=\overline{0,æ-1},\quad h_j=\int\limits_L\frac{X_-(z)\Psi_-(z)dz}{z^{l_j+1}},\quad j=\overline{\gamma+1,n}.$$

Исследование уравнений (3), (4) закончено, и теперь можно сформулировать результат в отношении исходного уравнения (1).

Основной результат. Т е о р е м а 1. *При* $æ\ge 0,\ \beta=0,\ \gamma=n$ *уравнение* (1) *безусловно разрешимо. В остальных случаях для его разрешимости необходимо и достаточно:*

1) выполнение условий (7)*, если* $æ<0,\ \beta=0,\ \gamma=n$;

2) выполнение условий (12)*, если* $æ = 0,\ \beta > 0,\ \gamma = n$;
3) выполнение условий (18)*, если* $æ = 0,\ \beta = 0,\ \gamma < n$;
4) выполнение условий (7)*,* (12)*, если* $æ < 0,\ \beta > 0,\ \gamma = n$;
5) выполнение условий (7)*,* (18)*, если* $æ < 0,\ \beta = 0,\ \gamma < n$;
6) выполнение условий (7)*,* (12)*,* (18)*, если* $æ < 0,\ \beta > 0,\ \gamma < n$;
7) совместность системы (15)*, если* $æ > 0,\ \beta > 0,\ \gamma = n$;
8) совместность системы (21)*, если* $æ > 0,\ \beta = 0,\ \gamma < n$;
9) совместность объединенной системы (15)*,* (21)*, если* $æ > 0,\ \beta > 0,\ \gamma < n$.

Обозначим r – ранг системы (15), если $æ > 0,\ \beta > 0,\ \gamma = n$, ранг системы (21), если $æ > 0,\ \beta = 0,\ \gamma < n$, ранг объединенной системы (15), (21), если $æ > 0,\ \beta > 0,\ \gamma < n$; пусть $r = 0$ в остальных случаях.

Т е о р е м а 2. *Если уравнение* (1) *разрешимо, то его решение содержит* $\max\left(0, æ\right) + n + \beta - \gamma - r$ *произвольных постоянных и записывается по формуле*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\beta}\left(\widetilde{C}_j(t) + C_j\right)t^{k_j} + \sum_{j=\beta+1}^{n}\widetilde{C}_j(t)t^{k_j} - \sum_{j=1}^{\gamma}\widetilde{D}_j(t)t^{l_j} - \sum_{j=\gamma+1}^{n}\left(\widetilde{D}_j(t) + D_j\right)t^{l_j}, \quad t \in L, \tag{22}$$

в которой выражения для $\widetilde{C}_j(t),\ \widetilde{D}_j(t)$ *берутся из формул* (11)*,* (13)*,* (17)*,* (19)*, а* $C_j,\ j = \overline{1,\beta}$, *и* $D_j,\ j = \overline{\gamma+1,n}$, *– произвольные постоянные. При этом постоянные* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{æ-1}$, *находящиеся при* $æ > 0$ *в формулах для* $\widetilde{C}_j(t),\ \widetilde{D}_j(t)$, *являются: произвольными, если* $\beta = 0,\ \gamma = n$; *общим решением системы* (15)*, если* $\beta > 0,\ \gamma = n$; *общим решением системы* (21)*, если* $\beta = 0,\ \gamma < 0$; *общим решением объединенной системы* (15)*,* (21)*, если* $\beta > 0,\ \gamma < 0$.

П р и м е р 1. Пусть в уравнении (1) $n = 3,\ a(t) = t + i,\ b(t) = t - i,\ f(t) = 2(t + i)(\delta_0 + \delta_1 t + t^2) - 2(t-i)\left(\frac{\delta_{-1}}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$ (δ_0, δ_1, δ_{-1} – постоянные), $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $b_0 = 2$, $b_1 = -2$, $b_2 = 1$. Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$\begin{gathered}2t^5\varphi'''(t) + t^2(5t + 3i)\varphi''(t) - 2t(t-i)\varphi'(t) + 2(t-i)\varphi(t) - \\ -\frac{2(t-i)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{2t}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \frac{4t^2\left(t+3i\right)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} + \frac{12t^3}{\pi}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^4} = \\ = 2(t+i)\left(\delta_0 + \delta_1 t + t^2\right) - 2\left(t-i\right)\left(\frac{\delta_{-1}}{t} + \frac{1}{t^2}\right), \quad t \in L.\end{gathered} \tag{23}$$

Будем считать, кроме того, что для уравнения (23) либо $\pm i \in D_+$, либо $\pm i \in D_-$.

Задача Римана (5) приобретает вид

$$F_+(t) = \frac{t-i}{t+i}F_-(t) + \left(\delta_0 + \delta_1 t + t^2\right) - \frac{t-i}{t+i}\left(\frac{\delta_{-1}}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$$

и имеет в классе исчезающих на бесконечности функций единственное решение

$$F_+(z) = \delta_0 + \delta_1 z + z^2, \quad F_-(z) = \frac{\delta_{-1}}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Далее надо решить соответствующие уравнения (3), (4):

$$z^3\Phi_+'''(z) + 4z^2\Phi_+''(z) = \delta_0 + \delta_1 z + z^2, \tag{24}$$

$$z^3\Phi_-'''(z) + z^2\Phi_-''(z) - 2z\Phi_-'(z) + 2\Phi_-(z) = \frac{\delta_{-1}}{z} + \frac{1}{z^2}. \tag{25}$$

Для уравнения (24) получим $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -2$. Условия разрешимости (12) дадут $\delta_0 = \delta_1 = 0$. Если эти условия выполняются, то решение получается равным

$$\Phi_+(z) = C_1 + C_2 z + \frac{z^2}{8}.$$

Для уравнения (25) получим $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = -1$. Условия разрешимости (18) дадут $\delta_{-1} = 0$. Если это равенство выполняется, то решение получается равным

$$\Phi_-(z) = \frac{D_1}{z} - \frac{1}{12z^2}.$$

Итак, для разрешимости уравнения (23) необходимо и достаточно выполнения условий $\delta_0 = \delta_1 = \delta_{-1} = 0$. Если они выполняются, то решение этого уравнения согласно формуле (22) получается равным

$$\varphi(t) = C_1 + C_2 t - \frac{D_1}{t} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{12t^2}$$

(C_1, C_2, D_1 – произвольные постоянные).

Отметим еще, что при решении уравнений (24), (25) можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

Частные случаи. 1. Уравнение Эйлера на кривой

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \varphi^{(k)}(t) = f(t), \quad t \in L, \tag{26}$$

получается как частный случай уравнения (1), когда $a_k = b_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $a(t) = b(t) = 1$, а функция $\frac{f(t)}{2}$ обозначена снова $f(t)$. При этом задача Римана (5) будет задачей о скачке, имеющей единственное решение

$$F_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_\pm,$$

а уравнения (3), (4) примут вид

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \Phi_\pm^{(k)}(z) = F_\pm(z), \quad z \in D_\pm, \tag{27}$$

так что станут верны равенства $k_j = l_j$, $j = \overline{1, n}$.

Условия разрешимости (12), (18), представляющие собой равенства нулю надлежащих коэффициентов в разложении функции $F_+(z)$, $F_-(z)$ в ряды Тейлора в окрестностях точек $z = 0$, $z = \infty$ соответственно, легко выразятся через функцию $f(t)$. В результате получим следующее утверждение.

С л е д с т в и е т е о р е м 1, 2. *Для разрешимости уравнения* (26) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int_L \frac{f(t) dt}{t^{k_j+1}} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если эти условия выполняются, то решение уравнения (26) *дается формулой*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\widetilde{C}_j(t) - \widetilde{D}_j(t) + C_j \right) t^{k_j}, \quad t \in L, \tag{28}$$

где $\widetilde{C}_j(t)$, $\widetilde{D}_j(t)$ *снова берутся по формулам* (11), (13), (17), (19), *а* C_j *– произвольные постоянные,* $j=\overline{1,n}$.

Пример 2. Приведем решение следующего уравнения Эйлера:

$$t^2\varphi''(t)+2t\varphi'(t)-2\varphi(t)=\frac{\delta_{-2}}{t^2}+\frac{1}{t}+1+\delta_1 t+e^t,\quad t\in L, \tag{29}$$

где δ_{-2}, δ_1 – постоянные.

Здесь $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (29) выражаются равенствами $\delta_{-2} = 0$, $\delta_1 = -1$. Если эти равенства выполняются, то формула (28) приводит к решению

$$\varphi(t)=-\frac{2}{3}+\frac{t}{3}\int_0^t\frac{e^\zeta-1-\zeta}{\zeta^2}d\zeta-\frac{1}{2t}+C_1t+\frac{C_2}{t^2}.$$

2. Пусть p и q – какие-либо два целых числа. Создадим по каждому из них совокупность $n+1$ чисел: $p_k=(-1)^{n-k}p(p+1)\dots(p+n-1-k)$, $q_k=(-1)^{n-k}q(q+1)\dots(q+n-1-k)$, $k=\overline{0,n-1}$, $p_n = q_n = 1$. Рассмотрим следующий частный случай уравнения (1):

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^k\left(\left(a(t)p_k+b(t)q_k\right)\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!\left(a(t)p_k-b(t)q_k\right)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}\right)=f(t),\quad t\in L, \tag{30}$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

Возникающая при его решении задача Римана ничем не отличается от прежней задачи (5), а уравнения Эйлера (3), (4) приобретают соответственно вид

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k p_k z^k\Phi_+^{(k)}(z)=F_+(z),\quad z\in D_+, \tag{31}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k q_k z^k\Phi_-^{(k)}(z)=F_-(z),\quad z\in D_-, \tag{32}$$

и могут быть решены существенно проще, чем в общем случае, поскольку не возникает вопроса о нахождении корней определяющих уравнений.

Разделим уравнение (31) на z^{n+p}, а уравнение (32) на z^{n+q}, тогда после применения формулы Лейбница для производных высших порядков получим уравнения соответственно

$$\left(\frac{\Phi_+(z)}{z^p}\right)^{(n)}=\frac{F_+(z)}{z^{n+p}},\quad z\in D_+, \tag{33}$$

$$\left(\frac{\Phi_-(z)}{z^q}\right)^{(n)}=\frac{F_-(z)}{z^{n+q}},\quad z\in D_-. \tag{34}$$

Дальнейшее решение распадается на несколько случаев в зависимости от значений p и q. Проанализируем, например, случай $p \ge 0$, $q \ge 0$.

Пусть

$$H(z)=\frac{\sigma_{-n-p}}{z^{n+p}}+\frac{\sigma_{-n-p+1}}{z^{n+p-1}}+\ldots+\frac{\sigma_{-1}}{z}$$

есть главная часть разложения функции $\dfrac{F_+(z)}{z^{n+p}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$. Чтобы однозначная функция $\dfrac{\Phi_+(z)}{z^p}$ восстанавливалась по своей производной порядка n, должны, очевидно, выполняться равенства $\sigma_{-n} = \sigma_{-n+1} = \ldots = \sigma_{-1} = 0.$ Если они выполняются, получаем следующее решение уравнения (33):

$$\Phi_+(z) = \frac{\sigma_{-n-p}}{(-n-p+1)(-n-p+2)\ldots(-p)} + \frac{\sigma_{-n-p+1} z}{(-n-p+2)(-n-p+3)\ldots(-p+1)} + \ldots +$$
$$+ \frac{\sigma_{-n-1} z^{p-1}}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)} + z^p Q(z) + \frac{z^p}{(n-1)!} \int_0^z (z-\zeta)^{n-1} \left(\frac{F_+(\zeta)}{\zeta^{n+p}} - H(\zeta) \right) d\zeta,$$

где $Q(z)$ – многочлен степени $n - 1$ с произвольными коэффициентами (при $p = 0$ слагаемые в правой части последнего равенства, предшествующие слагаемому $z^pQ(z)$, отсутствуют). Здесь, сделав n-кратное интегрирование, мы использовали формулу вида

$$\int_0^z d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_0^{\zeta_{n-1}} T(\zeta_n) d\zeta_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-\zeta)^{n-1} T(\zeta) d\zeta.$$

Уравнение (34) проще: ничто не мешает сделать n-кратное интегрирование и выразить функцию $\Phi_-(z)$:

$$\Phi_-(z) = z^q R(z) + \frac{z^q}{(n-1)!} \int_\infty^z (z-\zeta)^{n-1} \frac{F_-(\zeta)}{\zeta^{n+q}} d\zeta,$$

где $R(z)$ – многочлен степени $n - 1$ с произвольными коэффициентами. Далее следует взять $R(z) \equiv 0$, добиваясь для функции $\Phi_-(z)$ аналитичности на бесконечности и выполнения условия $\Phi_-(\infty) = 0$.

Не станем здесь приводить формулу решения уравнения (30), которую теперь легко записать с помощью формулы (6). Не станем также делать вполне аналогичный анализ уравнения (30) при иных значениях p и q. Рассмотрим пример.

П р и м е р 3. Пусть в уравнении (30) $n = 2,\ p = 3,\ q = 2,\ a(t) = b(t) = 1,\ f(t) = 2\left(\sin t + \delta t^3 - \frac{1}{t}\right),$ δ – постоянная, тогда уравнению можно придать вид

$$t^2 \varphi''(t) - 5t\varphi'(t) + 9\varphi(t) + \frac{3}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{t}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} = \sin t + \delta t^3 - \frac{1}{t}, \quad t \in L. \tag{35}$$

Соответствующая задача Римана будет задачей о скачке

$$F_+(t) = F_-(t) + \sin t + \delta t^3 - \frac{1}{t}, \quad t \in L,$$

имеющей единственное решение

$$F_+(z) = \sin z + \delta z^3, \quad F_-(z) = \frac{1}{z}.$$

Далее следует решать уравнения (31), (32), которые примут вид

$$z^2 \Phi_+''(z) - 6z\Phi_+'(z) + 12\Phi_+(z) = \sin z + \delta z^3, \tag{36}$$

$$z^2 \Phi_-''(z) - 4z\Phi_-'(z) + 6\Phi_-(z) = \frac{1}{z}. \tag{37}$$

Разделим уравнение (36) на z^5, а уравнение (37) на z^4, получим соответственно

$$\left(\frac{\Phi_+(z)}{z^3} \right)'' = \frac{1}{z^4} + \frac{\delta - \frac{1}{6}}{z^2} + \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^5}, \tag{38}$$

$$\left(\frac{\Phi_-(z)}{z^2}\right)'' = \frac{1}{z^5}; \tag{39}$$

при этом в правой части уравнения (38) мы выделили главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$.

Очевидно, что должно выполняться $\delta = \frac{1}{6}$, иначе двукратное интегрирование в уравнении (38) приведет к точке ветвления $z = 0$ у искомой функции $\Phi_+(z)$. Если $\delta = \frac{1}{6}$, то получаем

$$\Phi_+(z) = \frac{z}{6} + z^3 \int_0^z (z-\zeta) \frac{\sin\zeta - \zeta + \frac{\zeta^3}{6}}{\zeta^5} d\zeta + C_1 z^3 + C_2 z^4,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Из уравнения (39) с учетом $\Phi_-(\infty) = 0$ получим $\Phi_-(z) = \frac{1}{12z}$.

Итак, при $\delta \neq \frac{1}{6}$ уравнение (35) не имеет решений. При $\delta = \frac{1}{6}$ согласно формуле (6) его решение получается равным

$$\varphi(t) = \frac{t}{6} + t^3 \int_0^t (t-\zeta) \frac{\sin\zeta - \zeta + \frac{\zeta^3}{6}}{\zeta^5} d\zeta + C_1 t^3 + C_2 t^4 - \frac{1}{12t}.$$

Заключение. Изучено новое гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение, исследование которого тесно связано с решением классических линейных дифференциальных уравнений Эйлера, а само оно может расцениваться как обобщение уравнения Эйлера на кривой. При сделанных в работе предположениях дан полный конструктивный анализ уравнения: записаны условия разрешимости, при их выполнении в явном виде дано решение. Указаны частные случаи, представляющие самостоятельный интерес, решены примеры.

Список использованных источников

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 351 с.

2. Бойков, И. В. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Изв. высш. учеб. заведений. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 2 (42). – С. 63–78. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6

3. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

4. Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

5. Шилин, А. П. Дифференциальная краевая задача Римана и ее приложение к интегро-дифференциальным уравнениям / А. П. Шилин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

6. Шилин, А. П. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах / А. П. Шилин // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 3 – С. 48–56. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

7. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.

8. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

References

1. Adamar Zh. *The Cauchy Problem of Linear Equations with Partial Dezivatines of Hyperbolic Type*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 351 p. (in Russian).

2. Boykov I. V., Boykova A. I. Analytical methods of solving hypersingular integral equations. *Izvestiya vuzow. Povolzshiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical scinces*, 2017, no. 2 (42), pp. 63–78. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6

3. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Nacionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

4. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

5. Shilin A. P. Riemann's differential boundary-value problem and its application to integro-differential equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

6. Shilin A. P. Hypersingular integro-differential equations with power factors in coefficients. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 2, pp. 48–56 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

7. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

8. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

Информация об авторе

Шилин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

Information about the author

Andrey P. Shilin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com