ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ИНФОРМАТИКА
INFORMATICS

УДК 519.6 Поступила в редакцию 19.12.2019
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-114-126 Received 19.12.2019

П. И. Соболевский, С. В. Баханович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

АНАЛИЗ ГЛОБАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ГЕКСАГОНАЛЬНОМ ТАЙЛИНГЕ

Аннотация. Техника тайлинга широко применяется на практике для решения задач эффективного использования многоуровневой памяти и оптимизации обменов данными при разработке как последовательных, так и параллельных программ. В работе исследуется задача получения глобальных, уровня тайлов, зависимостей. Задача решается в контексте применения параметризованного гексагонального тайлинга к алгоритмам с двумерной областью вычислений. Приведено формализованное определение гексагонального тайла, а также представлены критерии плотного покрытия области вычислений гексагональными тайлами. Сформулировано и доказано утверждение, позволяющее получить все глобальные зависимости между тайлами. Построены формулы, дающие возможность определить множества итераций гексагональных тайлов, порождающих эти зависимости. Множества итераций, порождающих глобальные зависимости, получены в виде многогранников с явным выражением их границ.

Ключевые слова: тайлинг, гексагональный тайлинг, тайл, оптимизация программ, суперкомпьютер

Для цитирования. Соболевский, П. И. Анализ глобальных зависимостей в гексагональном тайлинге / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 114–126. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-114-126

Pavel I. Sobolevsky, Sergey V. Bakhanovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

GLOBAL DEPENDENCES IN HEXAGONAL TILING

Abstract. Tiling is a widely used technique to solve the problems of the efficient use of multilevel memory and optimize data exchanges when developing both sequential and parallel programs. This paper investigates the problem of obtaining global dependencies, i.e. informational dependencies between tiles. The problem is solved in the context of parametrized hexagonal tiling in application to algorithms with a two-dimensional computational domain. The paper includes a formalized definition of the hexagonal tile and the criteria for dense coverage of the computational domain with hexagonal tiles. Herein, we have formulated a statement that permits to obtain all global dependencies between tiles. Formulas are constructed for the determination of sets of iterations of hexagonal tiles generating these dependencies. The sets of iterations that generate global dependencies are obtained in the form of polyhedra with an explicit expression of their boundaries.

Keywords: tiling, hexagonal tiling, tile, code optimization, supercomputer

For citation. Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V. Global dependences in hexagonal tiling. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 114–126 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-114-126

Введение. Для решения задач эффективного использования многоуровневой памяти и оптимизации обменов данными при разработке программных продуктов на практике широко применяется техника тайлинга [1–5]. Суть тайлинга состоит в увеличении зернистости алгоритма: множество операций алгоритма разбивается на группы-тайлы, каждый тайл рассматривается как зерно вычислений или макрооперация.

Традиционно техника тайлинга основана на использовании тайлов в форме n-мерных параллелепипедов. Техника постоянно развивается, и одним из ее перспективных направлений является идея использования тайлов гексагональной формы [6]. Применение гексагональных тайлов для ряда паралельных алгоритмов дает возможность оптимизировать коммуникации более эффективно, чем это позволяет сделать классический тайлинг. Перспективность гексагонального тайлинга делает актуальной задачу разработки данной техники. Особое значение приобретает решение указанной задачи в рамках формализованного подхода – на базе строгого математического аппарата. Поскольку тайлинг – это преобразование алгоритма, то математический подход автоматически гарантирует его корректность. Кроме того, формализация обеспечивает большую вариативность тайлинга и, что не менее важно, дает возможность его интеграции в компиляторы последовательных и параллельных программ.

Техника тайлинга предполагает последовательное решение следующих задач: определение конфигурации тайлов, плотное покрытие ими области вычислений алгоритма, определение глобальных, уровня макроопераций-тайлов, зависимостей и, наконец, преобразование алгоритма − установление порядка выполнения макроопераций алгоритма и порядка выполнения операций внутри тайлов. В [7] предложен формализованный подход к разработке техники гексагонального тайлинга: представлено формальное определение параметризованного гексагонального тайлинга, а также получены необходимые и достаточные условия плотного покрытия области вычислений гексагональными тайлами. Настоящая статья является продолжением работы [7] и посвящена решению задачи определения глобальных зависимостей между гексагональными тайлами. Основным результатом являются формулы для определения зависимостей между тайлами. Кроме того, получены формальные представления множеств итераций, порождающих эти зависимости, в виде многогранников с явным выражением их границ.

Гексагональный тайлинг. Будем предполагать, что область вычислений алгоритма (индексное множество) V – выпуклый многоугольник, состоящий из точек $J(J_1, J_2) \in Z^2$ с целочисленными координатами. Областью вычислений такого вида, например, чаще всего характеризуются алгоритмы (программы), заданные в виде тесновложенных гнезд циклов. Каждой операции алгоритма ставится в соответствие точка многомерного целочисленного пространства. Размерность пространства определяется глубиной вложенных циклов программы. Координаты точки, как правило, – это упорядоченный набор значений счетчиков циклов, при которых выполняется операция алгоритма. Множество всех таких точек образует область вычисления алгоритма.

Основу теории гексагонального тайлинга составляет покрытие пространства Z^2, в том числе области вычислений V, гексагональными тайлами – выпуклыми шестиугольниками с тремя парами параллельных и равных сторон. В [7] представлено формальное определение гексагонального тайла как множества точек целочисленного пространства Z^2 в виде

$$\begin{gathered}
T_6 = \Big\{ J \in Z^2 \mid \vec{0} \le H^{(1)}\left(J - J^{(1)}\right) \le H^{(1)}\left(J^{(4)} - J^{(1)}\right) = \vec{R}^{(1)} - \vec{1}, \\
\vec{0} \le H^{(2)}\left(J - J^{(2)}\right) \le H^{(2)}\left(J^{(5)} - J^{(2)}\right) = \vec{R}^{(2)} - \vec{1}, \\
H^{(k)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(1)} & 0 \\ h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{h}_1^{(1)} \\ \vec{h}_2^{(k)} \end{pmatrix} \in Z^{2\times 2}, \quad h_{11}^{(1)} = h_{22}^{(2)} = 1, \quad h_{22}^{(1)} = -1, \quad J^{(2)} = J^{(1)} + \left(0, \omega_0\right), \\
\omega_0 = 0{,}5\left(r_2^{(1)} - 1 + r_2^{(2)} - 1 - \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right)\left(r_1^{(1)} - 1\right)\right), \quad 0 < \omega_0 < \min\left\{r_2^{(1)}, r_2^{(2)}\right\} - 1 \Big\},
\end{gathered} \tag{1}$$

где точки $J^{(i)} \in Z^2$, $1 \le i \le 6$, являются вершинами шестиугольника (нумерация по часовой стрелке), а унимодулярные матрицы $H^{(k)}$ и векторы $\vec{R}^{(k)}$, $k = 1, 2$, – параметрами, определяющими форму и размеры гексагонального тайла. Фактически тайл образован пересечением двух параллелограммов, заданных двумя нижними треугольными матрицами $H^{(k)}$, $k = 1, 2$, и двумя векторами

$$\vec{R}^{(k)} = \left(r_1^{(1)}, r_2^{(k)}\right) \in Z^2, \quad 1 \le r_i^{(k)} \le \max_{J \in V} \vec{h}_i^{(k)} J - \min_{J \in V} \vec{h}_i^{(k)} J + 1, \quad k = 1, 2.$$

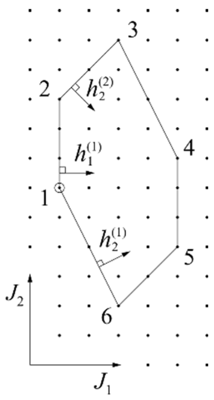

Рис. 1. Гексагональный тайл T_6

Fig. 1. Hexagonal tile T_6

Отметим, что в определении (1) явно присутствуют не все вершины тайла. Вершины $J^{(3)}$ и $J^{(6)}$ присутствуют в нем неявно, как точки пересечения сторон параллелограммов. Вариант гексагонального тайла, определяемого таким образом, изображен на рис. 1.

Матрицы $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ составлены построчно из координат нормальных векторов $\vec{h}_i^{(k)}$, $1 \le i, k \le 2$, прямых, на которых расположены стороны параллелограммов. Векторы $\vec{R}^{(1)}$ и $\vec{R}^{(2)}$ определяют размеры параллелограммов, в то время как матрицы $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ задают их форму и ориентацию на плоскости. Точки $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ являются точками привязки параллелограммов к плоскости и связаны равенством $J^{(2)} = J^{(1)} + (0, \omega_0)$, где ω_0 – положительный целочисленный параметр, определяющий смещение параллелограмма с матрицей $H^{(2)}$ относительно параллелограмма с матрицей $H^{(1)}$ вдоль прямой с нормальным вектором $\vec{h}_1^{(1)}$. Значение параметра ω_0 влияет на соотношение между длинами параллельных сторон получаемого шестиугольника-тайла. Значение смещения $(0,\omega_0)$, при котором достигается необходимое по определению гексагонального тайла равенство его параллельных сторон, определяется через параметры $H^{(k)}$ и $\vec{R}^{(k)}$, $k = 1,2$:

$$(0,\omega_0) = 0,5\left(\left(H^{(1)}\right)^{-1}\left(\vec{R}^{(1)} - \vec{1}\right) - \left(H^{(2)}\right)^{-1}\left(\vec{R}^{(2)} - \vec{1}\right)\right) =$$

$$= 0,5\left(0, r_2^{(1)} - 1 + r_2^{(2)} - 1 - \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right)\left(r_1^{(1)} - 1\right)\right).$$

После определения конфигурации тайлов далее необходимо осуществить покрытие ими пространства Z^2 и, тем самым, области вычислений V. Покрытие тайлами осуществляется с полным сохранением их конфигурации, при этом каждый тайл получает свой уникальный идентификатор (индекс) $J^{gl} \in Z^2$. Данный идентификатор необходим для определения глобальных зависимостей между тайлами, установления отношения соседства между ними и, в целом, порядка выполнения тайлов как макроопераций при конечном преобразовании алгоритма. О том, каким образом задаются J^{gl}, будет сказано ниже.

По аналогии с традиционным тайлингом вводится понятие начальной вершины тайла. В данном случае начальной вершиной гексагонального тайла будем называть точку $J^{(1)}$. Начальная вершина фактически является точкой привязки тайла к плоскости (в пространстве Z^2). Тогда, с формальной точки зрения, покрытие пространства Z^2 тайлами вида (1) можно задать аффинной функцией вида

$$J^{(1)}(J^{gl}) = J^{\vec{0}} + PJ^{gl}, \quad J^{gl} \in Z^2. \tag{2}$$

Функция вида (2) устанавливает соответствие между идентификаторами тайлов и их начальными вершинами. Другими словами, данная функция для каждого тайла определяет точку его привязки в пространстве Z^2. Функция, задающая покрытие, характеризуется двумя параметрами $J^{\vec{0}} \in Z^2$ и $P \in Z^{2\times 2}$. Точка $J^{\vec{0}}$ по существу есть начальная вершина «нулевого» тайла ($J^{gl} = \vec{0}$). Невырожденная матрица P является ключевым параметром, поскольку определяет положение тайлов относительно друг друга. Именно от выбора этой матрицы зависит плотность укладки. Таким образом, гексагональные тайлы вида (1) вместе с аффинной функцией (2), при выбранных параметрах $H^{(k)}$, $\vec{R}^{(k)}$, $J^{\vec{0}}$ и P, определяют гексагональный тайлинг в пространстве Z^2.

В соответствии с определением гексагонального тайла в виде (1) каждая вершина $J^{(i)}(J^{gl})$ шестиугольника $T_6(J^{gl})$ может быть получена из начальной вершины путем ее сдвига на вектор $\vec{\lambda}^{(i)} = \lambda_1^{(i)}\left(0,1\right) + \lambda_2^{(i)}\left(1,-h_{21}^{(1)}\right)$:

$$J^{(i)}(J^{gl}) = J^{(1)}(J^{gl}) + \lambda_1^{(i)}(0,1) + \lambda_2^{(i)}\left(1,-h_{21}^{(1)}\right) = J^{(1)}(J^{gl}) + (H^{(1)})^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_2^{(i)} \\ \lambda_1^{(i)}\end{pmatrix}, \quad 2 \le i \le 6,$$

где

$$\lambda_1^{(2)} = \omega_0, \quad \lambda_2^{(2)} = 0; \quad \lambda_1^{(3)} = r_2^{(1)} - 1, \quad \lambda_2^{(3)} = \left(r_2^{(1)} - \omega_0 - 1\right) / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right);$$

$$\lambda_1^{(4)} = r_2^{(1)} - 1, \quad \lambda_2^{(4)} = r_1^{(1)} - 1; \quad \lambda_1^{(5)} = r_2^{(1)} - \omega_0 - 1, \quad \lambda_2^{(5)} = r_1^{(1)} - 1;$$

$$\lambda_1^{(6)} = 0, \quad \lambda_2^{(6)} = \left(r_2^{(2)} - \omega_0 - 1\right) / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right).$$

Из данного представления следует, что если выполняется условие

$$\frac{r_2^{(2)} - \omega_0 - 1}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}} \in Z, \quad \frac{r_2^{(1)} - \omega_0 - 1}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}} \in Z, \tag{3}$$

то координаты всех вершин гексагональных тайлов в покрытии будут иметь целочисленные координаты. Множество всех целочисленных точек гексагонального тайла (1) с учетом определенных выше параметров тайлинга теперь может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} T_6(J^{gl}) = \left\{ J \in Z^2 \mid \vec{0} \le H^{(1)}\left(J - J^{(1)}(J^{gl})\right) \le \left(\vec{R}^{(1)} - \vec{1}\right), \right. \\ \left. -(0,\omega_0) \le H^{(2)}\left(J - J^{(1)}(J^{gl})\right) \le \left(\vec{R}^{(2)} - \vec{1}\right) - (0,\omega_0) \right\} \end{gathered} \tag{4}$$

или в развернутом виде с явным определением границ

$$\begin{gathered} T_6(J^{gl}) = \left\{ J \in Z^2 \mid J_1^{(1)}(J^{gl}) \le J_1 \le J_1^{(1)}(J^{gl}) + r_1^{(1)} - 1, \right. \\ J_2^{(1)}(J^{gl}) + \max\left(h_{21}^{(1)}\left(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1\right), \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - h_{21}^{(2)}\left(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1\right)\right) \le J_2 \le \\ \left. \le J_2^{(1)}(J^{gl}) + \min\left(r_2^{(1)} - 1 + h_{21}^{(1)}\left(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1\right), \omega_0 - h_{21}^{(2)}\left(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1\right)\right) \right\}, \end{gathered}$$

Плотные покрытия. Для преобразования алгоритма посредством техники тайлинга необходимо получить плотное покрытие тайлами области вычислений. Пусть конфигурация гексагональных тайлов задана в соответствии с определением (1), причем параметры тайлинга дополнительно удовлетворяют условию (3). В работе [7] для такого вида тайлов представлено решение задачи плотного покрытия, которое заключается в нахождении матрицы P, обеспечивающей посредством отображения вида (2) плотную укладку тайлов на плоскости.

Определение 1. *Покрытие пространства Z^2, а следовательно, и области вычислений $V \subset Z^2$, непересекающимися тайлами, будем называть плотным, если для любой точки $J \in Z^2$ существует единственный тайл в покрытии, которому эта точка принадлежит.*

Формализованное решение задачи плотной укладки непосредственно зависит от выбора направлений идентификации тайлов индексами J^{gl}. Направления идентификации тайлов, в свою очередь, определяют порядок выполнения операций конечного алгоритма на уровне макроопераций. Выбор направлений осуществляется с использованием понятия соседства на множестве тайлов.

Зафиксируем векторы $\vec{\xi}_1^{(1)}$, $\vec{\xi}_2^{(1)}$ и $\vec{\xi}_2^{(2)}$ с координатами, по модулю не превосходящими единицы, и такие, что $\vec{\xi}_2^{(2)} = \vec{\xi}_1^{(1)} - \vec{\xi}_2^{(1)}$.

Определение 2. *Соседними к заданному тайлу $T_6(J^{gl})$ будем называть тайлы $T_6\left(J^{gl} + \vec{\xi}_1^{(1)}\right)$, $T_6\left(J^{gl} + \vec{\xi}_2^{(1)}\right)$ и $T_6\left(J^{gl} + \vec{\xi}_2^{(2)}\right)$ начальные вершины которых удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned}
&\vec{h}_1^{(1)}\left(J^{(1)}\left(J^{gl} + \vec{\xi}_1^{(1)}\right) - J^{(1)}(J^{gl})\right) = r_1^{(1)},\\
&\vec{h}_2^{(1)}\left(J^{(1)}\left(J^{gl} + \vec{\xi}_2^{(1)}\right) - J^{(1)}(J^{gl})\right) = r_2^{(1)},\\
&\vec{h}_2^{(2)}\left(J^{(1)}\left(J^{gl} + \vec{\xi}_2^{(2)}\right) - J^{(1)}(J^{gl})\right) = r_2^{(2)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Данное определение фактически устанавливает, что соседними к текущему тайлу $T_6(J^{gl})$ являются ближайшие тайлы по направлениям $\vec{\xi}_1^{(1)}$, $\vec{\xi}_2^{(1)}$ и $\vec{\xi}_2^{(2)}$ на множестве индексов тайлов. При этом направления, определяющие соседние тайлы, связаны с нормальными векторами прямых, на которых лежат стороны тайла. В плотных покрытиях соседние тайлы являются граничными к текущему в направлениях $\vec{h}_1^{(1)}$, $\vec{h}_2^{(1)}$ и $\vec{h}_2^{(2)}$.

Существует множество вариантов идентификации тайлов, обусловленных разнообразием связей направлений $\vec{\xi}_j^{(i)}$ с нормалями $\vec{h}_j^{(i)}$. В свою очередь решение задачи плотной укладки зависит от конкретного ее выбора. Далее выберем и зафиксируем один из вариантов идентификации: $\vec{\xi}_1^{(1)} = e_1 + e_2$, $\vec{\xi}_2^{(1)} = e_2$ и $\vec{\xi}_2^{(2)} = e_1$, где e_1 и e_2 – единичные векторы в пространстве Z^2. Таким образом, соседними тайлами, лежащими в покрытии в направлениях $\vec{h}_1^{(1)}$, $\vec{h}_2^{(1)}$ и $\vec{h}_2^{(2)}$, будем полагать ближайшие тайлы, находящиеся в направлениях $e_1 + e_2$, e_2 и e_1 на множестве индексов J^{gl}. С учетом вида функции покрытия (2), условия (5) при таком выборе векторов $\vec{\xi}_j^{(i)}$ приводят в совокупности к системе уравнений, решением которой является матрица P в параметризованном виде

$$P = \begin{pmatrix} p & r_1^{(1)} - p \\ h_{21}^{(2)} p - r_2^{(2)} & r_2^{(1)} - h_{21}^{(1)}\left(r_1^{(1)} - p\right) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Параметризованность матрицы P вида (6) приводит к наличию множества вариантов укладки гексагональных тайлов. Варианты укладок приведены на рис. 2. В работе [7] показано, что множество вариантов укладок для тайлов с целочисленными координатами вершин включает в себя только два варианта плотной укладки (рис. 2, *b*, *c*). Значения параметра *p*, соответствующие этим укладкам, обозначены как p_0 и p_1.

Утверждение 1 [7]. *Пусть параметры гексагонального тайла удовлетворяют условиям* (3), *направления идентификации тайлов определяются векторами* $\vec{\xi}_1^{(1)} = e_1 + e_2$, $\vec{\xi}_2^{(1)} = e_2$ *и* $\vec{\xi}_2^{(2)} = e_1$, *а покрытие тайлами пространства Z^2 определяется функцией вида* (2). *Тогда, при сделанных предположениях, укладка тайлов определяется матрицей P вида* (6), *причем для того, чтобы укладка была плотной, необходимо и достаточно, чтобы параметр p принимал значение* $p_0 = \left(r_2^{(2)} - \omega_0 - 1\right) / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right)$ *либо* $p_1 = \left(r_2^{(2)} - \omega_0 - 1\right) / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right) + 1$.

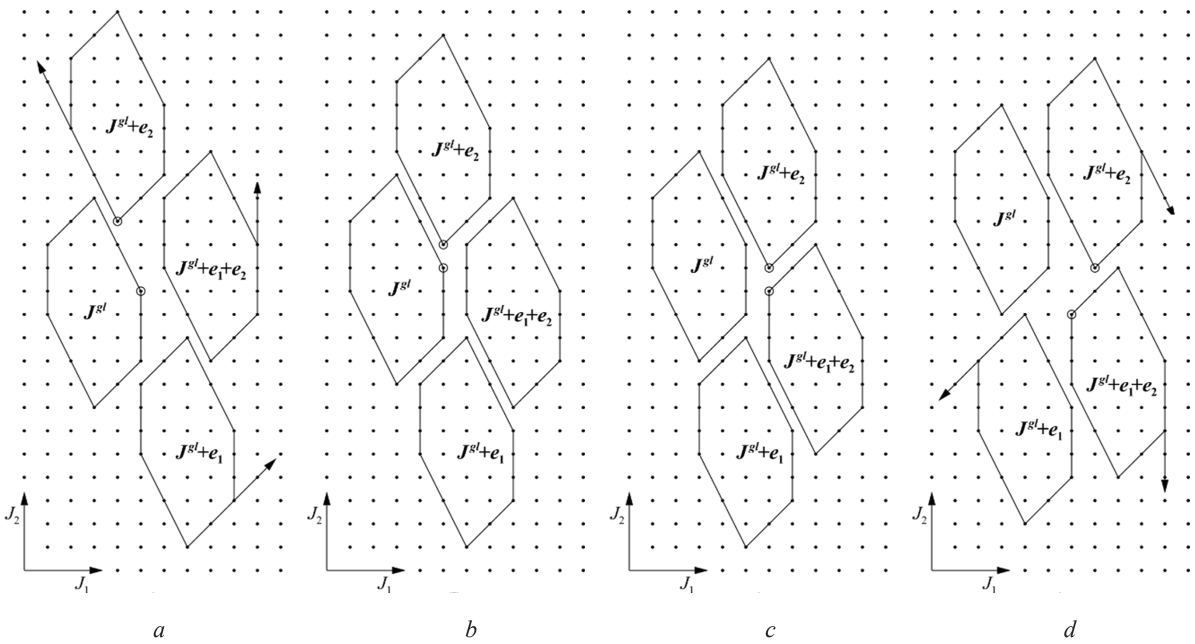

Рис. 2. Варианты покрытий гексагональными тайлами: *a* – неплотная укладка ($p > p_1$); *b* – плотная укладка ($p = p_1$); *c* – плотная укладка ($p = p_0$); *d* – неплотная укладка ($p < p_0$)

Fig. 2. Ways of coverage by hexagonal tiles: *a* – nondense coverage ($p > p_1$); *b* – dense coverage ($p = p_1$); *c* – dense coverage ($p = p_0$); *d* – nondense coverage ($p < p_0$)

Таким образом, в соответствии с утверждением, для тайлов с целочисленными координатами вершин существует ровно два варианта плотного покрытия пространства Z^2. Необходимо отметить, что полученный критерий плотности укладки характерен только для указанного в утверждении варианта идентификации тайлов. Вид матрицы P и значения параметра p, задающие плотное покрытие, индивидуальны для каждого выбора направлений идентификации тайлов.

Векторы глобальных зависимостей. Согласно технике тайлинга, после установления конфигурации тайлов и плотного покрытия ими области вычислений алгоритма необходимо решить следующую задачу – определить векторы глобальных зависимостей между тайлами. Нахождение этих зависимостей требуется для установления порядка выполнения операций алгоритма на уровне макроопераций-тайлов, а также для установления и организации обменов данными между процессорами в случае параллельной реализации алгоритма.

Для случая тайлов формы параллелепипеда задача получения глобальных зависимостей между тайлами и определения множеств итераций тайлов, порождающих эти зависимости, решена в [4, 5]. Подход к получению глобальных зависимостей, предложенный в этих работах, используется с обобщением на случай гексагональных тайлов и в настоящей статье.

Каждый вектор зависимостей $\varphi \in \Phi$ исходного алгоритма может порождать несколько векторов глобальных зависимостей φ^{gl} между тайлами. Множество всех таких векторов для фиксированного $\varphi \in \Phi$ будем обозначать Φ_{φ}^{gl}. Формально оно определяется следующим образом:

$$\Phi_{\varphi}^{gl} = \left\{ \varphi^{gl} \in Z^2 \middle| J \in T_6(J^{gl}) \subseteq V,\ J + \varphi \in T_6(J^{gl} + \varphi^{gl}) \subseteq V,\ \varphi^{gl} \neq 0 \right\}. \tag{7}$$

Таким образом, задача определения глобальных зависимостей между тайлами сводится к получению множеств Φ_{φ}^{gl} для каждого из векторов $\varphi \in \Phi$. Построение множеств Φ_{φ}^{gl} будем осуществлять, оперируя системами неравенств, которые порождаются определением (7) и связывают координаты глобальных векторов зависимостей с координатами векторов зависимостей $\varphi \in \Phi$, параметрами тайлинга, индексами тайлов и точками области вычислений.

Используя определение (4) гексагонального тайла и функцию покрытия тайлами пространства Z^2 вида (2), множество Φ_φ^{gl} можно представить в следующем виде:

$$\Phi_\varphi^{gl} = \Big\{ \varphi^{gl} \in Z^2 \,|\, \vec{0} \le H^{(1)}\Big(J - J^{(1)}(J^{gl})\Big) \le \vec{R}^{(1)} - \vec{1},$$

$$H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \le H^{(1)}\Big(J - J^{(1)}(J^{gl})\Big) \le \vec{R}^{(1)} - \vec{1} + H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi),$$

$$H^{(2)}(0,\omega_0) \le H^{(2)}\Big(J - J^{(1)}(J^{gl})\Big) \le \vec{R}^{(2)} - \vec{1} + H^{(2)}(0,\omega_0),$$

$$H^{(2)}(0,\omega_0) + H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \le H^{(2)}\Big(J - J^{(1)}(J^{gl})\Big) \le \vec{R}^{(2)} - \vec{1} + H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) + H^{(2)}(0,\omega_0),\ \varphi^{gl} \ne 0\Big\}.$$

Обозначим через $\vec{A}_+$ ($\vec{A}_-$) вектор, полученный из вектора $\vec{A}$, обнулением всех его отрицательных (соответственно положительных) координат. Тогда каждая пара двойных неравенств в приведенном выше представлении множества Φ_φ^{gl} может быть заменена одним соответствующим неравенством:

$$\begin{gathered} \Phi_\varphi^{gl} = \Big\{ \varphi^{gl} \in Z^2 \,\Big|\, \Big(H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ \le H^{(1)}\Big(J - J^{(1)}(J^{gl})\Big) \le \vec{R}^{(1)} - \vec{1} + \Big(H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_-, \\ H^{(2)}(0,\omega_0) + \Big(H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ \le H^{(2)}\Big(J - J^{(1)}(J^{gl})\Big) \le \\ \le \vec{R}^{(2)} - \vec{1} + H^{(2)}(0,\omega_0) + \Big(H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_-, \varphi^{gl} \ne 0 \Big\}. \end{gathered} \tag{8}$$

С целью обобщения дальнейших выкладок по построению множеств Φ_φ^{gl} сразу для двух видов плотной укладки тайлов обозначим через P_i матрицу P при значениях параметра $p = p_i$, $i = 0, 1$ (в соответствии с утверждением 1, $p_i = p_0 + i$, $i = 0,1$).

Исходя из представления (8), для того чтобы множество Φ_φ^{gl} не было пустым, необходимо выполнение условий

$$-\vec{R}^{(k)} + \vec{1} \le H^{(k)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \le \vec{R}^{(k)} - \vec{1}, \quad k = 1, 2. \tag{9}$$

Переходя в формулировке условия (9) к координатной записи, с учетом соотношений

$$\begin{gathered} r_2^{(2)} - \Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big) p_i = \omega_0 + 1 - i\Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big), \\ r_2^{(1)} - \Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big)\Big(r_1^{(1)} - p_i\Big) = \omega_0 + 1 - (1 - i)\Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big), \end{gathered} \tag{10}$$

которые следуют из определения параметров p_i, $i = 0, 1$, в утверждении 1 и определения параметра ω_0, получим эквивалентную систему из трех неравенств

$$-\Big(r_1^{(1)} - 1\Big) \le p_i\varphi_1^{gl} + \Big(r_1^{(1)} - p_i\Big)\varphi_2^{gl} - \vec{h}_1^{(1)}\varphi \le r_1^{(1)} - 1,$$

$$-\Big(r_2^{(1)} - 1\Big) \le -\Big(\omega_0 + 1 - i\Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big)\Big)\varphi_1^{gl} + r_2^{(1)}\varphi_2^{gl} - \vec{h}_2^{(1)}\varphi \le r_2^{(1)} - 1,$$

$$-\Big(r_2^{(2)} - 1\Big) \le r_2^{(2)}\varphi_1^{gl} - \Big(\omega_0 + 1 - (1 - i)\Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big)\Big)\varphi_2^{gl} - \vec{h}_2^{(2)}\varphi \le r_2^{(2)} - 1.$$

Выражая в неравенствах первую координату φ_1^{gl} вектора глобальной зависимости φ^{gl}, получим

$$A_\varphi^{1-}\Big(\varphi_2^{gl}\Big) = \frac{\vec{h}_1^{(1)}\varphi - \Big(r_1^{(1)} - p_i\Big)\varphi_2^{gl} - \Big(r_1^{(1)} - 1\Big)}{p_i} \le \varphi_1^{gl} \le \frac{\vec{h}_1^{(1)}\varphi - \Big(r_1^{(1)} - p_i\Big)\varphi_2^{gl} + \Big(r_1^{(1)} - 1\Big)}{p_i} = A_\varphi^{1+}\Big(\varphi_2^{gl}\Big),$$

$$A_{\varphi}^{2-}\left(\varphi_2^{gl}\right)=\frac{-\vec{h}_2^{(1)}\varphi+r_2^{(1)}\varphi_2^{gl}-\left(r_2^{(1)}-1\right)}{\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)}\le\varphi_1^{gl}\le\frac{-\vec{h}_2^{(1)}\varphi+r_2^{(1)}\varphi_2^{gl}+\left(r_2^{(1)}-1\right)}{\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)}=A_{\varphi}^{2+}\left(\varphi_2^{gl}\right),$$

$$A_{\varphi}^{3-}\left(\varphi_2^{gl}\right)=\frac{\vec{h}_2^{(2)}\varphi+\left(\omega_0+1-(1-i)\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\varphi_2^{gl}-\left(r_2^{(2)}-1\right)}{r_2^{(2)}}\le\varphi_1^{gl}\le$$

$$\le\frac{\vec{h}_2^{(2)}\varphi+\left(\omega_0+1-(1-i)\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\varphi_2^{gl}+\left(r_2^{(2)}-1\right)}{r_2^{(2)}}=A_{\varphi}^{3+}\left(\varphi_2^{gl}\right).$$

Из этих неравенств следует ограничение для первой координаты φ_1^{gl} глобальных векторов зависимостей, порождаемых вектором $\varphi\in\Phi$,

$$\max\left(\left\lceil A_{\varphi}^{1-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\right\rceil,\left\lceil A_{\varphi}^{2-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\right\rceil,\left\lceil A_{\varphi}^{3-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\right\rceil\right)\le\varphi_1^{gl}\le\min\left(\left\lfloor A_{\varphi}^{1+}\left(\varphi_2^{gl}\right)\right\rfloor,\left\lfloor A_{\varphi}^{2+}\left(\varphi_2^{gl}\right)\right\rfloor,\left\lfloor A_{\varphi}^{3+}\left(\varphi_2^{gl}\right)\right\rfloor\right).\quad(11)$$

Необходимое требование для существования целочисленных решений $\varphi_1^{gl}\in Z$, определяемых неравенством (11), задается условиями

$$A_{\varphi}^{i-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\le A_{\varphi}^{j+}\left(\varphi_2^{gl}\right),\quad 1\le i,\quad j\le 3,\quad i\ne j,$$

из которых следуют ограничения для второй координаты φ_2^{gl} глобальных векторов зависимостей, порождаемых вектором $\varphi\in\Phi$. Так из условий $A_{\varphi}^{1-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\le A_{\varphi}^{2+}\left(\varphi_2^{gl}\right)$ и $A_{\varphi}^{2-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\le A_{\varphi}^{1+}\left(\varphi_2^{gl}\right)$ следует ограничение $A_{\varphi}^{1,2-}\le\varphi_2^{gl}\le A_{\varphi}^{1,2+}$, из условий $A_{\varphi}^{1-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\le A_{\varphi}^{3+}\left(\varphi_2^{gl}\right)$ и $A_{\varphi}^{3-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\le A_{\varphi}^{1+}\left(\varphi_2^{gl}\right)$ следует ограничение $A_{\varphi}^{1,3-}\le\varphi_2^{gl}\le A_{\varphi}^{1,3+}$, а из условий $A_{\varphi}^{2-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\le A_{\varphi}^{3+}\left(\varphi_2^{gl}\right)$ и $A_{\varphi}^{3-}\left(\varphi_2^{gl}\right)\le A_{\varphi}^{2+}\left(\varphi_2^{gl}\right)$ следует ограничение $A_{\varphi}^{2,3-}\le\varphi_2^{gl}\le A_{\varphi}^{2,3+}$, где

$$A_{\varphi}^{1,2\pm}=\frac{\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\vec{h}_1^{(1)}+p_i\vec{h}_2^{(1)}\right)\varphi\pm\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\left(r_1^{(1)}-1\right)+p_i\left(r_2^{(1)}-1\right)\right)}{p_ir_2^{(1)}+\left(r_1^{(1)}-p_i\right)\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)},$$

$$A_{\varphi}^{1,3\pm}=\frac{\left(r_2^{(2)}\vec{h}_1^{(1)}-p_i\vec{h}_2^{(2)}\right)\varphi\pm\left(r_2^{(2)}\left(r_1^{(1)}-1\right)+p_i\left(r_2^{(2)}-1\right)\right)}{p_i\left(\omega_0+1-(1-i)\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)+r_2^{(2)}\left(r_1^{(1)}-p_i\right)},$$

$$A_{\varphi}^{2,3\pm}=\frac{\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\vec{h}_2^{(2)}+r_2^{(2)}\vec{h}_2^{(1)}\right)\varphi\pm\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\left(r_2^{(2)}-1\right)+r_2^{(2)}\left(r_2^{(1)}-1\right)\right)}{r_2^{(1)}r_2^{(2)}-(\omega_0+1)\left(\omega_0+1-\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)}.$$

С учетом соотношений (10) и равенства $\vec{h}_2^{(1)}+\vec{h}_2^{(2)}=\vec{h}_1^{(1)}\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)$ (как следствия из определения параметров тайлинга), имеет место соотношение, связывающее знаменатели дробей $A_{\varphi}^{1,2\pm}$, $A_{\varphi}^{1,3\pm}$ и $A_{\varphi}^{2,3\pm}$:

$$\left(r_2^{(1)}r_2^{(2)}-(\omega_0+1)\left(\omega_0+1-\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\right)/\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)=$$

$$=p_i\left(\omega_0+1-(1-i)\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)+r_2^{(2)}\left(r_1^{(1)}-p_i\right)=p_ir_2^{(1)}+\left(r_1^{(1)}-p_i\right)\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right);$$

соотношение, связывающее коэффициенты при векторе зависимостей φ

$$\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\vec{h}_2^{(2)}+r_2^{(2)}\vec{h}_2^{(1)}\right)/\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)=r_2^{(2)}\vec{h}_1^{(1)}-p_i\vec{h}_2^{(2)}=$$
$$=\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\vec{h}_1^{(1)}+p_i\vec{h}_2^{(1)};$$

а также равенство

$$\min\left(\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\left(r_2^{(2)}-1\right)+r_2^{(2)}\left(r_2^{(1)}-1\right)\right)/\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right),r_2^{(2)}\left(r_1^{(1)}-1\right)+p_i\left(r_2^{(2)}-1\right),\right.$$
$$\left.\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\left(r_1^{(1)}-1\right)+p_i\left(r_2^{(1)}-1\right)\right)=\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\left(r_1^{(1)}-1\right)+p_i\left(r_2^{(1)}-1\right).$$

Из этих соотношений следуют равенства

$$\max\left(\left\lceil A_\varphi^{1,2-}\right\rceil,\left\lceil A_\varphi^{1,3-}\right\rceil,\left\lceil A_\varphi^{2,3-}\right\rceil\right)=\left\lceil A_\varphi^{1,2-}\right\rceil,\quad \min\left(\left\lfloor A_\varphi^{1,2+}\right\rfloor,\left\lfloor A_\varphi^{1,3+}\right\rfloor,\left\lfloor A_\varphi^{2,3+}\right\rfloor\right)=\left\lfloor A_\varphi^{1,2+}\right\rfloor.$$

Таким образом, неравенство

$$\max\left(\left\lceil A_\varphi^{1,2-}\right\rceil,\left\lceil A_\varphi^{1,3-}\right\rceil,\left\lceil A_\varphi^{2,3-}\right\rceil\right)\le\varphi_2^{gl}\le\min\left(\left\lfloor A_\varphi^{1,2+}\right\rfloor,\left\lfloor A_\varphi^{1,3+}\right\rfloor,\left\lfloor A_\varphi^{2,3+}\right\rfloor\right)$$

для определения целочисленных значений второй координаты $\varphi_2^{gl}\in Z$ принимает вид

$$\left\lceil\frac{\left(r_2^{(2)}\vec{h}_1^{(1)}-p_i\vec{h}_2^{(2)}\right)\varphi-\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\left(r_1^{(1)}-1\right)+p_i\left(r_2^{(1)}-1\right)\right)}{p_ir_2^{(1)}+\left(r_1^{(1)}-p_i\right)\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)}\right\rceil=\left\lceil A_\varphi^{1,2-}\right\rceil\le\varphi_2^{gl}\le$$
$$\le\left\lfloor A_\varphi^{1,2+}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\left(r_2^{(2)}\vec{h}_1^{(1)}-p_i\vec{h}_2^{(2)}\right)\varphi+\left(\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)\left(r_1^{(1)}-1\right)+p_i\left(r_2^{(1)}-1\right)\right)}{p_ir_2^{(1)}+\left(r_1^{(1)}-p_i\right)\left(\omega_0+1-i\left(h_{21}^{(1)}+h_{21}^{(2)}\right)\right)}\right\rfloor, \tag{12}$$

а в целом справедливо

Утверждение 2. *Пусть параметры гексагонального тайлинга заданы в соответствии с определением* (1) *и удовлетворяют условию* (3), *направления идентификации тайлов определяются векторами* $\xi_1^{(1)}=e_1+e_2$, $\xi_2^{(1)}=e_2$ *и* $\xi_2^{(2)}=e_1$, *а покрытие тайлами области вычислений алгоритма, заданное функцией вида* (2)*, является плотным. Тогда координаты глобальных векторов зависимостей* $\varphi^{gl}=\left(\varphi_1^{gl},\varphi_2^{gl}\right)\in Z^2$, *порождаемых вектором зависимостей* $\varphi\in\Phi$, *удовлетворяют условиям* (11) *и* (12).

Векторы зависимостей $\varphi\in\Phi$ связывают информационно зависимые операции (итерации) алгоритма. В случае, когда информационно зависимые операции принадлежат разным тайлам, порождаются глобальные зависимости между тайлами. В следующем разделе приведено описание множеств операций алгоритма, которые обусловливают появление глобальных зависимостей.

Множество итераций алгоритма, порождающих зависимости между гексагональными тайлами. При разработке параллельных приложений для систем с распределенной памятью существование зависимостей между тайлами означает необходимость выполнения соответствующих коммуникаций при выполнении параллельной программы. Из этого следует необходимость определения множества точек тайла, операции которых информационно связаны с операциями, приписанными точкам других тайлов.

Пусть область вычислений алгоритма представлена в виде

$$V=\left\{J\in Z^2\,\middle|\,LJ\ge I\right\}=\left\{J\in Z^2\,\middle|\,F^+(L,I,J)\le J\le F^-(L,I,J)\right\}, \tag{13}$$

где целочисленная матрица $L \in Z^{m\times 2}$ и целочисленный вектор $I \in Z^m$ являются параметрами, определяющими область вычислений; функции $F^+(L,I,J)$ и $F^-(L,I,J)$ задают границы изменения циклов (в представлении алгоритма в виде гнезд циклов) и явно или неявно зависят от параметров L, I области вычислений и координат точки $J \in V$ с меньшими номерами.

Для каждого гексагонального тайла $T_6(J^{gl})$ в плотном покрытии области вычислений V, вектора зависимости $\varphi \in \Phi$ и порождаемого им глобального вектора зависимости $\varphi^{gl} \in \Phi_\varphi^{gl}$ определим следующие два множества точек:

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{in} = \left\{ J \in Z^2 \middle| J \in T_6(J^{gl}) \bigcap V,\ J-\varphi \in T_6(J^{gl}-\varphi^{gl}) \bigcap V \right\}$$

– множество точек гексагонального тайла $T_6(J^{gl})$, принадлежащих области вычислений алгоритма и информационно зависимых от точек области вычислений, принадлежащих тайлу $T_6(J^{gl} - \varphi^{gl})$;

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{out} = \left\{ J \in Z^2 \middle| J \in T_6(J^{gl}) \bigcap V,\ J+\varphi \in T_6(J^{gl}+\varphi^{gl}) \bigcap V \right\}$$

– множество точек гексагонального тайла $T_6(J^{gl})$, операции которых непосредственно влияют на результат выполнения операций, соответствующих точкам $J + \varphi$ тайла $T_6(J^{gl} + \varphi^{gl})$.

Из представления области вычислений V в виде (13) следует, что требование $J \in V$, $J + \varphi \in V$, равносильно условию $J \in V^{+\varphi}$, где

$$V^{+\varphi} = \left\{ J \in Z^2 \,|\, LJ \ge I,\ LJ \ge I - L\varphi \right\} = \left\{ J \in Z^2 \,|\, LJ \ge I - (L\varphi)_- \right\} =$$
$$= \left\{ J \in Z^2 \,|\, F^+\left(L, I-(L\varphi)_-, J\right) \le J \le F^-\left(L, I-(L\varphi)_-, J\right) \right\}.$$

В соответствии с приведенными определениями имеет место равенство

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{in} = V_6^{loc}(J^{gl})_{-\varphi,-\varphi^{gl}}^{out}, \tag{14}$$

поэтому достаточно иметь формальное представление только одного из этих множеств.

Множество $V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{out}$ состоит из точек $J \in Z^2$, удовлетворяющих одновременно условиям $J \in V^{+\varphi}$, $J \in T_6(J^{gl})$ и $J+\varphi \in T_6(J^{gl}+\varphi^{gl})$. Принадлежность точек J, $J + \varphi \in V$ соответственно гексагональным тайлам $T_6(J^{gl})$ и $T_6(J^{gl} + \varphi^{gl})$ при плотном покрытии определяется неравенствами в представлении (8) множества глобальных зависимостей Φ_φ^{gl}. Переходя в этих неравенствах к покоординатной записи и выражая координаты точки J, получим

$$\left(\vec{h}_1^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+ + J_1^{(1)}(J^{gl}) \le J_1 \le r_1^{(1)} - 1 + \left(\vec{h}_1^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_- + J_1^{(1)}(J^{gl}),$$
$$\left(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+ + \vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)}J_1 \le J_2 \le -h_{21}^{(1)}J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) + \left(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_-,$$
$$h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \left(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_- \le J_2 \le$$
$$\le h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - \vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \left(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+.$$

Для того чтобы вторая координата J_2 удовлетворяла обоим неравенствам и определялась как

$$\max\left(\left(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+ + \vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)}J_1, h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 -\right.$$
$$\left. -\vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \left(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_-\right) \le J_2 \le$$

$$\le \min\Big(-h_{21}^{(1)}J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) + \Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_- , h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 -$$

$$-\vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+\Big),$$

необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ + \vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)}J_1 \le h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - \vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+,$$

$$h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_- \le$$

$$\le -h_{21}^{(1)}J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) + \Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_-,$$

которые, в свою очередь, порождают дополнительное ограничение на первую координату J_1

$$J_1^{(1)}(J^{gl}) + \frac{\Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ + \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ - \omega_0}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}} \le J_1 \le J_1^{(1)}(J^{gl}) + r_1^{(1)} - 1 +$$

$$+\frac{\Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_- + \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_- + \omega_0}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}}.$$

Из полученных неравенств, фактически определяющих границы изменения координат точек множества $V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{out}$, следует представление этого множества в виде

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{out} = \Big\{J \in V^{+\varphi}\Big|\ B_1^l \le J_1 \le B_1^r,\ B_2^l \le J_2 \le B_2^r\Big\},$$

где

$$B_1^l = J_1^{(1)}\Big(J^{gl}\Big) +$$

$$+\max\Big(\Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ + \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ - \omega_0, \Big(\Big(\vec{h}_2^{(1)} + \vec{h}_2^{(2)}\Big)(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+\Big) / \Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big),$$

$$B_1^r = r_1^{(1)} - 1 + J_1^{(1)}(J^{gl}) +$$

$$+\min\Big(\Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_- + \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_- + \omega_0, \Big(\Big(\vec{h}_2^{(1)} + \vec{h}_2^{(2)}\Big)(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_-\Big) / \Big(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\Big),$$

$$B_2^l = \max\Big(\Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+ +$$

$$+\vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)}J_1, h_{21}^{(1)}J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_-\Big),$$

$$B_2^r = \min\Big(-h_{21}^{(1)}J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \vec{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) +$$

$$+\Big(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_-, h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - \vec{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \Big(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\Big)_+\Big).$$

Множество $V_6^{loc}(J^{gl} + \varphi^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{in}$ может быть получено из соотношения (14):

$$V_6^{loc}(J^{gl} + \varphi^{gl})_{\varphi,\varphi^{gl}}^{in} = \Big\{J \in V^{-\varphi}\Big|\ C_1^l \le J_1 \le C_1^r,\ C_2^l \le J_2 \le C_2^r\Big\},$$

где

$$C_1^l = J_1^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl} -$$

$$-\min\left(\left(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_- + \left(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_- + \omega_0, \left(\left(\vec{h}_2^{(1)}+\vec{h}_2^{(2)}\right)(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_-\right) / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right),$$

$$C_1^r = r_1^{(1)} - 1 + J_1^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl} -$$

$$-\max\left(\left(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+ + \left(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+ - \omega_0, \left(\left(\vec{h}_2^{(1)}+\vec{h}_2^{(2)}\right)(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+\right) / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right),$$

$$C_2^l = \max\left(-\left(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_- + \vec{h}_2^{(1)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) - h_{21}^{(1)} J_1,\right.$$

$$\left. h_{21}^{(2)} J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \vec{h}_2^{(2)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) + \left(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+\right),$$

$$C_2^r = \min\left(-h_{21}^{(1)} J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \vec{h}_2^{(1)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) - \left(\vec{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_+,\right.$$

$$\left. h_{21}^{(2)} J_1 + \omega_0 - \vec{h}_2^{(2)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) + \left(\vec{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl}-\varphi)\right)_-\right).$$

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы для оптимизации как последовательных, так и параллельных алгоритмов, ориентированных на реализацию на вычислительных системах с распределенной памятью.

Благодарности. Работа выполнена в рамках подпрограммы «Математические методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020».

Acknowledgments. This paper was supported by the State Scientific Research Program "Convergence 2020".

Список использованных источников

1. Xue, J. Loop Tiling for Parallelism / J. Xue. – Norwell: Kluwer Academic Publ., 2000. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4337-4

2. Parameterized tiled loops for free / L. Renganarayanan [et al.] // ACM SIGPLAN Notices. – 2007. – Vol. 42, № 6. – P. 405–414. https://doi.org/10.1145/1273442.1250780

3. DynTile: Parametric Tiled Loop Generation for Parallel Execution on Multicore Processors / A. Hartono [et al.] // IEEE Int.l Symp. on Parallel & Distributed Processing (IPDPS). – Atlanta, 2010. https://doi.org/10.1109/ipdps.2010.5470459

4. Соболевский, П. И. Параметризованный тайлинг: точные аппроксимации и анализ глобальных зависимостей / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2014. – Т. 54, № 11. – С. 1817–1828.

5. Лиходед, Н. А. Информационная структура зернистых алгоритмов с однородными зависимостями / Н. А. Лиходед, П. И. Соболевский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 22–26.

6. The Relation Between Diamond Tiling and Hexagonal Tiling / T. Grosser [et al.] // Parallel Processing Letters. – Vol. 24, № 3. – P. 1441002. https://doi.org/10.1142/s0129626414410023

7. Соболевский, П. И. Плотные покрытия области вычислений гексагональными тайлами / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 5. – С. 525–530. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-525-530

References

1. Xue J. *Loop Tiling for Parallelism*. Norwell, MA, USA, Kluwer Academic Publ., 2000. 256 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4337-4

2. Renganarayanan L., Kim D., Rajopadhye S., Strout M. Parameterized tiled loops for free. *ACM SIGPLAN Notices*, 2007, vol. 42, no. 6, pp. 405–414. https://doi.org/10.1145/1273442.1250780

3. Hartono A., Baskaran M., Ramanujam J., Sadayappan P. DynTile: Parametric Tiled Loop Generation for Parallel Execution on Multicore Processors. *IEEE International Symposium on Parallel & Distributed Processing (IPDPS)*. Atlanta, 2010. https://doi.org/10.1109/ipdps.2010.5470459

4. Bakhanovich S. V., Sobolevsky P. I. Parametrized Tiling: Accurate Approximations and Analysis of Global Dependences. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 11, pp. 1748–1758. https://doi.org/10.1134/S0965542514110037

5. Likhoded N. A., Sobolevsky P. I. *Information structure of grained algorithms with homogeneous dependencies. Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, no 2. pp. 22–26 (in Russian).

6. Grosser T., Verdoolaege S., Cohen A., Sadayappan P. The Relation Between Diamond Tiling and Hexagonal Tiling. *Parallel Processing Letters*, vol. 24, no. 3, pp. 1441002. https://doi.org/10.1142/s0129626414410023

7. Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V. Dense coverage of the computational domain by hexagonal tiles. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no 5, pp. 525–530 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-525-530

Информация об авторах

Соболевский Павел Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sobolevsky@im.bas-net.by

Баханович Сергей Викторович – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной и инновационной работе, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: bsv@im.bas-net.by

Information about the authors

Pavel I. Sobolevsky – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sobolevsky@im.bas-net.by

Sergey V. Bakhanovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Deputy Director for Sciences and Innovation, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bsv@im.bas-net.by