ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 512.552
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-135-143

Поступила в редакцию 15.05.2020
Received 15.05.2020

И. О. Говорушко, В. И. Янчевский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

О КЛАССИФИКАЦИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ГЕНЗЕЛЕВЫХ ПРОСТЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ АЛГЕБР С УНИТАРНЫМИ ИНВОЛЮЦИЯМИ

Аннотация. Цель настоящей работы – исследовать проблему классификации конечномерных простых центральных *K*-алгебр, снабженных унитарными инволюциями. Для слабо разветвленных конечномерных центральных *K*-алгебр с делением, снабженных унитарными *K*/*k*-инволюциями (где поле инвариантов *k* гензелево), доказан критерий *K*-изоморфизма.

Ранее в работах Ж.-П. Тиньоля, В. В. Курсова и В. И. Янчевского были определены обобщенные абелевы скрещенные произведения и доказан критерий *K*-изоморфизма обобщенных абелевых скрещенных произведений $(D_1, G, (\omega, f))$ и $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$, когда алгебры D_1 и D_2 совпадают. В данной статье этот критерий доказан для случая различных алгебр D_1 и D_2, при помощи которого получен основной результат работы.

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, гензелевы алгебры, конечномерные простые центральные алгебры, унитарные инволюции, обобщенные абелевы скрещенные произведения

Для цитирования. Говорушко, И. О. О классификации конечномерных гензелевых простых центральных алгебр с унитарными инволюциями / И. О. Говорушко, В. И. Янчевский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 135–143. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-135-143

Igor O. Govorushko, Vyacheslav I. Yanchevskii

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ON THE CLASSIFICATION OF FINITE-DIMENSIONAL HENSELIAN SIMPLE CENTRAL ALGEBRAS WITH UNITARY INVOLUTIONS

Abstract. The purpose of this paper is to investigate the problem of the classification of finite-dimensional simple central *K*-algebras with unitary involutions. In this paper, *K*-isomorphism is proven for weakly ramified finite-dimensional central *K*-algebras with division and unitary *K*/*k*-involutions (where the invariant field *k* is Henselian).

Earlier, in papers by J.-P. Tignol, V. V. Kursov and V. I. Yanchevskii, generalized Abelian crossed products were defined and the *K*-isomorphism of generalized Abelian crossed products $(D_1, G, (\omega, f))$ and $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$, was proven for the case $D_1 = D_2$. In this paper, this criterion is proven when D_1 and D_2 are different. With the help of this criterion, the main result of this article is obtained.

Keywords: associative algebras, Henselian algebras, finite-dimensional simple central algebras, unitary involutions, generalized Abelian crossed products

For citation. Govorushko I. O., Yanchevskii V. I. On the classification of finite-dimensional Henselian simple central algebras with unitary involutions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 135–143 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-135-143

Введение. Одной из ключевых задач в структурной теории алгебр с инволюциями является задача классификации конечномерных простых центральных *K*-алгебр с унитарными инволюциями с точностью до K-изоморфизма. Решение этой задачи для произвольных полей K в настоящее время представляется мало реальным. Тем не менее для разных важных специальных классов полей эта проблема не является такой уж неразрешимой, и ее решение позволяет получить различные интересные приложения, например в теории линейных алгебраических групп. Одним из таких классов является класс гензелевых полей, для которого эта классификация получена в настоящей работе.

Для гензелевых полей вышеупомянутая задача решается в терминах подгрупп мультипликативных групп алгебр вычетов и одного свойства относительных групп значений. Кроме того, мы рассматриваем необходимый для получения классификации вопрос об изоморфизме обобщенных абелевых скрещенных произведений для когомологичных обобщенных 2-коциклов.

Приведем вначале необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть K – поле с нормированием v; D – конечномерная центральная K-алгебра с делением. Продолжение нормирования v на D будем обозначать также через v. Через O_D, O_K будем обозначать кольца нормирования D и K соответственно, через M_D, M_K – идеалы нормирования D и K, через Γ_D и Γ_K – группы значений нормирования v на D и K. Алгебра $\overline{D} = O_D / M_D$ и поле $\overline{K} = O_K / M_K$ называются алгеброй вычетов алгебры D и полем вычетов поля K соответственно.

Основным в данной работе является класс гензелевых полей.

Для многочлена

$$f = a_n x^n + \ldots + a_0 \in O_K[x]$$

будем обозначать через $\overline{f}$ многочлен

$$\overline{a_n} x^n + \ldots + \overline{a_0} \in \overline{K}[x],$$

где $\overline{a_i} = a_i + M_K$ для всех $i \in \{0, \ldots, n\}$.

О п р е д е л е н и е 1. *Поле K с нормированием v называется гензелевым относительно нормирования v, если для любого многочлена $f \in O_K[x]$ и любого разложения $\overline{f} = \tilde{g}\tilde{h}$, где многочлены $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ взаимно просты, существуют многочлены $g, h \in O_K[x]$ такие, что $f = gh$ и $\overline{g} = \tilde{g}$, $\overline{h} = \tilde{h}$.*

Пусть $d \in D^*$. Рассмотрим отображение $c_d : D \to D$, определенное по правилу $a \mapsto dad^{-1}$. Так как $c_d(O_D) \subset O_D$, $c_d(M_D) \subset M_D$, отображение c_d индуцирует $\overline{K}$-автоморфизм алгебры $\overline{D}$, ограничение которого на $Z(\overline{D})$ (центр алгебры $\overline{D}$) является $\overline{K}$-автоморфизмом $Z(\overline{D})$. Обозначим этот $\overline{K}$-автоморфизм через $\overline{c_d}$. Таким образом, существует групповой гомоморфизм

$$\theta_D : \Gamma_D / \Gamma_K \to \mathrm{Gal}\left(Z(\overline{D}), \overline{K}\right),$$

определенный по правилу $v(d) + \Gamma_K \mapsto \overline{c_d}$.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть K – поле, гензелево относительно нормирования v, а D – конечномерная центральная K-алгебра с делением. Алгебра D называется слабо разветвленной, если либо* $\mathrm{char}\,\overline{K} = 0$, *либо* $\mathrm{char}\,\overline{K} = q \neq 0$ *и выполняются три условия:*

1) *D бездефектна над K, т. е.* $[D : K] = [\overline{D} : \overline{K}][\Gamma_D : \Gamma_K]$;

2) *расширение* $Z(\overline{D}) / \overline{K}$ *сепарабельно*;

3) *q не делит* $\left|\mathrm{Ker}\,\theta_D\right|$ *(где* $\mathrm{Ker}\,\theta_D$ *– ядро гомоморфизма* θ_D*).*

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть F – поле; (A_1, τ_1), (A_2, τ_2) – конечномерные центральные F-алгебры с делением, обладающие инволюциями (антиавтоморфизмами второго порядка) τ_1 и τ_2. Такие алгебры называются F-изоморфными, если существует F-изоморфизм $\sigma : A_1 \to A_2$ алгебр A_1 и A_2 такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau_1"'] & A_2 \arrow[d, "\tau_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\sigma"] & A_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

О п р е д е л е н и е 4. *Пусть* ε_n *– примитивный корень из единицы степени n в поле K. Для любых* $a, b \in K^*$ *обозначим через* $(a, b; K, \varepsilon_n)$ *простую центральную K-алгебру с образующими i,j и соотношениями* $i^n = a,\ \ j^n = b,\ \ \ ij = \varepsilon_n ji$. *Такие алгебры называются символ-алгебрами.*

Для доказательства основного результата нам потребуется понятие обобщенного абелева скрещенного произведения (см., напр., [1–3]).

Пусть K – поле, гензелево относительно нормирования v, Z/K – конечное расширение Галуа. Обозначим группу $\mathrm{Gal}(Z/K)$ через G. Пусть $\tilde{G}$ – подгруппа в $\mathrm{Aut}\, D_0$ (группе автоморфизмов D_0 – конечномерной центральной Z-алгебры с делением) такая, что ограничение $\tilde{G}$ на Z совпадает с G. Существует такой автоморфизм $\omega(\xi) \in \tilde{G}$, что $\omega(\xi)|_Z = \xi$ для любого $\xi \in G$.

О п р е д е л е н и е 5. *Пара* (ω, f), *где f – отображение из G × G в* D_0^*, *называется обобщенным 2-коциклом со значениями в* D_0, *если для любых* $\xi, \eta, \zeta \in G$ *и любого* $d \in D_0$ *имеют место равенства*

$$f(\eta,\zeta)^{\omega(\xi)} f(\xi,\eta\zeta) = f(\xi,\eta) f(\xi\eta,\zeta), \quad d^{\omega(\zeta)\omega(\eta)} = f(\eta,\zeta) d^{\omega(\eta\zeta)} f(\eta,\zeta)^{-1}.$$

Множество всех обобщенных 2-коциклов со значениями в D_0 будем обозначать через $F\left(G, D_0^*\right)$.

О п р е д е л е н и е 6. *Пусть*

$$(\omega, f) \in F\left(G, D_0^*\right).$$

Обобщенным абелевым скрещенным произведением D_0 *и G относительно* (ω, f) *называется прямая сумма*

$$\left(D_0, G, (\omega, f)\right) = \bigoplus_{\xi \in G} D_0 x_\xi,$$

где элементы x_ξ *удовлетворяют соотношениям:*

$x_\xi d = d^{\omega(\xi)} x_\xi$ *для всех* $\xi \in G$ *и* $d \in D_0$;

$x_\xi x_\eta = f(\xi,\eta) x_{\xi\eta}$ *для всех* $\xi, \eta \in G$.

Обобщенное абелево скрещенное произведение $\left(D_0, G, (\omega, f)\right)$ является ассоциативной простой центральной K-алгеброй с единицей $f(e,e)^{-1} x_e$ (e – единица группы G). Алгебру D_0 можно отождествлять с подалгеброй $\left(D_0, G, (\omega, f)\right)$, так как существует вложение $d \mapsto df(e,e)^{-1} x_e$.

О п р е д е л е н и е 7. *Пусть* D_1, D_2 *– алгебры с делением, конечномерные над своим центром Z. Пусть*

$$G = \mathrm{Gal}\left(Z/K\right), \quad (\omega, f) \in F(G, D_1), \quad (\tilde{\omega}, g) \in F(G, D_2).$$

Эти 2-коциклы называются когомологичными, если существуют K-изоморфизм $\chi : D_2 \to D_1$ *и функция* $t : G \to D_1^*$ *такие, что*

1) $\tilde{\omega}(\xi) \cdot \chi = \chi \cdot \omega(\xi) \cdot i_{t(\xi)}$ *для всех* $\xi \in G$, *где* $i_{t(\xi)}$ *– внутренний автоморфизм* D_1, *индуцированный элементом* $t(\xi)$, *т. е. автоморфизм, определенный по правилу* $d \mapsto t(\xi)^{-1} dt(\xi)$;

2) $\left(g(\xi,\eta)\right)^\chi = t(\xi) t(\eta)^{\omega(\xi)} f(\xi,\eta) t(\xi\eta)^{-1}$ *для всех* $\xi, \eta \in G$.

Цели и задачи. Получить классификацию конечномерных центральных K-алгебр с делением, снабженных унитарными K/k-инволюциями (где поле инвариантов k гензелево), с точностью до K-изоморфизма.

Результаты. Основным результатом об обобщенных абелевых скрещенных произведениях является

Т е о р е м а 1. *Обобщенные абелевы скрещенные произведения*

$$\left(D_1, G, (\omega, f)\right) = \underset{\xi\in G}{\oplus} D_1 x_\xi, \quad \left(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\right) = \underset{\xi\in G}{\oplus} D_2 \tilde{x}_\xi$$

изоморфны над K тогда и только тогда, когда их обобщенные 2*-коциклы* (ω, f) *и* $(\tilde{\omega}, g)$ *когомологичны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Известно [1, теорема 1.3], что обобщенные абелевы скрещенные произведения $\left(D_1, G, (\omega, f)\right)$ и $\left(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\right) = \underset{\xi\in G}{\oplus} D_1 \tilde{x}_\xi$ (где $\tilde{\omega}'(\xi) = \chi^{-1}\cdot\tilde{\omega}(\xi)\cdot\chi$ для всех $\xi\in G$ и $g'(\xi,\eta) = g(\xi,\eta)^\chi$ для всех $\xi,\eta\in G$) K-изоморфны. Построим отображение

$$\Psi : \left(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\right) \to \left(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\right),$$

определенное по правилу

$$\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi \mapsto \sum_{\xi\in G} d_\xi^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\xi,$$

и докажем, что оно является K-изоморфизмом. Действительно, для любых

$$\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi, \sum_{\xi\in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \in \left(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\right)$$

имеет место цепочка равенств

$$\left(\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi + \sum_{\xi\in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi\right)^\Psi = \left(\sum_{\xi\in G}\left(d_\xi + d'_\xi\right)\tilde{x}_\xi\right)^\Psi =$$

$$= \sum_{\xi\in G}\left(d_\xi + d'_\xi\right)^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\xi = \sum_{\xi\in G} d_\xi^{\chi^{-1}}\tilde{x}_\xi + \sum_{\xi\in G}\left(d'_\xi\right)^{\chi^{-1}}\tilde{x}_\xi = \left(\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi\right)^\Psi + \left(\sum_{\xi\in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi\right)^\Psi,$$

откуда следует, что Ψ является гомоморфизмом $\left(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\right)$ и $\left(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\right)$ как аддитивных групп, тождественно действующим на элементах K (так как χ является K-изоморфизмом). Кроме того, для любых $d\tilde{x}_\xi, d'\tilde{x}_\eta \in \left(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\right)$ имеет место цепочка равенств

$$\left(\left(d\tilde{x}_\xi\right)\left(d'\tilde{x}_\eta\right)\right)^\Psi = \left(d(d')^{\tilde{\omega}(\xi)}\tilde{x}_\xi\tilde{x}_\eta\right)^\Psi = \left(d(d')^{\tilde{\omega}'(\xi)} g'(\xi,\eta)\tilde{x}_{\xi\eta}\right)^\Psi =$$

$$= d^{\chi^{-1}}(d')^{\tilde{\omega}'(\xi)\chi^{-1}} g'(\xi,\eta)^{\chi^{-1}}\tilde{x}_{\xi\eta} = d^{\chi^{-1}}(d')^{\chi^{-1}\tilde{\omega}(\xi)} g(\xi,\eta)\tilde{x}_{\xi\eta} = d^{\chi^{-1}}\tilde{x}_\xi (d')^{\chi^{-1}}\tilde{x}_\eta = \left(d\tilde{x}_\xi\right)^\Psi\left(d'\tilde{x}_\eta\right)^\Psi,$$

откуда следует, что

$$\left(\left(\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi\right)\left(\sum_{\xi\in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi\right)\right)^\Psi = \left(\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi\right)^\Psi\left(\sum_{\xi\in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi\right)^\Psi$$

для всех

$$\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi, \quad \sum_{\xi\in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \in \left(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\right).$$

Осталось установить инъективность и сюръективность Ψ. Пусть

$$\left(\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi\right)^{\Psi} = 0.$$

Тогда из линейной независимости элементов $\tilde{x}_\xi$ над D_2 следует, что все $d_\xi^{\chi^{-1}}$ равны 0, откуда вытекает, что все d_ξ равны 0, а значит, $\sum_{\xi\in G} d_\xi \tilde{x}_\xi = 0.$ Сюръективность Ψ следует из того факта, что любой элемент

$$\sum_{\xi\in G} \tilde{d}_\xi \tilde{x}_\xi \in \big(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\big)$$

равен

$$\left(\sum_{\xi\in G} \tilde{d}_\xi^{\chi} \tilde{x}_\xi\right)^{\Psi}.$$

Таким образом, поскольку обобщенные абелевы скрещенные произведения $\big(D_1, G, (\omega, f)\big)$ и $\big(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\big)$ K-изоморфны и существует K-изоморфизм $\big(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\big)$ и $\big(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\big)$, получаем, что $\big(D_1, G, (\omega, f)\big)$ и $\big(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\big)$ K-изоморфны.

Пусть теперь $\big(D_1, G, (\omega, f)\big)$ и $\big(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\big)$ K-изоморфны. Тогда, поскольку алгебры $\big(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\big)$ и $\big(D_2, G, (\tilde{\omega}, g)\big)$ K-изоморфны, K-изоморфными являются алгебры $\big(D_1, G, (\omega, f)\big)$ и $\big(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')\big)$, откуда следует [1, теорема 1.3], что обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Теорема доказана.

Основным результатом данной работы является следующий критерий изоморфизма двух алгебр с унитарными инволюциями.

Т е о р е м а 2. *Пусть K – поле с нормированием v (*$\mathrm{char}\,\overline{K} \neq 2$*); (D, τ), (A, μ) – слабо разветвленные конечномерные центральные K-алгебры с делением, снабженные унитарными инволюциями* (*антиавтоморфизмами второго порядка, нетривиально действующими на K*) *τ и μ, обладающими общим полем инвариантов k, которое является гензелевым. Тогда алгебры (D, τ) и (A, μ) K-изоморфны тогда и только тогда, когда $(\overline{D}, \overline{\tau})$ и $(\overline{A}, \overline{\mu})$* (*инволюции $\overline{\tau}$ и $\overline{\mu}$ определяются на $\overline{D}$ и $\overline{A}$ по правилам $d + M_D \mapsto d^{\tau} + M_D$ и $a + M_A \mapsto a^{\mu} + M_A$ соответственно*) *$\overline{K}$-изоморфны и существует изоморфизм $\varphi: \Gamma_D/\Gamma_K \to \Gamma_A/\Gamma_K$ такой, что $\varphi(\mathrm{Ker}\,\theta_D) = \mathrm{Ker}\,\theta_A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть существует K-изоморфизм $\sigma: D \to A$ алгебр (D, τ) и (A, μ). Покажем, что существует изоморфизм $\varphi: \Gamma_D/\Gamma_K \to \Gamma_A/\Gamma_K$ такой, что $\varphi(\mathrm{Ker}\,\theta_D) = \mathrm{Ker}\,\theta_A$.

Так как поле k гензелево, поле K также гензелево. Известно, что из гензелевости K следует, что нормирование v продлевается на алгебры D и A единственным образом. Поскольку D и A изоморфны, продолжения нормирования v на D и A совпадают, т. е. $v(d^{\sigma}) = v(d)$ для всякого $d \in D$. Следовательно, можно считать, что $\Gamma_D = \Gamma_A$, откуда следует, что Γ_D/Γ_K и Γ_A/Γ_K изоморфны и в качестве φ можно взять тождественное отображение. Но тогда $\varphi(\mathrm{Ker}\,\theta_D) = \mathrm{Ker}\,\theta_A$, что следует из определения гомоморфизмов θ_D и θ_A.

Покажем теперь, что отображение $\overline{\sigma}$, определенное по правилу $(d + M_D)^{\overline{\sigma}} \mapsto d^{\sigma} + M_A$, является $\overline{K}$-изоморфизмом алгебр $(\overline{D}, \overline{\tau})$ и $(\overline{A}, \overline{\mu})$.

Так как $\sigma: D \to A$ – K-изоморфизм, для любых $d_1, d_2 \in D$ верны цепочки равенств

$$\big((d_1 + M_D) + (d_2 + M_D)\big)^{\overline{\sigma}} = \big((d_1 + d_2) + M_D\big)^{\overline{\sigma}} = (d_1 + d_2)^{\sigma} + M_D =$$
$$= \Big(d_1^{\sigma} + M_D\Big) + \Big(d_2^{\sigma} + M_D\Big) = (d_1 + M_D)^{\overline{\sigma}} + (d_2 + M_D)^{\overline{\sigma}}$$

и

$$\left((d_1+M_D)(d_2+M_D)\right)^{\bar\sigma}=(d_1d_2+M_D)^{\bar\sigma}=(d_1d_2)^{\sigma}+M_D=$$
$$=\left(d_1^{\sigma}+M_D\right)\left(d_2^{\sigma}+M_D\right)=(d_1+M_D)^{\bar\sigma}(d_2+M_D)^{\bar\sigma},$$

а также $(d+M_D)^{\bar\sigma}=d+M_A$ для всякого $d\in K.$

Докажем инъективность $\bar\sigma$. Пусть $(d+M_D)^{\bar\sigma}=0.$ Это значит, что $d^{\sigma}\in M_A,$ т. е. $v(d^{\sigma})>0.$ Но, поскольку $v(d^{\sigma})=v(d),$ получаем, что $d\in M_D,$ т. е. $d+M_D=0.$

Сюръективность $\bar\sigma$ следует из того факта, что для любого $a+M_A$ существует прообраз $a^{\sigma^{-1}}+M_D.$

Наконец, для всякого $d+M_D$ верна цепочка равенств

$$(d+M_D)^{\bar\tau\bar\sigma}=d^{\tau\sigma}+M_A=d^{\sigma\mu}+M_A=(d+M_D)^{\bar\sigma\bar\mu},$$

откуда следует, что $\bar\sigma$ является $\bar K$-изоморфизмом алгебр $(\bar D,\bar\tau)$ и $(\bar A,\bar\mu).$

Достаточность. Пусть теперь факторгруппы групп значений Γ_D/Γ_K и Γ_A/Γ_K изоморфны и существует $\bar K$-изоморфизм $\tilde\sigma:\bar D\to\bar A$ алгебр $(\bar D,\bar\tau)$ и $(\bar A,\bar\mu).$ Идея доказательства состоит в подъеме изоморфизма $\tilde\sigma$ до подходящего изоморфизма соответствующих алгебр инерции алгебр D и A с последующим распространением его до изоморфизма алгебр D и A.

Хорошо известно, что в D существует τ-инвариантная алгебра инерции I_D (т. е. неразветвленная над K и такая, что $\overline{I_D}=\bar D$). Аналогично в A существует μ-инвариантная алгебра инерции I_A (неразветвленная над K и такая, что $\overline{I_A}=\bar A$). Покажем, что существует K-изоморфизм алгебр (I_D,τ) и $(I_A,\mu).$

Поскольку $\overline{I_D}=\bar D,$ $\overline{I_A}=\bar A,$ то алгебры $\left(\overline{I_D},\bar\tau\right)$ и $\left(\overline{I_A},\bar\mu\right)$ $\bar K$-изоморфны. Построим K-изоморфизм $\sigma:I_D\to I_A$ такой, что $\sigma\mu\sigma^{-1}=\tau.$ Так как алгебры инерции неразветвлены над K, то, согласно [4], существует K-изоморфизм $\sigma_0:I_D\to I_A$ такой, что $\sigma_0\mu\sigma_0^{-1}=\tau i_{1+m},$ где i_{1+m} – внутренний автоморфизм алгебры I_D для такого $1+m\in 1+M_D,$ что $(1+m)^{\tau}=1+m.$ Поскольку расширение $K(m)/k(m)$ слабо разветвлено, из предложения 2 из [5] следует, что $N_{K(m)/k(m)}\left(1+M_{K(m)}\right)=1+M_{k(m)}.$ С другой стороны, $N_{K(m)/k(m)}(a)=a^{\tau}a$ для любого $a\in K(m).$ Таким образом, $1+m=x^{\tau}x$ для некоторого $x\in 1+M_D,$ откуда следует, что

$$(i_x\sigma_0)\mu\left(\sigma_0^{-1}i_{x^{-1}}\right)=i_x\tau i_{1+m}i_{x^{-1}}=\tau i_{x^{-\tau}}i_{1+m}i_{x^{-1}}=\tau.$$

Следовательно, поскольку $\overline{i_x\sigma_0}=\tilde\sigma,$ в качестве σ можно взять изоморфизм $i_x\sigma_0.$

Пусть $Z_D=Z(I_D),$ $Z_A=Z(I_A).$ Для краткости будем обозначать Z_D и Z_A через Z (так как они изоморфны). Известно [2, следствие 2.11], что $C_D(Z)=I_D\otimes_Z T_D,$ где $\overline{I_D}=\overline{C_D(Z)},$ а $\overline{T_D}=\bar Z,$ $\Gamma_{T_D}/\Gamma_K\cong\operatorname{Ker}\theta_D$ и T_D слабо вполне разветвлена над Z. Известно, что T_D является тензорным произведением над полем Z слабо вполне разветвленных символ-алгебр $T_D^{(1)},\ldots,T_D^{(s)}$ с τ-инвариантными образующими. Пусть $T_D^{(1)}=\left(a^n,b^n;Z,\varepsilon_n\right).$ Построим K-изоморфную ей символ-алгебру $T_A^{(1)}=\left(c^n,d^n;Z,\varepsilon_n^{\sigma}\right)\subset T_A.$ Возьмем элемент $c\in T_A$ такой, что $c^{\mu}=c,$ $c^n\in Z.$ Такой c существует, так как мы можем взять его равным $x+x^{\mu},$ где $\left|v(x)+\Gamma_Z\right|=n.$ Кроме того [6, лемма 2], $c^n=\pi(1+m)^n,$ где $\pi\in Z,$ $m\in M_{Z(c^n)}.$ Заменив c на $\dfrac{c}{1+m},$ получим требуемый элемент $c\in T_A.$ Хорошо известно, что в рассматриваемом случае существует $d\in T_A,$ такой, что $d^{\mu}=d,$ $d^n\in Z, dcd^{-1}c^{-1}=\varepsilon_n^{\sigma}.$ Продлив отображение σ на $T_D^{(1)}$ по правилам $a\mapsto c,$ $b\mapsto d,$ получим K-изоморфизм алгебр $T_D^{(1)}$ и $T_A^{(1)}=\left(c^n,d^n;Z,\varepsilon_n^{\sigma}\right).$ Поскольку

$T_D = T_D^{(1)} \otimes_Z R,\quad T_A = T_A^{(1)} \otimes_Z \tilde{R}$, где алгебры R и $\tilde{R}$ слабо вполне разветвлены, мы можем провести аналогичные рассуждения для алгебр R и $\tilde{R}$ (индекс которых меньше). Таким образом, за конечное число шагов мы получим продолжение σ на T_D, такое, что $T_D^{\sigma} = T_A$. Так как $I_D^{\sigma} = I_A$, имеем $C_D(Z)^{\sigma} = C_A(Z)$.

Построенный изоморфизм σ является K-изоморфизмом алгебр $\left(C_D(Z),\tau\right)$ и $\left(C_A(Z),\mu\right)$. Действительно, ограничение σ на I_D удовлетворяет условию $\sigma\mu\sigma^{-1} = \tau$ по построению. Докажем, что равенство $\sigma\mu\sigma^{-1} = \tau$ верно и для ограничения σ на T_D. Так как образующие a и b алгебры $T_D^{(1)} = \left(a^n, b^n; Z, \varepsilon_n\right)$ τ-инвариантны, а образующие c и d алгебры $T_A^{(1)} = \left(c^n, d^n; Z, \varepsilon_n^{\sigma}\right)$ μ-инвариантны, то $a^{\tau\sigma} = a^{\sigma} = c = c^{\mu} = a^{\sigma\mu}$ и $b^{\tau\sigma} = b^{\sigma} = d = d^{\mu} = b^{\sigma\mu}$, откуда (и из того факта, что $z^{\tau\sigma} = z^{\sigma\mu}$ для любого $z \in Z$) следует, что $x^{\tau\sigma} = x^{\sigma\mu}$ для любого $x \in T_D^{(1)}$. Поскольку $T_D = T_D^{(1)} \otimes_Z \cdots \otimes_Z T_D^{(s)}$ и $C_D(Z) = I_D \otimes_Z T_D$, для любого $c' \in C_D(Z)$ верно равенство $(c')^{\tau\sigma} = (c')^{\sigma\mu}$, т. е. σ является K-изоморфизмом алгебр $\left(C_D(Z),\tau\right)$ и $\left(C_A(Z),\mu\right)$.

Заключительная часть доказательства теоремы связана с обобщенными абелевыми скрещенными произведениями.

Известно, что $D = \left\langle \Gamma_1,\ldots,\Gamma_r, C_D(Z)\right\rangle$, где элементы $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_r$ τ-инвариантны, $I_D^{i_{\Gamma_j}} = I_D$ для всех $j \in \{1,\ldots,r\}$, а также для любого $j \in \{1,\ldots,r\}$ внутренний автоморфизм $i_{\Gamma_j}|_{Z_j}$ порождает группу $\mathrm{Gal}(Z_j / K)$, где поля $Z_1,\ldots,Z_r$ таковы, что их прямой композит над K равен Z. Автоморфизм $\zeta = i_{\Gamma_{j1}}^{\alpha_1}\cdots i_{\Gamma_{js}}^{\alpha_s}$ из группы $G = \mathrm{Gal}(Z / K)$ переводит любой элемент $z \in Z$ в элемент $\left(\Gamma_{j1}^{\alpha_1}\cdots\Gamma_{js}^{\alpha_s}\right)^{-1} z\Gamma_{j1}^{\alpha_1}\cdots\Gamma_{js}^{\alpha_s}$. Обозначим $\Gamma_{j1}^{\alpha_1}\cdots\Gamma_{js}^{\alpha_s}$ через x_ζ и определим автоморфизм ω(ζ) алгебры $C_D(Z)$ следующим образом: $c^{\omega(\zeta)} = x_\zeta c x_\zeta^{-1}$. Пара (ω,$f$), где функция $f: G\times G \to C_D(Z)^*$ такая, что $f(\zeta,\eta) = x_\zeta x_\eta (x_{\zeta\eta})^{-1}$ для всех $\zeta,\eta \in G$, является обобщенным 2-коциклом. В самом деле,

$$f(\eta,\zeta)^{\omega(\xi)} f(\xi,\eta\zeta) = x_\xi x_\eta x_\zeta (x_{\eta\zeta})^{-1} x_\xi^{-1} x_\xi x_{\eta\zeta}(x_{\xi\eta\zeta})^{-1} =$$
$$= x_\xi x_\eta x_\zeta (x_{\xi\eta\zeta})^{-1} = x_\xi x_\eta (x_{\xi\eta})^{-1} x_{\xi\eta} x_\zeta (x_{\xi\eta\zeta})^{-1} = f(\xi,\eta) f(\xi\eta,\zeta)$$

и

$$c^{\omega(\zeta)\omega(\eta)} = x_\eta x_\zeta c x_\zeta^{-1} x_\eta^{-1} = x_\eta x_\zeta (x_{\eta\zeta})^{-1} x_{\eta\zeta} c (x_{\eta\zeta})^{-1} x_{\eta\zeta} x_\zeta^{-1} x_\eta^{-1} = f(\eta,\zeta) c^{\omega(\eta\zeta)} f(\eta,\zeta)^{-1}.$$

Таким образом, алгебра D совпадает со скрещенным произведением $\left(C_D(Z), G, (\omega, f)\right)$. Аналогично доказывается, что $A = \left(C_A(Z), G, (\tilde{\omega}, g)\right)$, где $\tilde{\omega}(\zeta)$ – автоморфизм из $\mathrm{Aut}\,A$, такой, что $\tilde{\omega}(\zeta)|_Z = \zeta$, и $g(\zeta,\eta) = \tilde{x}_\zeta \tilde{x}_\eta \left(\tilde{x}_{\zeta\eta}\right)^{-1}$ для всех $\zeta,\eta \in G$ (для всякого $\zeta = i_{\tilde{\Gamma}_{j1}}^{\alpha_1}\cdots i_{\tilde{\Gamma}_{js}}^{\alpha_s}$ элемент $\tilde{x}_\zeta$ определяется как $\tilde{\Gamma}_{j1}^{\alpha_1}\cdots\tilde{\Gamma}_{js}^{\alpha_s}$, где $\tilde{\Gamma}_1,\ldots,\tilde{\Gamma}_r$ – такие фиксированные μ-инвариантные элементы, что $A = \left\langle \tilde{\Gamma}_1,\ldots,\tilde{\Gamma}_r, C_A(Z)\right\rangle$).

Докажем, что обобщенные 2-коциклы (ω,f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Введем гомоморфизм $\hat{\sigma}: D \to A$ такой, что $\hat{\sigma}|_{C_D(Z)} = \sigma|_{C_D(Z)}$ и $\hat{\sigma}(\Gamma_j) = \tilde{\Gamma}_j$ для всех $j \in \{1,\ldots,r\}$. Тогда $\omega(\zeta)\cdot\sigma = \sigma\cdot\tilde{\omega}(\zeta)$, поскольку

$$\left(c^{\omega(\zeta)}\right)^{\sigma} = \left(c^{\omega(\zeta)}\right)^{\hat{\sigma}} = \left(x_\zeta^{-1}\right)^{\hat{\sigma}} c^{\hat{\sigma}} x_\zeta^{\hat{\sigma}} = \tilde{x}_\zeta^{-1} c^{\sigma} \tilde{x}_\zeta = (c^{\sigma})^{\tilde{\omega}(\zeta)}$$

для любого $c \in C_D(Z)$. Кроме того, для всех $\zeta,\eta \in G$ верна цепочка равенств

$$\left(f(\zeta,\eta)\right)^{\sigma} = \left(f(\zeta,\eta)\right)^{\hat{\sigma}} = \left(x_{\zeta\eta}^{\hat{\sigma}}\right)^{-1} x_\zeta^{\hat{\sigma}} x_\eta^{\hat{\sigma}} = \left(\tilde{x}_{\zeta\eta}\right)^{-1} \tilde{x}_\zeta \tilde{x}_\eta = g(\zeta,\eta).$$

Таким образом, приняв $t(\zeta)$ равным 1 для всех $\zeta \in G$, получаем, что обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Таким образом, $\hat{\sigma}$ является *K*-изоморфизмом скрещенных произведений $D = \big(C_D(Z), G, (\omega, f)\big)$ и $A = \big(C_A(Z), G, (\tilde{\omega}, g)\big)$, продолжающим σ. В дальнейшем будем обозначать $\hat{\sigma}$ через σ.

Осталось показать, что σ является *K*-изоморфизмом (D, τ) и (A, μ). Рассмотрим элемент $c\Gamma_{j1} \cdots \Gamma_{j_s} \in D$, где $c \in C_D(Z)$. Так как элементы $\Gamma_{j1}, \ldots, \Gamma_{j_s}$ τ-инвариантны, то $(c\Gamma_{j1} \cdots \Gamma_{j_s})^{\tau} = \Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j1} c^{\tau}$. Заметим, что для любых $c' \in C_D(Z)$ и $j \in \{1, \ldots, r\}$ элемент $\Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j$ лежит в $C_D(Z)$. Действительно, так как $z_1 = \Gamma_j z \Gamma_j^{-1}$ лежит в *Z* для любого $z \in Z$, то верна цепочка равенств

$$\Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j z = \Gamma_j^{-1} c' z_1 \Gamma_j = \Gamma_j^{-1} z_1 c' \Gamma_j = z \Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j,$$

откуда следует, что $\Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j \in C_D(Z)$. Таким образом,

$$\Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j1} c^{\tau} = \tilde{c} \Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j1},$$

где $\tilde{c} = \Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j1} c^{\tau} (\Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j1})^{-1} \in C_D(Z)$. Тогда

$$(c\Gamma_{j1} \cdots \Gamma_{j_s})^{\tau\sigma} = \tilde{c}^{\sigma} \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j1}.$$

В то же время

$$\left(c\Gamma_{j1} \cdots \Gamma_{j_s}\right)^{\sigma\mu} = \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j1} c^{\sigma\mu} = \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j1} c^{\tau\sigma} = \left(\Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j1} c^{\tau}\right)^{\sigma} = \left(\tilde{c}\Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j1}\right)^{\sigma} = \tilde{c}^{\sigma} \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j1}.$$

Следовательно, σ является *K*-изоморфизмом алгебр (D, τ) и (A, μ). Теорема доказана.

Заключение. Доказан критерий *K*-изоморфизма слабо разветвленных конечномерных центральных *K*-алгебр с делением, обладающих унитарными *K*/*k*-инволюциями, в случае гензелева поля инвариантов *k*. Вопрос классификации конечномерных простых центральных *K*-алгебр с унитарными инволюциями для произвольного поля *K* остается открытым.

Список использованных источников

1. Tignol, J.-P. Generalized crossed products [Electronic Resource] / J.-P. Tignol. – Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1987. Mode of access: https://perso.uclouvain.be/jean-pierre.tignol/Rapport106.pdf

2. Jacob, B. Division algebras over Henselian fields / B. Jacob, A. Wadsworth // J. of Algebra. – 1990. – Vol. 128, № 1. – P. 126–179. https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r

3. Курсов, В. В. Скрещенные произведения простых алгебр и их групп автоморфизмов / В. В. Курсов, В. И. Янчевский // Докл. Акад. наук БССР. – 1988. – Т. 32, № 9. – С. 777–780.

4. Тихонов, С. В. Гомоморфизмы и инволюции неразветвленных гензелевых алгебр с делением / С. В. Тихонов, В. И. Янчевский // Зап. науч. семинара ПОМИ. – 2014. – Т. 423. – С. 264–275.

5. Ершов, Ю. Л. Гензелевы нормирования тел и группа SK_1 / Ю. Л. Ершов // Мат. сб. – 1982. – Т. 117 (159). – С. 60–68.

6. Draxl, P. K. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields / P. K. Draxl // J. Reine Angew. Math. – 1984. – Vol. 1948, № 354. – P. 213–218. https://doi.org/10.1515/crll.1984.354.213

References

1. Tignol J.-P. *Generalized crossed products*. Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1987. Available at: https://perso.uclouvain.be/jean-pierre.tignol/Rapport106.pdf

2. Jacob B., Wadsworth A. Division algebras over Henselian fields. *Journal of Algebra*, 1990, vol. 128:1, pp. 126–179. https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r

3. Kursov V. V., Yanchevskii V. I. Crossed products over simple algebras and their automorphism groups. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1988, vol. 32, no. 9, pp. 777–780 (in Russian).

4. Tikhonov S. V., Yanchevskii V. I. Homomorphisms and involutions of unramified Henselian division algebras. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 209, no. 4, pp. 657–664. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2519-x

5. Ershov Yu. L. Henselian valuations of division rings and the group SK_1. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 45, no. 1, pp. 63–71. https://doi.org/10.1070/sm1983v045n01abeh000992

6. Draxl P. K. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1984, vol. 1984, no. 354, pp. 213–218. https://doi.org/10.1515/crll.1984.354.213

Информация об авторах

Говорушко Игорь Олегович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела алгебры, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: govorushko88@gmail.com

Янчевский Вячеслав Иванович – академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом алгебры, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by

Information about the authors

Igor O. Govorushko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: govorushko88@gmail.com

Vyacheslav I. Yanchevskii – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-n