ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.988,519.63,519.65
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71

Поступила в редакцию 10.01.2020
Received 10.01.2020

М. В. Игнатенко[1], Л. А. Янович[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[2]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

О ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИЯХ ОТДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Аннотация. Рассматривается проблема точного и приближенного решений отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков. Приведены некоторые сведения о вариационных производных и явные формулы точных решений простейших уравнений с первыми вариационными производными. Демонстрируется интерполяционный метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с вариационными производными. Представлена общая схема приближенного решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого порядка, основанная на использовании аппарата операторного интерполирования. Получено точное решение дифференциального уравнения гиперболического типа с вариационными производными, аналогичное классическому решению Даламбера. Рассмотрена эрмитова интерполяционная задача для функционалов, определенных на множествах дифференцируемых функций, с условиями совпадения в узлах интерполируемого и интерполяционного функционалов, а также их вариационных производных первого и второго порядков. Найденное явное представление решения данной интерполяционной задачи основано на произвольной чебышевской системе функций. Оно обобщено на случай интерполирования функционалов по одной из двух переменных и применено для построения приближенного решения задачи Коши для дифференциального уравнения гиперболического типа с вариационными производными. Изложение материала иллюстрируется многочисленными примерами.

Ключевые слова: вариационная производная, дифференциал Гато, задача Коши, формула Даламбера, операторное интерполирование эрмитова типа

Для цитирования. Игнатенко, М. В. О точном и приближенном решениях отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 51–71. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71

Marina V. Ignatenko[1], Leonid A. Yanovich[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ON THE EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF SEVERAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIATIONAL DERIVATIVES OF THE FIRST AND SECOND ORDERS

Abstract. In this paper, we consider the problem of the exact and approximate solutions of certain differential equations with variational derivatives of the first and second orders. Some information about the variational derivatives and explicit formulas for the exact solutions of the simplest equations with the first variational derivatives are given. An interpolation method for solving ordinary differential equations with variational derivatives is demonstrated. The general scheme of an approximate solution of the Cauchy problem for nonlinear differential equations with variational derivatives of the first order, based on the use of the operator interpolation apparatus, is presented. The exact solution of the differential equation of the hyperbolic type with variational derivatives, similar to the classical Dalamber solution, is obtained. The Hermite interpolation problem with the conditions of coincidence in the nodes of the interpolated and interpolation functionals, as well as their variational derivatives of the first and second orders, is considered for functionals defined on the sets of differentiable functions. The found explicit representation of the solution of the given interpolation problem is based on an arbitrary Chebyshev system of functions. This solution is generalized for the case of interpolation of functionals on one out of two variables and applied to construct an approximate solution of the Cauchy problem for the differential equation of the hyperbolic type with variational derivatives. The description of the material is illustrated by numerous examples.

Keywords: variational derivative, Gateaux differential, Cauchy problem, Dalamber formula, operator interpolation of Hermite type

For citation. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. On the exact and approximate solutions of several differential equations with variational derivatives of the first and second orders. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 51–71 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71

Введение. Теория уравнений с вариационными (функциональными) производными – достаточно обширная область математики. Данный класс уравнений имеет многочисленные приложения в статистической физике, квантовой теории поля, гидромеханике и других областях.

Теория вариационных производных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с вариационными производными достаточно полно изложена, например, в монографиях [1–3] и работах [4–10].

В теории дифференциальных уравнений с вариационными производными формулируются и исследуются задачи, аналогичные рассматриваемым проблемам в случае обыкновенных и дифференциальных уравнений с частными производными. Явные формулы решений уравнений с вариационными производными известны лишь в немногих случаях. Это относится, главным образом, к множеству линейных уравнений [5–8], поэтому основными методами их решения являются приближенные.

Проблема приближенного решения уравнений с вариационными производными недостаточно исследована. При решении такого класса задач может оказаться полезным применение методов, которые учитывали бы заданные начальные и граничные значения. В частности, в задаче Коши для уравнения n-го порядка искомый функционал $F(x)$ может быть приближенно найден по известным в точке $x_0(t)$ значениям функционала $F(x_0)$ и его вариационных производных до $(n-1)$-го порядка. Для этого естественно использовать аппарат операторного интерполирования [11, 12]. Далее будет предложен один из методов приближенного решения уравнений с вариационными производными, основанный на интерполяции входящего в уравнение функционала.

Некоторые сведения о вариационных производных. Приведем определение [9] вариационной производной от функционалов, заданных на множествах функций.

Пусть X – линейное пространство вещественных функций, определенных на отрезке $[a,b]$ действительной оси $\mathbb{R}$, а F – заданный на X оператор или функционал.

Дифференциал Гато $\delta F[x;h]$ отображения F в точке $x \in X$ по направлению $h \in X$ определяется равенством

$$\delta F[x;h] = \lim_{\lambda\to 0}\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{\lambda} = \left.\frac{dF(x+\lambda h)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

Если дифференциал $\delta F[x;h]$ допускает представление в виде

$$\delta F[x;h] = \int_a^b a(x;t)h(t)dt,$$

где $a(x;t)$ – некоторая функция, зависящая от $x = x(s)$ и переменной t, то ее называют вариационной производной первого порядка функционала $F(x)$ по x в точке t и обозначают символом $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$.

Отметим, что имеется некоторая аналогия процесса вычисления вариационной производной с операцией дифференцирования скалярных функций. Например, если $F(x) \equiv \mathrm{const}$, то $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)} \equiv 0$; далее

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\{F_1(x)+F_2(x)\} = \frac{\delta F_1(x)}{\delta x(t)}+\frac{\delta F_2(x)}{\delta x(t)};\quad \frac{\delta}{\delta x(t)}\{F_1(x)F_2(x)\} = \frac{\delta F_1(x)}{\delta x(t)}F_2(x)+\frac{\delta F_2(x)}{\delta x(t)}F_1(x);$$

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\left(\frac{1}{F(x)}\right) = -\frac{1}{F^2(x)}\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)},\quad F(x)\neq 0.$$

Дифференциал Гато k-го порядка $(k \in \mathbb{N})$ $\delta^k F[x;h_1,h_2,...,h_k]$ отображения F в точке $x \in X$ по направлениям $h_1,h_2,...,h_k \in X$ определяется равенством

$$\delta^k F[x;h_1,h_2,...,h_k]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\delta^{k-1}F[x+\lambda h_k;h_1,h_2,...,h_{k-1}]-\delta^{k-1}F[x;h_1,h_2,...,h_{k-1}]}{\lambda}=$$
$$=\left.\frac{\partial^k F(x+\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2+...+\lambda_k h_k)}{\partial\lambda_k\cdots\partial\lambda_1}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_k=0},\quad \delta^0 F[x]\equiv F(x).$$

При $h_1=h_2=...=h_k\equiv h\in X$ дифференциал Гато k-го порядка

$$\delta^k F\left[x;\underbrace{h,h,...,h}_{k\text{ раз}}\right]\equiv\delta^k F[x;h]=\left.\frac{d^k F(x+\lambda h)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=0}.$$

Если существует дифференциал Гато k-го порядка $\delta^k F[x;h_1,h_2,...,h_k]$ $(x,h_i\in X;\ i=1,2,...,k)$ функционала $F(x)$ в точке $x\in X$ по направлениям $h_1,h_2,...,h_k\in X$, который можно представить в виде

$$\delta^k F[x;h_1,h_2,...,h_k]=\int\limits_{[a,b]^k} a(x;t_1,...,t_k)h_1(t_1)...h_k(t_k)dt_1...dt_k, \tag{1}$$

где $a(x;t_1,...,t_k)$ – некоторая функция, зависящая от $x = x(s)$ и переменных $t_1,...,t_k\in\mathbb{R}$, то $a(x;t_1,...,t_k)$ называют вариационной производной k-го порядка функционала $F(x)$ по x в точке $t=(t_1,t_2,...,t_k)$ и обозначают символом $\dfrac{\delta^k F(x)}{\delta x(t_1)\cdots\delta x(t_k)}$.

В качестве X можно выбрать пространство $C[a,b]$ непрерывных функций с равномерной нормой, гильбертово пространство $L_2[a,b]$ или любое другое пространство, такое, чтобы интеграл в правой части (1) имел смысл. Вычислим вариационные производные от некоторых простейших функционалов.

П р и м е р 1. Если $F(x)=\int\limits_a^b p(t)f\left[x(t)\right]dt$, то $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=p(t)f'\left[x(t)\right]$. Действительно, для дифференциала Гато рассматриваемого функционала имеем

$$\delta F[x;h]=\left.\frac{d}{d\lambda}\int\limits_a^b p(t)f\left[x(t)+\lambda h(t)\right]dt\right|_{\lambda=0}=\left.\int\limits_a^b p(t)f'\left[x(t)+\lambda h(t)\right]h(t)dt\right|_{\lambda=0}=\int\limits_a^b p(t)f'\left[x(t)\right]h(t)dt,$$

следовательно, вариационная производная $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=p(t)f'[x(t)]$.

Используя определение первой вариационной производной, несложно заполнить следующую таблицу.

Таблица

№	Функционал	Вариационная производная
1	$F(x)=\int\limits_a^b x(t)dt$	$\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}\equiv 1$
2	$F(x)=\int\limits_a^b p(t)x(t)dt$	$\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=p(t)$
3	$F(x)=\int\limits_a^b p(t)[\alpha x(t)+\beta]dt$	$\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=\alpha\, p(t)$
4	$F(x)=\int\limits_a^b p(t)x^2(t)dt$	$\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=2p(t)x(t)$
5	$F(x)=\int\limits_a^b p(t)e^{x(t)}dt$	$\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=p(t)e^{x(t)}$

Окончание табл.

№	Функционал	Вариационная производная
6	$F(x)=\int_a^b p(t)\sin x(t)dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=p(t)\cos x(t)$
7	$F(x)=\int_a^b p(t)\cos x(t)dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=-p(t)\sin x(t)$
8	$F(x)=\int_a^b p(t)\alpha^{x(t)}dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=p(t)\alpha^{x(t)}\ln\alpha$
9	$F(x)=\int_a^b p(t)f[x(t)]dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=p(t)f'[x(t)]$
10	$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\int_a^b p_k(t)x^k(t)dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=\sum_{k=1}^{n}k\,p_k(t)x^{k-1}(t)$
11	$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\int_a^b p_k(t)x(t)dt\right]^k$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=\sum_{k=1}^{n}k\,p_k(t)\left[\int_a^b p_k(t)x(t)dt\right]^{k-1}$

П р и м е р 2. Если $F(x)=\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2$, где, например, $x\in L_2[a,b]$, $K:[a,b]^2\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция своих аргументов, то

$$\left.\frac{dF(x+\lambda h_1)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{d}{d\lambda}\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)\big(x(s_1)+\lambda h_1(s_1)\big)\big(x(s_2)+\lambda h_1(s_2)\big)ds_1ds_2\right|_{\lambda=0}=$$

$$=\left.\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)\big[h_1(s_1)\big(x(s_2)+\lambda h_1(s_2)\big)+h_1(s_2)\big(x(s_1)+\lambda h_1(s_1)\big)\big]ds_1ds_2\right|_{\lambda=0}=$$

$$=\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)\big[h_1(s_1)x(s_2)+h_1(s_2)x(s_1)\big]ds_1ds_2=\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)x(s_1)h_1(s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)x(s_2)h_1(s_1)ds_1ds_2.$$

Итак, первая функциональная производная

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=\int_a^b K(s_1,t)x(s_1)ds_1+\int_a^b K(t,s_2)x(s_2)ds_2.$$

Далее,

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\left\{\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)\Big(\big[x(s_1)+\lambda h_2(s_1)\big]h_1(s_2)+\big[x(s_2)+\lambda h_2(s_2)\big]h_1(s_1)\Big)ds_1ds_2\right\}\right|_{\lambda=0}=$$

$$=\int_a^b\int_a^b K(s_1,s_2)\big(h_2(s_1)h_1(s_2)+h_2(s_2)h_1(s_1)\big)ds_1ds_2$$

и, следовательно, $\frac{\delta^2F(x)}{\delta x(t_1)\delta x(t_2)}=K(t_1,t_2)+K(t_2,t_1)$ или же $\frac{\delta^2F(x)}{\delta x(t_1)\delta x(t_2)}=2K(t_1,t_2)$ при условии, что $K(s_1,s_2)$ – симметричная функция своих аргументов.

Отметим, что имеются и другие определения производных этого вида для функционалов $F(x)$, определенных на пространствах функций (см., напр., [9, 10]).

Явные формулы точных решений отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными. Приведем примеры точного решения некоторых простейших уравнений с первыми вариационными производными.

Пример 3. Очевидно, что решение уравнения $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t)\cos x(t)$ имеет вид $F(x) = \int_0^1 p(t)\sin x(t)dt$. Этот же функционал является решением уравнения $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = 2F(x)p(t)\cos x(t)$. Действительно, так как

$$\delta F^2[x;h] = \frac{d}{d\lambda}\left[\int_0^1 p(t)\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)dt\right]^2\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= 2\int_0^1 p(t)\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)dt\int_0^1 p(t)\cos\big(x(t)+\lambda h(t)\big)h(t)dt\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= 2\int_0^1 p(t)\sin x(t)dt\int_0^1 p(t)\cos x(t)\,h(t)dt,$$

то $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = 2\int_0^1 p(t)\sin x(t)dt\; p(t)\cos x(t) = 2F(x)p(t)\cos x(t)$. Заметим, что $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = 2F(x)\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$.

Пример 4. Если функционал $F(x) = \int_0^1 p(t)\cos x(t)dt$, то он является решением уравнения $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = -2F(x)p(t)\sin x(t)$. Доказательство этого факта аналогично рассуждению, приведенному в примере 3.

Пример 5. Функционал $F(x) = \int_0^{2\pi} p(t)\sin x(t)dt$ является решением уравнения

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} - \big(3F^2(x)-1\big)p(t)\cos x(t).$$

Для доказательства этого факта покажем, что значение $\frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} = 3F^2(x)p(t)\cos x(t)$. Поскольку дифференциал Гато

$$\delta F^3[x;h] = \frac{d}{d\lambda}\left[\int_0^{2\pi} p(t)\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)dt\right]^3\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= 3\left[\int_0^{2\pi} p(t)\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)dt\right]^2\int_0^{2\pi} p(t)\cos\big(x(t)+\lambda h(t)\big)h(t)dt\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= 3\left[\int_0^{2\pi} p(t)\sin x(t)dt\right]^2\int_0^{2\pi} p(t)\cos x(t)\,h(t)dt,$$

то вариационная производная $\frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} = 3F^2(x)p(t)\cos x(t)$ и верно равенство $\frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} = 3F^2(x)\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$.

Пример 6. Функционал $F(x) = \int_0^{2\pi} p(t)\sin x(t)dt$ является решением уравнения

$$\frac{\delta F^n(x)}{\delta x(t)} = nF^{n-1}(x)p(t)\cos x(t).$$

Действительно, так как дифференциал Гато

$$\delta F^n[x;h] = \frac{d}{d\lambda}\left[\int_0^1 p(t)\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)dt\right]^n\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= n\left[\int_0^1 p(t)\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)dt\right]^{n-1}\int_0^1 p(t)\cos\big(x(t)+\lambda h(t)\big)h(t)dt\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= n\left[\int_0^1 p(t)\sin x(t)dt\right]^{n-1}\int_0^1 p(t)\cos x(t)\,h(t)dt = n\,F^{n-1}(x)\int_0^1 p(t)\cos x(t)\,h(t)dt,$$

то вариационная производная $\dfrac{\delta F^n(x)}{\delta x(t)} = n\,F^{n-1}(x)p(t)\cos x(t),$ при этом справедливо равенство $\dfrac{\delta F^n(x)}{\delta x(t)} = n\,F^{n-1}(x)\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}.$

Пример 7. Непосредственными вычислениями несложно убедиться, что функционал

$$F(x) = \int_a^b\left[p_0(t)e^{x(t)} + p_1(t)\sin x(t) - p_2(t)\cos(t) + \frac{1}{2}p_3(t)x^2(t)\right]dt + \frac{1}{2}\left(\int_a^b p_4(\tau)x(\tau)d\tau\right)^2$$

является решением уравнения

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p_0(t)e^{x(t)} + p_1(t)\cos x(t) + p_2(t)\sin(t) + p_3(t)x(t) + p_4(t)\int_a^b p_4(\tau)x(\tau)d\tau.$$

Пример 8. Функционал $F(x) = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b p_k(t)x^k(t)dt$ является решением уравнения $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^{n} k\,p_k(t)x^{k-1}(t),$ так как дифференциал Гато

$$\delta F[x;h] = \frac{d}{d\lambda}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b p_k(t)\big[x(t)+\lambda h(t)\big]^k dt\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\int_a^b p_k(t)\big[x(t)+\lambda h(t)\big]^{k-1}h(t)dt\Bigg|_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{n} k\int_a^b p_k(t)x^{k-1}(t)h(t)dt$$

и вариационная производная $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^{n} k\,p_k(t)x^{k-1}(t).$

Пример 9. Функционал $F(x) = \sum_{k=0}^{n} J^k(k;x),$ где $J(k;x) = \int_a^b p_k(t)x(t)dt,$ является решением уравнения $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^{n} k\,p_k(t)J^{k-1}(k;x).$

Поскольку

$$\delta F[x;h] = \frac{d}{d\lambda}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b p_k(t)\big[x(t)+\lambda h(t)\big]dt\right)^k\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\left(\int_a^b p_k(t)\left[x(t)+\lambda h(t)\right]dt\right)^{k-1}\int_a^b p_k(t)h(t)dt\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\left(\int_a^b p_k(t)x(t)dt\right)^{k-1}\int_a^b p_k(t)h(t)dt = \sum_{k=1}^{n} kJ^{k-1}(k;x)\int_a^b p_k(t)h(t)dt,$$

то $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^{n} k\, p_k(t)J^{k-1}(k;x).$

Интерполяционные формулы с двукратными узлами, содержащие первые вариационные производные. Приведем некоторые интерполяционные формулы типа Эрмита и Эрмита – Биркгофа для аппроксимации функционалов, входящих в уравнения с вариационными производными первого порядка, с целью нахождения приближенного решения таких уравнений.

Пусть на $[a,b]$ заданы узлы интерполирования $x_0 = x_0(t)$ и $x_1 = x_1(t)$ – функции из некоторого множества X, такие, что $x_0(t) - x_1(t) \neq 0$ для $t \in [a,b]$. Введем обозначения

$$h_{1,0}(x) = \frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^3}\left[x_0 - x_1 + 2(x_0 - x)\right], \quad h_{1,1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^3}\left[x_1 - x_0 + 2(x_1 - x)\right],$$

$$q_{1,0}(x) = \frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}\left(x - x_0\right), \quad q_{1,1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}(x - x_1). \tag{2}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться [13], что для оператора

$$H_3(F;x) = \frac{1}{b-a}\left\{F(x_0)\int_a^b h_{1,0}\left(x(t)\right)dt + F(x_1)\int_a^b h_{1,1}\left(x(t)\right)dt\right\} +$$
$$+\int_a^b \frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)} q_{1,0}\left(x(t)\right)dt + \int_a^b \frac{\delta F(x_1)}{\delta x(t)} q_{1,1}\left(x(t)\right)dt \tag{3}$$

выполняются следующие интерполяционные условия Эрмита для двух двукратных узлов:

$$H_3(F;x_\nu) = F(x_\nu), \quad \frac{\delta H_3(F;x_\nu)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)} \quad (\nu = 0,1). \tag{4}$$

Ниже приведем формулу, аналогичную (3), для случая трех двукратных узлов $x_0 = x_0(t)$, $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ из некоторого функционального пространства X, таких, что разность $x_i(t) - x_j(t) \neq 0$ при $i \neq j$ и $t \in [a,b]$. Для этого введем следующие алгебраические функционалы:

$$q_{2,0}(x) = \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right]^2 (x-x_0), \quad q_{2,1}(x) = \left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right]^2 (x-x_1),$$

$$q_{2,2}(x) = \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right]^2 (x-x_2). \tag{5}$$

Заметим, что значение $q_{2,i}(x_j) = 0 \quad (i, j = 0,1,2)$ для многочленов (5), а для дифференциалов Гато функционалов $q_{2,i}(x)$ в узле x_i справедливы равенства $\delta q_{2,i}[x_i;h] = h,$ при этом в узлах x_j, отличных от x_i, они обращаются в нуль, т. е. $\delta q_{2,i}[x_j;h] = \delta_{ij}h,$ где δ_{ij} – символ Кронекера, $h \in X$.

Далее нам понадобятся кубические алгебраические многочлены

$$h_{2,0}(x) = \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right]^2 - 2\left(\frac{1}{x_0-x_1} + \frac{1}{x_0-x_2}\right)q_{2,0},$$

$$h_{2,1}(x)=\left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right]^2-2\left(\frac{1}{x_1-x_0}+\frac{1}{x_1-x_2}\right)q_{2,1},$$

$$h_{2,2}(x)=\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_0)}\right]^2-2\left(\frac{1}{x_2-x_0}+\frac{1}{x_2-x_1}\right)q_{2,2}. \qquad (6)$$

Несложно убедиться, что многочлены (6) удовлетворяют равенствам $h_{2,i}(x_j)=\delta_{ij}$, а дифференциалы Гато $\delta h_{2,i}[x_j;h]=0 \quad (i,j=0,1,2)$.

Из вышеизложенного следует, что для алгебраического функционала

$$H_5(F;x)=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{2}F(x_k)\int_a^b h_{2,k}\left(x(t)\right)dt+\sum_{k=0}^{2}\int_a^b\frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)}q_{2,k}\left(x(t)\right)dt$$

в узлах $x_i=x_i(t) \quad (i=0,1,2)$ справедливы интерполяционные условия

$$H_5(F;x_i)=F(x_i),\quad \frac{\delta H_5(F;x_i)}{\delta x(t)}=\frac{\delta F(x_i)}{\delta x(t)}\quad (i=0,1,2).$$

Пример 10. Рассмотрим [13] частный случай формулы (3). Пусть $F(x)$ – дифференциальный оператор вида

$$F(x)=\int_a^b f\left[t,x(t),x'(t)\right]dt, \qquad (7)$$

где $f:\left[a,b\right]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x(t)\in X$, а X – пространство $C^{(1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций.

Дифференциал Гато первого порядка в точке x по направлению $h\in X$ от функционала (7) имеет вид

$$\delta F[x;h]=\int_a^b\left[f'_x(t,x,x')-\frac{d}{dt}f'_{x'}(t,x,x')\right]h(t)dt.$$

Отсюда следует, что вариационная производная $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$ равна $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=\frac{\partial f(t,x,x')}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f(t,x,x')}{\partial x'}$ и совпадает с левой частью уравнения Эйлера.

Интерполяционная формула (3) для рассматриваемого функционала примет вид

$$H_3(F;x)=\frac{1}{b-a}\left[F(x_0)\int_a^b h_{1,0}\left(x(t)\right)dt+F(x_1)\int_a^b h_{1,1}\left(x(t)\right)dt\right]+$$

$$+\int_a^b\left[\frac{\partial f(t,x_0,x_0')}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f(t,x_0,x_0')}{\partial x'}\right]q_{1,0}\left(x(t)\right)dt+\int_a^b\left[\frac{\partial f(t,x_1,x_1')}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f(t,x_1,x_1')}{\partial x'}\right]q_{1,1}\left(x(t)\right)dt,$$

где функции $h_{1,0}(x)$, $h_{1,1}(x)$, $q_{1,0}(x)$ и $q_{1,1}(x)$ задаются правилами (2). Для многочлена $H_3(F;x)$ и оператора (7) интерполяционные условия (4) также выполняются.

Далее введем обозначения

$$g_{1,0}(x)=\frac{(x-x_0)(x+x_0-2x_1)}{2(x_0-x_1)},\quad g_{1,1}(x)=\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)},$$

где x и x_i (i = 0,1) – элементы некоторого функционального пространства X, например, $C[a,b]$. Заметим, что $g_{1,0}(x_0)=g_{1,1}(x_0)=0$, а для дифференциалов Гато функционалов $g_{1,0}(x)$ и $g_{1,1}(x)$

в узлах x_0 и x_1 справедливы равенства $\delta g_{1,i}[x_j; h] = \delta_{ij} h \quad (i, j = 0,1),$ где δ_{ij}, как и ранее, – символ Кронекера, $h \in X$.

Непосредственными вычислениями несложно убедиться, что для оператора

$$H_2(F;x) = F(x_0) + \int_a^b \frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)} g_{1,0}\big(x(t)\big)dt + \int_a^b \frac{\delta F(x_1)}{\delta x(t)} g_{1,1}\big(x(t)\big)dt, \tag{8}$$

где $F(x)$ – заданный на X функционал, выполняются следующие интерполяционные условия Эрмита – Биркгофа:

$$H_2(F;x_0) = F(x_0), \quad \frac{\delta H_2(F;x_\nu)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)} \quad (\nu = 0,1).$$

О задаче Коши для уравнений с вариационными производными первого порядка. Применим некоторые из приведенных интерполяционных формул для приближенного решения задачи Коши отдельных дифференциальных уравнений с первыми вариационными производными.

Сначала рассмотрим следующую простейшую задачу Коши:

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = f(x;t), \quad F(x_0) = F_0. \tag{9}$$

Заметим, что $F(x)$ для заданного функционала $f(x;t)$ является его первообразной. Точным решением этой задачи будет функционал

$$F(x) = F_0 + \int_0^1 ds \int_a^b f\big(s(x - x_0) + x_0; t\big)\big(x(t) - x_0(t)\big)dt,$$

так как для него дифференциал Гато задается формулой $\delta F[x;h] = \int_a^b f(x;t)h(t)dt.$

Поскольку

$$F(x_0) = F_0, \quad \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} = f(x_k;t) \quad (k = 0,1),$$

то, используя формулу (8), получим приближенное решение задачи Коши (9) в виде

$$F(x) \approx H_2(F;x) = F_0 + \int_a^b f(x_0;t) g_{1,0}\big(x(t)\big)dt + \int_a^b f(x_1;t) g_{1,1}\big(x(t)\big)dt,$$

для которого выполняются равенства

$$H_2(F;x_0) = F_0, \quad \frac{\delta H_2(F;x_0)}{\delta x(t)} = f(x_0;t), \quad \frac{\delta H_2(F;x_1)}{\delta x(t)} = f(x_1;t).$$

Далее, в случае решения линейного уравнения с функциональными производными первого порядка вида

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = P(x;t)F(x) + Q(x;t)$$

с условием $F(x_0) = F_0$ на основе правила (8) получим

$$F(x) \approx H_2(F;x) = F_0 + \int_a^b \big[P(x_0;t)F_0 + Q(x_0;t)\big] g_{1,0}\big(x(t)\big)dt +$$

$$+ \int_a^b \big[P(x_1;t)F(x_1) + Q(x_1;t)\big] g_{1,1}\big(x(t)\big)dt = F_0 a_0(x) + F(x_1)a_1(x) + c(x), \tag{10}$$

где функционалы $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x)$ определяются равенствами

$$a_0(x)=1+\int_a^b P(x_0;t)g_{1,0}\left(x(t)\right)dt,\quad a_1(x)=\int_a^b P(x_1;t)g_{1,1}\left(x(t)\right)dt,$$

$$c(x)=\int_a^b\left[Q(x_0;t)g_{1,0}\left(x(t)\right)+Q(x_1;t)g_{1,1}\left(x(t)\right)\right]dt.$$

В формуле (10) значение $F(x_1)$ неизвестно. Подставляя в эту формулу x_1 вместо x, получим, что $F_1=F_0a_0(x_1)+F_1a_1(x_1)+c(x_1)$, где $F_1\approx F(x_1)$. Отсюда, в предположении, что значение $1-a_1(x_1)\neq 0$, имеем

$$F_1=\frac{F_0a_0(x_1)+c(x_1)}{1-a_1(x_1)}. \tag{11}$$

Далее, подставив в формулу (10) значение F_1 вместо $F(x_1)$, для $F(x)$ получим приближение

$$F(x)\approx\tilde F(x)=F_0a_0(x)+\frac{F_0a_0(x_1)+c(x_1)}{1-a_1(x_1)}a_1(x)+c(x),$$

при этом $\tilde F(x_0)=F(x_0)$, $\tilde F(x_1)\approx F(x_1)$.

Отметим, что интегралы в равенствах (8) и (9) могут быть вычислены приближенно с помощью каких-либо квадратурных формул.

Пример 11. Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=\frac{e^{x(t)}\sin x(t)}{\int_0^1 e^{x(t)}\sin x(t)dt}F(x)+e^{x(t)}\cos x(t),\quad x\in C[0,1], \tag{12}$$

с начальным условием

$$F_0=F(1)=e\sin 1. \tag{13}$$

Точное решение этого уравнения задается правилом $F(x)=\int_0^1 e^{x(t)}\sin x(t)dt$. Действительно, так как дифференциал $\delta F[x;h]=\int_0^1 e^{x(t)}\left[\sin x(t)+\cos x(t)\right]h(t)dt$, то $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=e^{x(t)}\left[\sin x(t)+\cos x(t)\right]$. Подставляя выражение для функционала $F(x)$ и его вариационной производной $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$ в формулу (12), получим тождество. Кроме того, очевидно, что функционал $F(x)$ удовлетворяет указанному выше начальному условию (13).

Найдем приближенное решение задачи Коши (12)–(13), используя формулу (10). В качестве узлов интерполяции выберем функции $x_0(t)=1$ и $x_1(t)=t$. Так как $P(x;t)=\frac{e^{x(t)}\sin x(t)}{\int_0^1 e^{x(t)}\sin x(t)dt}$, а $Q(x;t)=e^{x(t)}\cos x(t)$, то

$$P(x_0;t)=1,\quad P(x_1;t)=\frac{2e^t\sin t}{1-e(\cos 1-\sin 1)},\quad Q(x_0;t)=e\cos 1,\quad Q(x_1;t)=e^t\cos t,$$

и, следовательно,

$$a_0(x) = 1 + \int_0^1 g_{1,0}\left(x(t)\right)dt, \quad a_1(x) = \int_0^1 \frac{2e^t \sin t}{1 - e\left(\cos 1 - \sin 1\right)} g_{1,1}\left(x(t)\right)dt,$$

$$c(x) = \int_0^1 \left[e \cos 1 \, g_{1,0}\left(x(t)\right) + e^t \cos t \, g_{1,1}\left(x(t)\right) \right] dt,$$

где операторы $g_{1,0}(x(t))$ и $g_{1,1}(x(t))$ для заданных узлов $x_0(t)$ и $x_1(t)$ определяются формулами

$$g_{1,0}(x) = \frac{\left(x(t) - 1\right)\left(x(t) - 2t + 1\right)}{2(1 - t)}, \quad g_{1,1}(x) = \frac{\left(x(t) - 1\right)^2}{2(t - 1)}.$$

Сначала вычислим значения функционалов $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x)$ в узле $x_1 = x_1(t) = t$. Поскольку $g_{1,0}\left(x_1(t)\right) = g_{1,1}\left(x_1(t)\right) = \frac{t-1}{2}$, имеем

$$a_0(x_1) = 1 + \int_0^1 \frac{t-1}{2} dt = \frac{3}{4}, \quad a_1(x_1) = \int_0^1 \frac{e^t \sin t \, (t-1)}{1 - e(\cos 1 - \sin 1)} dt = \frac{0{,}5 e \cos 1 - 1}{1 - e(\cos 1 - \sin 1)},$$

$$c(x_1) = \frac{1}{2} \int_0^1 (e \cos 1 + e^t \cos t)(t - 1) dt = \frac{1 - e(\cos 1 + \sin 1)}{4}.$$

Далее найдем приближенное значение $F(x_1)$ согласно правилу (11):

$$F(x_1) \approx F_1 = \frac{F_0 a_0(x_1) + c(x_1)}{1 - a_1(x_1)} = \frac{\left(e(2 \sin 1 - \cos 1) + 1\right)}{2\left(4 - e(3 \cos 1 - 2 \sin 1)\right)} \left(1 - e(\cos 1 - \sin 1)\right).$$

Следовательно, для искомого приближенного решения задачи Коши (12)–(13) справедливо представление в виде

$$F(x) \approx \tilde{F}(x) = e \sin 1 + e \, (\sin 1 + \cos 1) \int_0^1 g_{1,0}\left(x(t)\right)dt +$$
$$+ \int_0^1 \left[\frac{e(2 \sin 1 - \cos 1) + 1}{4 - e(3 \cos 1 - 2 \sin 1)} \sin t + \cos t \right] e^t g_{1,1}\left(x(t)\right)dt. \tag{14}$$

Используя формулу (14), вычислим приближенное значение функционала $F(x)$ в точке $x(t) = t^{3/5}$. Первый интеграл в равенстве (14) вычисляется точно, но имеет достаточно громоздкое аналитическое выражение. Второй интеграл в равенстве (14) возможно вычислить приближенно на основе некоторой квадратурной формулы. Приближенные значения рассматриваемых интегралов с точностью до последнего приведенного разряда равны

$$I_1 = \int_0^1 g_{1,0}\left(x(t)\right)dt \approx -0{,}232491;$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[\frac{e(2 \sin 1 - \cos 1) + 1}{4 - e(3 \cos 1 - 2 \sin 1)} \sin t + \cos t \right] e^t g_{1,1}\left(x(t)\right)dt \approx -0{,}239137.$$

Следовательно, приближенное значение $F(x)$ при $x(t) = t^{3/5}$ равно

$$F(t^{3/5}) \approx \tilde{F}(t^{3/5}) = e \sin 1 + e \, (\sin 1 + \cos 1) \, I_1 + I_2 \approx 1{,}17497.$$

Учитывая, что точное значение этого функционала в заданной точке (с точностью до последнего приведенного разряда) вычисляется по формуле

$$F(t^{3/5})=\int_0^1 e^{t^{3/5}}\sin t^{3/5}dt\approx 1{,}18755,$$

для абсолютной погрешности приближения получим следующую оценку:

$$\left|F(t^{3/5})-\tilde{F}(t^{3/5})\right|\le 0{,}01258.$$

Далее заметим, что более общей проблемой по сравнению с задачей Коши (9) является совокупность дифференциального уравнения

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=f(F,x;t) \tag{15}$$

с заданным начальным условием $F(x_0)=F_0$, где $f(y_1,y_2;t)$ – функция трех переменных: $y_1,y_2\in\mathbb{R},\ t\in[a,b]$. В частности, функциональным аналогом уравнения Риккати называют равенство

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=P(x;t)F^2(x)+Q(x;t)F(x)+R(x;t).$$

В заключение этого раздела приведем описание общей схемы приближенного решения нелинейного уравнения (15), основанной на использовании аппарата операторного интерполирования.

Предположим, что для функций $f(y_1,y_2;t)$ известны решения $F_\nu(x)$ уравнения (15) в точках $x_\nu(t)$ $(\nu=0,1,...,n)$. Из этого уравнения определяем значение вариационной производной $\frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}$ в точках $x_\nu(t)$ $(\nu=0,1,...,n)$.

По найденным значениям строим интерполяционный операторный многочлен $H_n(F;x)$, для которого выполняются условия

$$H_n(F;x_k)=F(x_k),\quad \frac{\delta H_n(F;x_k)}{\delta x(t)}=\frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)}\quad (k=0,1,...,n).$$

Полученный по данной схеме оператор $H_n(F;x)$ является эрмитовым интерполяционным приближением для решения $F(x)$ уравнения (15).

Отметим, что приведенные здесь интерполяционные формулы применимы и в случае, когда функция $x(t)$ и узлы интерполирования $x_k(t)$ $(k=0,1,...)$ являются случайными процессами. Например, в формуле (8) в качестве $x_0(t)$ и $x_1(t)$ могут быть выбраны случайные процессы $x_0(t)=\alpha_0(t)+\beta(t)W(t),\ x_1(t)=\alpha_1(t)+\beta(t)W(t)$, где $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta(t)$ – детерминированные функции и $\alpha_0(t)\ne\alpha_1(t)$, $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Аналог классической формулы Даламбера для уравнения с вариационными производными. В математической физике простейшим уравнением гиперболического типа является уравнение свободных колебаний однородной струны (волновое уравнение) с частными производными второго порядка относительно функции двух независимых переменных:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=0\quad (a\ne 0,\ t\in\mathbb{R}_+,\ x\in\mathbb{R}). \tag{16}$$

К его исследованию приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т. д. Предварительно приведем некоторые сведения об этом уравнении.

Общим решением (общим интегралом) уравнения (16) является функция

$$u(t,x)=f_1(x+at)+f_2(x-at), \tag{17}$$

каковы бы ни были дважды дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$. Формулу (17) называют формулой Даламбера, или решением Даламбера.

Совокупность уравнения (16) и начальных условий

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x)\quad (x\in\mathbb{R}), \tag{18}$$

где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ – некоторые заданные на $\mathbb{R}$ функции, приводит к задаче Коши для неограниченной струны. Если $x\in[0,l]$, то рассматривается аналогичная задача Коши для конечной струны. Формула

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)\right]+t\int_0^1\varphi_1(2ats+x-at)ds$$

дает классическое решение корректно поставленной задачи Коши (16), (18) в предположении, что функция $\varphi_1(x)$ имеет непрерывно дифференцируемую производную первого порядка, а $\varphi_0(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция до второго порядка включительно.

Аналогом с вариационными производными для уравнения колебания однородной струны (16) является уравнение

$$\frac{\delta^2F(x,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}-a(t)a(s)\frac{\delta^2F(x,y)}{\delta y(t)\delta y(s)}=0\quad \left(x=x(u)\geq 0,\ y=y(u),\ a(u)\neq 0;\ u\in[a,b]\subseteq\mathbb{R}\right). \tag{19}$$

Получим решение дифференциального уравнения с вариационными производными (19), аналогичное классическому решению Даламбера (17).

Т е о р е м а 1. *Общее решение уравнения* (19) *представимо в виде*

$$F(x,y)=f_1\left[\int_a^b\left(y(u)+a(u)x(u)\right)du\right]+f_2\left[\int_a^b\left(y(u)-a(u)x(u)\right)du\right], \tag{20}$$

где $f_1(u)$ и $f_2(u)$ – любые дважды дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 1 сначала вычислим $\delta_x\tilde{F}[(x,y);h]$ – частный дифференциал Гато первого порядка по переменной x от функционала $\tilde{F}(x,y)=$ $=f\left[\int_a^b\left(y(u)\pm a(u)x(u)\right)du\right]$ двух переменных x и y. По определению

$$\delta_x\tilde{F}[(x,y);h]=\left.\frac{\partial\tilde{F}(x+\lambda h,y)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=\frac{\partial}{\partial\lambda}f\left.\left[\int_a^b\left(y(u)\pm a(u)\left(x(u)+\lambda h(u)\right)\right)du\right]\right|_{\lambda=0}=$$

$$=\pm f'\left[\int_a^b\left(y(u)\pm a(u)\left(x(u)+\lambda h(u)\right)\right)du\right]\left.\int_a^b a(t)h(t)dt\right|_{\lambda=0}=$$

$$=\pm f'\left[\int_a^b\left(y(u)\pm a(u)x(u)\right)du\right]\int_a^b a(t)h(t)dt=\int_a^b\pm a(t)f'\left[\int_a^b\left(y(u)\pm a(u)x(u)\right)du\right]h(t)dt.$$

Отметим, что первая вариационная производная $\frac{\delta\tilde{F}(x,y)}{\delta x(t)}$ в этом случае имеет вид

$$\frac{\delta\tilde{F}(x,y)}{\delta x(t)}=\pm a(t)f'\left[\int_a^b\left(y(u)\pm a(u)x(u)\right)du\right].$$

Далее вычислим частный дифференциал Гато второго порядка $\delta^2_{x,x}\tilde{F}[(x,y);h,h_1]$. Снова согласно определению получим

$$\delta^2_{x,x}\tilde{F}[(x,y);h,h_1]=\frac{\partial}{\partial\lambda}\delta_x\tilde{F}[(x+\lambda h_1,y);h]\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=\pm\frac{\partial}{\partial\lambda}f'\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)\big(x(u)+\lambda h_1(u)\big)\big)du\right]\int_a^b a(t)h(t)dt\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=f''\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)\big(x(u)+\lambda h_1(u)\big)\big)du\right]\int_a^b a(t)h(t)dt\int_a^b a(s)h_1(s)ds\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=f''\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]\int_a^b a(t)h(t)dt\int_a^b a(s)h_1(s)ds=$$

$$=\int_a^b\int_a^b f''\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]a(t)a(s)h(t)h_1(s)dt\,ds.$$

Следовательно, вторая вариационная производная $\dfrac{\delta^2\tilde{F}(x,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}$ задается формулой

$$\frac{\delta^2\tilde{F}(x,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}=f''\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]a(t)a(s).$$

Аналогично вычислим частный дифференциал Гато первого порядка $\delta_y\tilde{F}[(x,y);h]$ по переменной y от функционала $\tilde{F}(x,y)$. Имеем

$$\delta_y\tilde{F}[(x,y);h]=\frac{\partial\tilde{F}(x,y+\lambda h)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}=\frac{\partial}{\partial\lambda}f\left[\int_a^b\big(y(u)+\lambda h(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=f'\left[\int_a^b\big(y(u)+\lambda h(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]\int_a^b h(t)dt\Big|_{\lambda=0}=\int_a^b f'\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]h(t)dt.$$

Значит, первая вариационная производная $\dfrac{\delta\tilde{F}(x,y)}{\delta y(t)}$ определяется по правилу

$$\frac{\delta\tilde{F}(x,y)}{\delta y(t)}=f'\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right].$$

Для частного дифференциала Гато второго порядка $\delta^2_{y,y}\tilde{F}[(x,y);h,h_1]$ получим

$$\delta^2_{y,y}\tilde{F}[(x,y);h,h_1]=\frac{\partial}{\partial\lambda}\delta_y\tilde{F}[(x,y+\lambda h_1);h]\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}f'\left[\int_a^b\big(y(u)+\lambda h_1(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]\int_a^b h(t)dt\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=f''\left[\int_a^b\big(y(u)+\lambda h_1(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]\int_a^b h(t)dt\int_a^b h_1(s)ds\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=\int_a^b\int_a^b f''\left[\int_a^b\big(y(u)\pm a(u)x(u)\big)du\right]a(t)a(s)h(t)h_1(s)dt\,ds.$$

Следовательно, вторая вариационная производная

$$\frac{\delta^2 \tilde{F}(x,y)}{\delta y(t)\delta y(s)} = f''\left[\int_a^b \bigl(y(u) \pm a(u)x(u)\bigr)du\right],$$

откуда

$$\frac{\delta^2 \tilde{F}(x,y)}{\delta x(t)\delta x(s)} = a\bigl(t\bigr)a\bigl(s\bigr)\frac{\delta^2 \tilde{F}(x,y)}{\delta y(t)\delta y(s)}.$$

Вычисления, приведенные выше, позволяют утверждать, что функционал (20) представляет собой решение дифференциального уравнения с вариационными производными (19) и является аналогом классической формулы Даламбера (17). Теорема 1 доказана.

В каждом конкретном случае функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ в равенстве (20) выбираются так, чтобы выполнялись начальные (и граничные) условия для решения $F(x,y)$ дифференциального уравнения (19).

Интерполяционные формулы с трехкратными узлами, содержащие вариационные производные. Рассмотрим интерполяционную задачу Эрмита с трехкратными узлами для функционалов, определенных на множествах дифференцируемых функций. При этом в постановке интерполяционной задачи потребуем совпадения в узлах интерполируемого и интерполяционного функционалов, а также их вариационных производных первого и второго порядков. Решение аналогичной задачи Эрмита в случае двукратных узлов было получено авторами в работе [13].

Пусть на множестве функций $X = C[a,b]$ или $X = L_2[a,b]$ определен функционал $F: X \to \mathbb{R}$, для которого известны значения $F(x_\nu)$, значения первых $\dfrac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}$, а также значения вторых вариационных производных $\dfrac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)}$ в узлах $\{x_\nu(u)\}_{\nu=0}^{n} \in X$ $(u \in [a,b])$. Требуется построить интерполяционный многочлен $H_{3n+2}(F;x): X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям

$$H_{3n+2}(F;x_\nu) = F(x_\nu), \tag{21}$$

$$\frac{\delta H_{3n+2}(F;x_\nu)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}, \tag{22}$$

$$\frac{\delta^2 H_{3n+2}(F;x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)}, \tag{23}$$

где $\nu = 0,1,\ldots,n$.

Через $H_{0k}(x)$, $H_{1k}(x)$ и $H_{2k}(x)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ обозначим фундаментальные многочлены относительно произвольной чебышевской системы функций $\{\varphi_j(u)\}_{j=0}^{3n+2} \in X$ в интерполяционной формуле Эрмита с трехкратными узлами $x_\nu \in X$ $(\nu = 0,1,\ldots,n)$. Эти многочлены удовлетворяют условиям $H_{0k}(x_\nu) = H'_{1k}(x_\nu) = H''_{2k}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$, $H'_{0k}(x_\nu) = H''_{0k}(x_\nu) = 0$, $H_{1k}(x_\nu) = H''_{1k}(x_\nu) = 0$, $H_{2k}(x_\nu) = H'_{2k}(x_\nu) = 0$ $(k,\nu = 0,1,\ldots,n)$, где $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера, а соответствующая формула Эрмита для скалярных функций, удовлетворяющая интерполяционным условиям

$$H_{3n+2}(F;x_k) = F(x_k),\quad H'_{3n+2}(F;x_k) = F'(x_k),\quad H''_{3n+2}(F;x_k) = F''(x_k)\quad (k = 0,1,\ldots,n),$$

имеет вид

$$H_{3n+2}(F;x) = \sum_{k=0}^{n}\bigl\{F(x_k)H_{0k}(x) + F'(x_k)H_{1k}(x) + F''(x_k)H_{2k}(x)\bigr\}.$$

Получим аналог этой формулы для случая функционалов.

Теорема 2. *Если для* $F(x)$ *выполнены условия*

$$\frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(s)\delta x(t)} \quad (\nu = 0, 1, ..., n), \tag{24}$$

то функционал

$$H_{3n+2}(F; x) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n} F(x_k)\int_a^b H_{0k}\left(x(t)\right)dt + \sum_{k=0}^{n}\int_a^b \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H_{1k}\left(x(t)\right)dt +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b\int_a^b \frac{\delta^2 F(x_k)}{\delta x(t)\delta x(s)} H'_{2k}\left(x(t)\right)H_{1k}\left(x(s)\right)dtds \tag{25}$$

является для $F(x)$ *эрмитовым интерполяционным многочленом относительно узлов третьей кратности* $\{x_k(t)\}_{k=0}^{n}$ *на* X, *удовлетворяющим требованиям* (21)–(23).

Доказательство. Так как $H_{0k}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$, а $H_{1k}(x_\nu) = H_{2k}(x_\nu) = 0$ для $k, \nu = 0, 1, ..., n,$ то

$$H_{3n+2}(F; x_\nu) = \sum_{k=0}^{n} F(x_k)\delta_{k\nu} = F(x_\nu) \ \ (\nu = 0,1,...,n),$$

т. е. справедливы равенства (21).

Для доказательства соотношений (22) вычислим значения в узлах первых вариационных производных для выражений, стоящих в правой части (25).

Отметим, что дифференциал Гато первого порядка в точке x по направлению $h \in X$ функционала

$$g_{n,k}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b H_{0k}\left(x(t)\right)dt$$

вычисляется по правилу

$$\delta g_{n,k}[x;h] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{d}{dx}\left[H_{0k}\left(x(t)\right)\right]h(t)dt.$$

Следовательно, первая вариационная производная от этого функционала задается равенством

$$\frac{\delta g_{n,k}(x)}{\delta x(t)} = \frac{H'_{0k}(x)}{b-a}.$$

Поскольку $H'_{0k}(x_\nu) = 0$ для $k, \nu = 0, 1, ..., n,$ то при $x = x_\nu$ производная $\frac{\delta}{\delta x(t)}$ от первой группы слагаемых в правой части (25) равна нулю.

Далее, производная

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\int_a^b \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H_{1k}\left(x(t)\right)dt = \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H'_{1k}(x),$$

причем $H'_{1k}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$ для $k, \nu = 0, 1, ..., n.$ Следовательно, при $x = x_\nu$ вариационная производная $\frac{\delta}{\delta x(t)}$ от второй группы слагаемых равна

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)}\delta_{k\nu} = \frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}.$$

Производная $\dfrac{\delta}{\delta x(t)}$ от третьей группы слагаемых вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\delta}{\delta x(t)}\int_a^b\int_a^b\frac{\delta^2F(x_k)}{\delta x(t)\delta x(s)}\left\{H''_{2k}\left(x(t)\right)H_{1k}\left(x(s)\right)+H'_{2k}\left(x(t)\right)H'_{1k}\left(x(s)\right)\right\}dtds.$$

С учетом равенств $H_{1k}(x_\nu)=H'_{2k}(x_\nu)=0$, справедливых для значений $k,\nu=0,1,...,n$, получим, что при $x=x_\nu$ рассматриваемая производная равна нулю. Таким образом, приходим к соотношениям (22).

Для проверки условий (23) вычислим дифференциал Гато второго порядка $\delta^2H_{3n+2}[x;h_1,h_2]$. Имеем

$$\delta^2H_{3n+2}[x;h_1,h_2]=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n}F(x_k)\int_a^b H''_{0k}\left(x(t)\right)h_1(t)h_2(t)dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\int_a^b\frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)}H''_{1k}\left(x(t)\right)h_1(t)h_2(t)dt+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b\int_a^b\frac{\delta^2F(x_k)}{\delta x(t)\delta x(s)}\times$$

$$\times\left\{H'''_{2k}\left(x(t)\right)H_{1k}\left(x(s)\right)h_1(t)h_2(t)+H''_{2k}\left(x(t)\right)H'_{1k}\left(x(s)\right)h_1(t)h_2(s)+\right.$$

$$\left.+H''_{2k}((x(t))H'_{1k}\left(x(s)\right)h_1(s)h_2(t)+H'_{2k}\left(x(t)\right)H''_{1k}\left(x(s)\right)h_1(s)h_2(s)\right\}dtds.$$

Если $x=x_\nu$, то $H''_{0k}(x_\nu)=H''_{1k}(x_\nu)=H_{1k}(x_\nu)=0$, $H''_{2k}(x_\nu)=H'_{1k}(x_\nu)=\delta_{k\nu}$ и

$$\delta^2H_{3n+2}[x_\nu;h_1,h_2]=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\frac{\delta^2F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)}h_1(t)h_2(s)dtds+\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\frac{\delta^2F(x_k)}{\delta x(t)\delta x(s)}h_1(s)h_2(t)dtds.$$

Отсюда, учитывая свойство (24), приходим к равенствам (23). Теорема 2 доказана.

В частности, фундаментальные многочлены Эрмита относительно узлов $\{x_\nu(u)\}_{\nu=0}^{n}\in X$ третьей кратности в случае алгебраической системы функций $\{\varphi_j(u)=x^j(u)\}_{j=0}^{3n+2}\in X$ имеют вид

$$H_{0k}(x)=l_k^3(x)\left[1-\frac{3\omega''_n(x_k)}{2\omega'_n(x_k)}(x-x_k)+\left\{\frac{3[\omega''_n(x_k)]^2}{2[\omega'_n(x_k)]^2}-\frac{\omega'''_n(x_k)}{2\omega'_n(x_k)}\right\}(x-x_k)^2\right],$$

$$H_{1k}(x)=l_k^3(x)\left[1-\frac{3\omega''_n(x_k)}{2\omega'_n(x_k)}(x-x_k)\right](x-x_k),\quad H_{2k}(x)=\frac{1}{2}l_k^3(x)(x-x_k)^2,$$

где

$$l_k(x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k)(x-x_k)},\quad \omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n);$$

$$x=x(u),\,x_k=x_k(u)\quad(k=0,1,...,n);\ \ x_i(u)\neq x_j(u),\ \ i\neq j;\ \ u\in[a,b].$$

Отсюда, в случае единственного узла интерполирования $x_0(u)\in X$, получим

$$n=0,\quad \omega_0(x)=x-x_0,\quad l_0(x)=H_{00}(x)\equiv1,\quad H_{10}(x)=x-x_0,\quad H_{20}(x)=\frac{1}{2}(x-x_0)^2,$$

и, следовательно, функционал (25) и условия (21)–(23) примут соответственно вид

$$H_2(F;x)=F(x_0)+\int_a^b\frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)}\left(x(t)-x_0(t)\right)dt+\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\frac{\delta^2F(x_0)}{\delta x(t)\delta x(s)}\left(x(t)-x_0(t)\right)\left(x(s)-x_0(s)\right)dtds,\qquad(26)$$

$$H_2(F;x_0)=F(x_0),\quad \frac{\delta H_2(F;x_0)}{\delta x(t)}=\frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)},\quad \frac{\delta^2 H_2(F;x_0)}{\delta x(t)\delta x(s)}=\frac{\delta^2 F(x_0)}{\delta x(t)\delta x(s)}. \tag{27}$$

Пусть на множестве функций $X,Y=C[a,b]$ или $X,Y=L_2[a,b]$ определен функционал $F: X\times Y\to\mathbb{R}$, для которого в точках $\{x_\nu(u),y(v)\}_{\nu=0}^n\in X\times Y$ $(u,v\in[a,b])$ известны значения $F(x_\nu,y)$, а также значения первых $\frac{\delta F(x_\nu,y)}{\delta x(t)}$ и вторых вариационных производных $\frac{\delta^2 F(x_\nu,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}$ по переменной $x\in X$.

Воспользуемся формулой Эрмита (26), построенной для функционалов одной переменной и удовлетворяющей равенствам (27), чтобы сформулировать следующий аналогичный результат в случае интерполирования функционалов $F(x,y)$ по одной из двух переменных.

Следствие. *Если для* $F(x,y)$ *выполнены условия*

$$\frac{\delta^2 F(x_\nu,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}=\frac{\delta^2 F(x_\nu,y)}{\delta x(s)\delta x(t)}\quad (\nu=0,1,\dots,n), \tag{28}$$

то функционал

$$H_2(F;x,y)=F(x_0,y)+$$
$$+\int_a^b \frac{\delta F(x_0,y)}{\delta x(t)}\big(x(t)-x_0(t)\big)dt+\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}\big(x(t)-x_0(t)\big)\big(x(s)-x_0(s)\big)dtds \tag{29}$$

является для $F(x,y)$ *эрмитовым интерполяционным многочленом по переменной* x *относительно узла* $x_0(t)$ *третьей кратности на* X, *удовлетворяющим требованиям*

$$H_2(F;x_0,y)=F(x_0,y),\quad \frac{\delta H_2(F;x_0,y)}{\delta x(t)}=\frac{\delta F(x_0,y)}{\delta x(t)},\quad \frac{\delta^2 H_2(F;x_0,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}=\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}.$$

Решение задачи Коши с вариационными производными для уравнений гиперболического типа. Задача Коши с вариационными производными для уравнения колебания однородной струны представляет собой совокупность уравнения (19) и начальных условий

$$F(x_0,y)=F_0(y),\quad \frac{\delta F(x_0,y)}{\delta x}=F_1(y), \tag{30}$$

где $F_0(y)$ и $F_1(y)$ – некоторые функционалы, заданные на множестве Y.

Используя интерполяционную формулу (29), построим приближенное решение задачи Коши (19), (30).

Теорема 3. В *случае выполнения условия* (28) *решение* $F(x,y)$ *задачи* (19), (30) *может быть представлено в виде*

$$F(x,y)\approx F_0(y)+F_1(y)\int_a^b\big(x(t)-x_0(t)\big)dt+\frac{a(\tau_1)a(\tau_2)}{2}F_0''(y)\big(x(\tau_1)-x_0(\tau_1)\big)\big(x(\tau_2)-x_0(\tau_2)\big). \tag{31}$$

Доказательство. В силу равенства (29) имеем

$$H_2(F;x,y)=F_0(y)+\int_a^b F_1(y)\big(x(t)-x_0(t)\big)dt+\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}\big(x(t)-x_0(t)\big)\big(x(s)-x_0(s)\big)dtds. \tag{32}$$

При этом в формуле (32) значение $\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta x(t)\delta x(s)}$ неизвестно, однако согласно уравнению (19) для него справедливо равенство

$$\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta x(t)\delta x(s)} = a(t)a(s)\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta y(t)\delta y(s)}.$$

Следовательно, функционал (32) можно представить в эквивалентном виде

$$H_2(F;x,y) = F_0(y) +$$

$$+\int_a^b F_1(y)\big(x(t)-x_0(t)\big)dt + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b a(t)a(s)\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta y(t)\delta y(s)}\big(x(t)-x_0(t)\big)\big(x(s)-x_0(s)\big)dtds. \quad (33)$$

Найдем приближенное значение $\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta y(t)\delta y(s)}$. Для этого вычислим дифференциал второго порядка по переменной y от функционала (33) в точке (x_0,y). Имеем $\delta^2_{y,y}H_2[(x_0,y);h_1,h_2] = F_0''(y)h_1(\tau_1)h_2(\tau_2)$.

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ +\infty, & t = 0, \end{cases}$$

представим $h_1(\tau_1)$ и $h_2(\tau_2)$ в виде следующих интегралов:

$$h_1(\tau_1) = \int_a^b \delta(t-\tau_1)h_1(t)dt, \quad h_2(\tau_2) = \int_a^b \delta(s-\tau_2)h_2(s)ds.$$

В результате получим, что

$$\delta^2_{y,y}H_2\big[(x_0,y);h_1,h_2\big] = \int_a^b\int_a^b F_0''(y)\delta(t-\tau_1)\delta(s-\tau_2)h_1(t)h_2(s)dtds,$$

а функциональная производная (по подпространству)

$$\frac{\delta^2 F(x_0,y)}{\delta y(t)\delta y(s)} \approx \frac{\delta^2 H_2(F;x_0,y)}{\delta y(t)\delta y(s)} = F_0''(y)\delta(t-\tau_1)\delta(s-\tau_2).$$

Следовательно, равенство (33) примет вид

$$H_2(F;x,y) = F_0(y) + \int_a^b F_1(y)\big(x(t)-x_0(t)\big)dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b a(t)a(s)F_0''(y)\delta(t-\tau_1)\delta(s-\tau_2)\big(x(t)-x_0(t)\big)\big(x(s)-x_0(s)\big)dtds.$$

Далее, учитывая, что

$$\int_a^b a(t)\big(x(t)-x_0(t)\big)\delta(t-\tau_1)dt = a(\tau_1)\big(x(\tau_1)-x_0(\tau_1)\big),$$

$$\int_a^b a(s)\big(x(s)-x_0(s)\big)\delta(s-\tau_2)ds = a(\tau_2)\big(x(\tau_2)-x_0(\tau_2)\big),$$

приходим к приближенной формуле (31). Теорема 3 доказана.

В заключение отметим, что в [14–17] построены интерполяционные многочлены для обыкновенных дифференциальных операторов, заданных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций, а также для дифференциальных операторов в частных производных, определенных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций многих переменных. Полученные интерполяционные формулы имеют различную структуру и содержат интегралы Стилтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора.

Результаты, представленные в данной работе, могут служить основой дальнейших исследований недостаточно разработанной теории дифференциальных уравнений с вариационными производными, а также могут быть использованы для построения приближенных методов решения некоторых линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков, встречающихся в различных прикладных областях и математической физике.

Список использованных источников

1. Леви, П. Конкретные проблемы функционального анализа / П. Леви. – М.: Наука, 1967. – 510 с.

2. Вайнберг, М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М. М. Вайнберг. – М.: Гостехиздат, 1956. – 345 с.

3. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтера. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

4. Далецкий, Ю. Л. Дифференциальные уравнения с функциональными производными и стохастические уравнения для обобщенных случайных процессов / Ю. Л. Далецкий // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 166, № 5. – С. 1035–1038.

5. Задорожний, В. Г. О дифференциальных уравнениях второго порядка в вариационных производных / В. Г. Задорожний // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 1679–1683.

6. Данилович, В. П. Формула Коши для линейных уравнений с функциональными производными / В. П. Данилович, И. М. Ковальчик // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 8. – С. 1509–1511.

7. Ковальчик, И. М. Представление решений некоторых уравнений с функциональными производными с помощью интегралов Винера / И. М. Ковальчик // Докл. АН УССР. Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки. – 1978. – Т. 12. – С. 1079–1083.

8. Ковальчик, И. М. Линейные уравнения с функциональными производными / И. М. Ковальчик // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 194, № 4. – С. 763–766.

9. Далецкий, Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения / Ю. Л. Далецкий // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 4 (136). – С. 3–54.

10. Авербух, В. И. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах / В. И. Авербух, О. Г. Смолянов // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 6 (138). – С. 201–260.

11. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – 516 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. – Vol. 83: Математика та ії застосування).

12. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

13. Янович, Л. А. Интерполяционные функциональные многочлены ньютонова типа с двукратными узлами / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – С. 229–240.

14. Янович, Л. А. Об одном классе интерполяционных многочленов для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Мат. моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 90–96.

15. Янович, Л. А. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 7–23.

16. Игнатенко, М. В. К теории интерполирования дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 25, № 2. – С. 11–20.

17. Игнатенко, М. В. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 149–163. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163

References

1. Lévy P. *Concrete Problems of Functional Analysis.* Moscow, Nauka Publ., 1967. 510 p. (in Russian).

2. Vainberg M. M. *Variational Methods for Investigation of Non-linear Operators.* Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956. 345 p. (in Russian.).

3. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations.* New York, Dover Publ., 2005. 288 p.

4. Daletsky Yu. L. Differential Equations with Functional Derivatives and Stochastic Equations for Generalized Random Processes. *Doklady academii nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of USSR*, 1966, vol. 166, no. 5, pp. 1035–1038 (in Russian).

5. Zadorozhniy V. G. Second-order Differential Equations with Variational Derivatives. *Differentsial'nyye uravneniya = Differential equations*, 1989, vol. 25, no. 10, pp. 1679–1683 (in Russian).

6. Danilovich V. P. Kovalchik I. M. Cauchy Formula for Linear Equations with Functional Derivatives. *Differentsial'nyye uravneniya = Differential equations*, 1977, vol. 13, no. 8, pp. 1509–1511 (in Russian).

7. Kovalchik I. M. Representation of Solutions of Certain Equations with Functional Derivatives Using Wiener Integrals. *Doklady academii nauk Ukraïni. Seriya A. Fiziko-matematicheskiye i tekhnicheskiye nauki = Doklady of the Academy of Sciences of Ukraine. Series A. Physical, Mathematical, and Technical Sciences*, 1978, vol. 12, pp. 1079–1083 (in Russian).

8. Kovalchik I. M. Linear Equations with Functional Derivatives. *Doklady academii nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of USSR*, 1970, vol. 194, no. 4, pp. 763–766 (in Russian).

9. Daletskii Yu. L. Infinite-dimensional Elliptic Operators and Parabolic Equations Connected with them. *Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 4, pp. 1–53. https://doi.org/10.1070/rm1967v022n04abeh003769

10. Averbukh V. I., Smolyanov O. G. The Theory of Differentiation in Linear Topological Spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 6, pp. 201–258. https://doi.org/10.1070/rm1967v022n06abeh003761

11. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 83: Mathematics and its Applications.* Kiev, 2010. 516 p.

12. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the Theory of Interpolation of Functions of Matrix ariables.* Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2016. 281 p. (in Russian.).

13. Yanovich, L. A., Ignatenko M. V. Newton-Type Interpolation Functional Polynomials with nodes of the second multiplicity. *Analiticheskiye metody analiza i differentsial'nykh uravneniy. Sbornik nauchnykh trudov = Analytical methods of analysis and differential equations. Collection of Sceintific Papers.* Minsk, Belarussian State University, 2012, pp. 229–240 (in Russian).

14. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of interpolation polynomials for nonlinear ordinary differential operators. *Matematicheskoe Modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 11, pp. 90–96 (in Russian).

15. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. To the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 2, pp. 7–23 (in Russian).

16. Ignatenko M. V. To the interpolation theory of diferential operators of arbitrary order in partial derivatives. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noy akademii nauk Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).

17. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. Generalized interpolation Hermite – Birkhoff polynomials for arbitrary-order partial differential operators. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 149–163 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163

Информация об авторах

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Янович Леонид Александрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Information about the authors

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Leonid A. Yanovich – Corresponding Member, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanovich@im.bas-net.by