ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 530.12 Поступила в редакцию 29.11.2019
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205 Received 29.11.2019

А. П. Рябушко[1], И. Т. Неманова[2], Т. А. Жур[2]

[1]Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ И ИХ ЦЕНТРА МАСС В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Аннотация. Рассмотрена материальная система, состоящая из двух сферически симметричных тел сравнимых масс, расположенных внутри газопылевого шара со сферически симметричным распределением плотности среды в нем. После выбора соответствующего тензора энергии-импульса из полевых уравнений Эйнштейна с помощью аппроксимационной процедуры Эйнштейна – Инфельда найдены метрика соответствующего пространства-времени и гравитационное поле, создаваемое системой «два тела – среда», а затем получены уравнения движения тел и их центра масс в ньютоновском и постньютоновском приближениях общей теории относительности. Доказано, что в случае указанной плотности среды уже в ньютоновском приближении должен существовать эффект: центр масс двух тел смещается с переменной скоростью, хотя в пустоте он покоился. Данная ситуация является следствием того, что система «два тела – среда» не является замкнутой. Впервые выведены формулы для вычисления величины смещения, которое пропорционально плотности среды в центре газопылевого шара и 5-й степени расстояния между телами. Поэтому при больших расстояниях между телами их центр масс имеет большие смещения (может достигать нескольких миллионов километров за один оборот тел вокруг их центра масс). В случае равенства масс тел их центр масс покоится, если он покоился в пустоте.

Указывается, что полученные результаты и предсказываемые эффекты следует учитывать при обработке наблюдательных данных в астрономии и астрофизике, в вопросах космогонии и космологии.

Ключевые слова: общая теория относительности, два тела, неоднородная среда, уравнения движения тел, центр масс, ньютоновское и постньютоновское приближения

Для цитирования. Рябушко, А. П. Движение системы двух тел и их центра масс в неоднородной среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 194–205. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205

Anton P. Ryabushko[1], Inna T. Nemanova[2], Tatyana A. Zhur[2]

[1]Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

THE MOTION OF THE SYSTEM OF TWO BODIES AND THEIR CENTER OF MASS IN AN INHOMOGENEOUS ENVIRONMENT

Abstract. In this paper, a material system consisting of two spherically symmetric bodies of comparable masses located inside a gas-dust ball with a spherically symmetric distribution of the density of the medium in it is considered. After choosing the corresponding energy-momentum tensor from the Einstein field equations using the Einstein-Infeld approximation procedure, the metric of the corresponding space-time, the gravitational field created by the «two-body – medium» system are found, and then the equations of motion of the bodies and their center of mass are obtained in Newton's and post-Newtonian approximations of the general theory of relativity. It is proved that in the case of the indicated density of the medium, the following effect should exist already in the Newtonian approximation. The center of mass of two bodies shifts at a variable speed, although it was at rest in the void. This situation is a consequence of the fact that the two-body-medium system is not closed. For the first time, formulas for calculating the displacement value, which is proportional to the density of the medium in the center of the gas-dust ball and the 5th degree of the distance between the bodies, are derived. Therefore, at large distances between bodies, their center of mass has large displacements (it can reach several million kilometers per revolution of bodies around their center of mass). If the masses of the bodies are equal, their center of mass is at rest if it is at rest in the void.

Keywords: general theory of relativity, two bodies, inhomogeneous medium, equations of motion of bodies, center of mass, Newtonian and post-Newtonian approximations.

For citation. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. The motion of the system of two bodies and their center of mass in an inhomogeneous environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 194–205 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205

Введение. В [1] авторами настоящей статьи рассмотрена задача о релятивистском движении центра масс (ЦМ) двух тяжелых тел A и B ньютоновскими сравнимыми массами m_a, m_b, движущихся в *однородной* среде плотностью ρ = const. В ньютоновском приближении (НП) общей теории относительности (ОТО) центр масс покоился (система координат барицентрическая), но в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности ЦМ тех же сферически симметричных тел должен смещаться за один ньютоновский оборот тел вокруг их центра масс на значительное расстояние (для стандартной пары звезд смещение порядка 5–10 млн км). В случае круговых орбит тел в НП ОТО движение ЦМ в ПНП ОТО должно происходить по циклоиде, уравнение которой получено.

С целью приближения к реальности в данной работе предлагается решение следующей более общей задачи.

Наблюдения показывают (см., напр., [2–6]), что пары звезд, как правило, окружает газопылевое облако из неоднородной среды, плотность которой распределена зачастую примерно по сферически симметричному закону. Кроме того, предположение о круговых движениях тел в реальности практически не осуществляется. Следует рассматривать эллиптические движения тел в ньютоновском приближении общей теории относительности, а затем релятивистские поправки к движению в постньютоновском приближении общей теории относительности.

В соответствии со сказанным естественна постановка следующей задачи: найти законы движения системы двух сферически симметричных тел в неоднородной среде в постньютоновском приближении общей теории относительности и их центра масс, если в НП ОТО без учета гравитационного поля среды тела движутся по эллипсам и их ЦМ находится в начале координат барицентрической декартовой системы координат $Ox^1x^2x^3$. Плотность среды ρ распределена по сферически симметричном закону

$$\rho=\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right),\quad 0\le r\le R;\ \rho=0,\quad R\le r<+\infty. \tag{1}$$

Кроме этого предполагаем, что в НП ОТО орбитами движения тел являются эллипсы, а не окружности (как в работе [1]), лежащие в координатной плоскости x^1Ox^2, т. е. $x^3=0$.

Сформулированная задача в математическом смысле существенно сложнее круговой задачи при ρ = const, решенной в [1].

Нахождение метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Будем придерживаться схемы вывода, подробно изложенной в статье [7] и монографии [8], а также обозначений в работах [1] и [7].

С помощью разработанной Эйнштейном и Инфельдом аппроксимационной процедуры, изложенной, напр., в [8, 9], прежде всего метрический тензор $g_{\alpha\beta}\left(\alpha,\beta=\overline{0,3}\right)$, массы m_a, m_b, плотность ρ, давление в среде p разлагаются в ряды по малому параметру $\lambda=c^{-1}$, где c – скорость света в вакууме:

$$g_{00}=1+\lambda^2\underset{2}{h}_{00}+\lambda^4\underset{4}{h}_{00}+\ldots,\quad g_{ij}=-\delta_{ij}+\lambda^2\underset{2}{h}_{ij}+\ldots,\quad g_{0i}=\lambda^3\underset{3}{h}_{0i}+\ldots,i,j=1,2,3; \tag{2}$$

$$m_a=\lambda^2\underset{2}{m}_a+\lambda^4\underset{4}{m}_a+\ldots,\quad m_b=\lambda^2\underset{2}{m}_b+\lambda^4\underset{4}{m}_b+\ldots,\quad \rho=\lambda^2\rho_2+\ldots,\quad p=\lambda^4p_4+\ldots, \tag{3}$$

где $\delta_{ij}=1$, если $i=j$; $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$. Величины $\underset{2}{m}_a, \underset{2}{m}_b, \rho_2=\rho$ из (1) заданы в пространстве-времени, метрику которого (или гравитационное поле) следует найти, как и $\underset{4}{m}_a, \underset{4}{m}_b, p_4$, с помощью полевых уравнений Эйнштейна, которые можно записать в виде

$$\overline{R}_{\alpha\beta}=-\frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(\overline{T}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\overline{T}\right), \tag{4}$$

где

$$\overline{R}_{\alpha\beta}=\sqrt{-g}R_{\alpha\beta},\quad \overline{T}_{\alpha\beta}=\sqrt{-g}T_{\alpha\beta},\quad \overline{T}=\sqrt{-g}T,\quad T=\sum_{\alpha=0}^{3}T_{\alpha}^{\ \alpha},$$

$R_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи, $T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса; T – его свертка, γ – ньютоновская гравитационная постоянная, $g=\det\left|g_{\alpha\beta}\right|$. Так как $R_{\alpha\beta}$ выражается через тензор $g_{\alpha\beta}$ и его производные, то $\overline{R}_{\alpha\beta}$ также разлагается в ряды по λ. Теперь следует задать структуру тензора энергии-импульса, отражающую физическую сущность поставленной задачи. В покомпонентной контравариантной записи разложенная в ряды по λ плотность тензора $\overline{T}^{\alpha\beta}$ имеет вид (см. [7; 8; 11, § 106]) $\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)$, $\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)$ – обобщенные функции Дирака:

$$\begin{aligned}
\overline{T}^{00}&=\lambda^2\left[\rho_2+\underset{2}{m}_a\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)+\underset{2}{m}_b\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)\right]+\\
&+\lambda^4\left[-\frac{1}{2}\rho_2\sum_{\alpha=0}^{3}\underset{2}{h}_{\alpha\alpha}+\underset{4}{m}_a\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)+\underset{4}{m}_b\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)\right]+\ldots,\\
\overline{T}^{0i}&=\lambda^3\left[\underset{2}{m}_a\frac{da^i}{dt}\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)+\underset{2}{m}_b\frac{db^i}{dt}\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)\right]+\ldots,\\
\overline{T}^{ij}&=\lambda^4\left[\underset{2}{m}_a\frac{da^i}{dt}\frac{da^j}{dt}\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)+\underset{2}{m}_b\frac{db^i}{dt}\frac{db^j}{dt}\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)+p_4\delta_{ij}+\underset{4}{t}^{ij}\right]+\ldots,
\end{aligned} \tag{5}$$

где a^i, b^i – декартовы координаты тел A и B; t – время; $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ – радиусы-векторы любой точки M, точечных тел A, B соответственно.

Величины $\underset{4}{t}^{ij}$ появляются в (5) по той причине, что закон Паскаля для давления среды при наличии в газопылевом шаре двух движущихся тел нарушается (ср. [11, § 35] с [12]).

Опустив по известному правилу индексы в $\overline{T}^{\alpha\beta}$ из (5), т. е. получив плотность $\overline{T}_{\alpha\beta}$, разложенной в ряд по λ, разложив в ряд по λ $\overline{R}_{\alpha\beta}$, получаем разложение уравнений Эйнштейна (4) в ряды по λ (в (5) заменяем ρ_2 на ρ, где ρ из (1)). В итоге в низших приближениях имеем систему уравнений:

$$\underset{2}{\overline{R}}_{00}\equiv-\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{00,ss}=-4\pi\gamma\left[\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)+\underset{2}{m}_a\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)+\underset{2}{m}_b\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)\right], \tag{6}$$

$$\underset{3}{\overline{R}}_{0i}\equiv\frac{1}{2}\left(\underset{3}{h}_{0s,si}-\underset{3}{h}_{0i,ss}+\underset{2}{h}_{is,s0}-\underset{2}{h}_{ss,i0}\right)=8\pi\gamma\left[\underset{2}{m}_a\frac{da^i}{dt}\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)+\underset{2}{m}_b\frac{db^i}{dt}\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)\right], \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}_{ij}&\equiv\frac{1}{2}\left(\underset{2}{h}_{00,ij}-\underset{2}{h}_{ij,ss}-\underset{2}{h}_{ss,ij}+\underset{2}{h}_{is,js}+\underset{2}{h}_{js,is}\right)=\\
&=-4\pi\gamma\delta_{ij}\left[\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)+\underset{2}{m}_a\delta\left(\vec{r}-\vec{a}\right)+\underset{2}{m}_b\delta\left(\vec{r}-\vec{b}\right)\right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Индексы i, j, s принимают значения 1, 2, 3; по повторяющемуся индексу s подразумевается суммирование; запятая означает частную производную. Например,

$$\underset{2}{h}_{00,ss}=\frac{\partial^2 \underset{2}{h}_{00}}{\partial x^{1\,2}}+\frac{\partial^2 \underset{2}{h}_{00}}{\partial x^{2\,2}}+\frac{\partial^2 \underset{2}{h}_{00}}{\partial x^{3\,2}},\qquad \underset{2}{h}_{is,s0}=\frac{\partial^2 \underset{2}{h}_{i1}}{\partial x^1 \partial x^0}+\frac{\partial^2 \underset{2}{h}_{i2}}{\partial x^2 \partial x^0}+\frac{\partial^2 \underset{2}{h}_{i3}}{\partial x^3 \partial x^0}.$$

Уравнение (6) является уравнением Пуассона, решение которого находим стандартным методом в области $0 \le r \le R$, т. е. в шаре радиусом R с центром в начале координат O; в шаре плотность среды распределена по закону (1):

$$\underset{2}{h}_{00}=-\frac{2\gamma \underset{2}{m}_a}{\left|\vec{r}-\vec{a}\right|}-\frac{2\gamma \underset{2}{m}_b}{\left|\vec{r}-\vec{b}\right|}+\frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0\left(r^2-\frac{r^3}{2R}-R^2\right). \tag{9}$$

При интегрировании уравнения (6) также принимается, что тела A и B находятся внутри шара, т. е. $\left|\vec{a}\right| < R$, $\left|\vec{b}\right| < R$. Указанные ограничения на r, $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$ также относятся к уравнениям (7) и (8).

Решением уравнения (8) являются функции

$$\underset{2}{h}_{ij}=\delta_{ij}\,\underset{2}{h}_{00}. \tag{10}$$

Подставив функции $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{2}{h}_{ij}$ из (9) и (10) в (7), получаем уравнение, решением которого являются функции

$$\underset{3}{h}_{0i}=4\left(\frac{\gamma \underset{2}{m}_a}{\left|\vec{r}-\vec{a}\right|}\frac{da^i}{dt}+\frac{\gamma \underset{2}{m}_b}{\left|\vec{r}-\vec{b}\right|}\frac{db^i}{dt}\right), \tag{11}$$

что можно проверить подстановкой $\underset{3}{h}_{0i}$ из (11) в указанное выше уравнение.

Для получения уравнений движения тел в постньютоновском приближении общей теории относительности еще необходимо найти $\underset{4}{h}_{00}$, $\underset{4}{m}_a$, $\underset{4}{m}_b$, $\underset{4}{p}$, $\underset{4}{t}^{ij}$.

С этой целью сначала рассмотрим уравнение Эйнштейна (4) при α = 0, β = 0 в четвертом порядке по λ. Имеем

$$\underset{4}{\overline{R}}_{00}=-\frac{1}{2}\left[\left(\underset{4}{h}_{00}-\frac{1}{2}\underset{2}{h}^{2}_{00}\right)_{,ss}-\underset{2}{h}_{00,00}+\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{h}_{00,ss}\right]. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\underset{4}{\overline{R}}_{00}=-8\pi\gamma\left[\underset{4}{\overline{T}}_{00}-\frac{1}{2}\left(\underset{4}{\overline{T}}+\underset{2}{h}_{00}\,\underset{2}{\overline{T}}\right)\right], \tag{13}$$

где $\underset{4}{\overline{T}}_{00}$ находим согласно правилу опускания индексов у компоненты плотности тензора T^{00} из (5).

Приравняв правые части в равенствах (12) и (13), получаем уравнение для нахождения $\underset{4}{h}_{00}$:

$$\underset{4}{h}_{00,ss}=\frac{1}{2}\underset{2}{h}^{2}_{00,ss}+\underset{2}{h}_{00,00}-\underset{2}{h}_{00}\underset{2}{h}_{00,ss}+16\pi\gamma\left[\underset{4}{\overline{T}}_{00}-\frac{1}{2}\left(\underset{4}{\overline{T}}+\underset{2}{h}_{00}\,\underset{2}{\overline{T}}\right)\right]. \tag{14}$$

Но в (14) входят через $\underset{4}{\overline{T}}_{00}$ и $\underset{4}{\overline{T}}$ пока еще неизвестные функции $\underset{4}{m}_a$, $\underset{4}{m}_b$, $\underset{4}{p}$, $\underset{4}{t}^{ij}$. Как известно (см. [7; 8, § 6]), функции $\underset{4}{m}_a$, $\underset{4}{m}_b$ можно найти из уравнений пятого порядка по λ:

$$\int\limits_{V_a}\sqrt{-g}\,T^{0\beta}_{;\beta}dV=0,\quad \int\limits_{V_b}\sqrt{-g}\,T^{0\beta}_{;\beta}dV=0, \tag{15}$$

где интегрирование ведется по трехмерным объемам V_a и V_b (V_a содержит в себе только одно тело A, а V_b – только тело B). В (15) точка с запятой (;) означает ковариантную производную (по координате x^β), которая определяется формулой

$$\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}_{;\beta}\equiv\left(\overline{T}^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\overline{T}^{\beta\nu},\quad \alpha,\beta,\nu=0,1,2,3, \tag{16}$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$ – символы Кристофеля 2-го рода, выражающиеся через метрический тензор

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(g_{\beta\sigma,\nu}+g_{\nu\sigma,\beta}-g_{\beta\nu,\sigma}\right),\quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta},\quad g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{17}$$

Символ Кронекера $\delta^{\alpha}_{\beta}=0,$ если $\alpha\neq\beta$, и $\delta^{\alpha}_{\beta}=1,$ если $\alpha=\beta$.

Разложив в ряды по λ подынтегральные функции в (15), пользуясь формулами (2), (5), (16), (17) и ограничиваясь членами 5-го порядка по λ, после интегрирования из (15) находим (точка над буквой означает производную по t):

$$\underset{4}{m}_a=\frac{1}{2}\underset{2}{m}_a\left(\dot a^s\dot a^s-\underset{2}{h}_{00}\left(\vec a\right)\right),\quad \underset{4}{m}_b=\frac{1}{2}\underset{2}{m}_b\left(\dot b^s\dot b^s-\underset{2}{h}_{00}\left(\vec b\right)\right). \tag{18}$$

В (5) к паскалеву давлению $\underset{4}{p}$ в среде (1) добавляется величина $\underset{4}{t}^{ij}$ ($\underset{4}{t}^{ij}=0$ при $i\neq j$ и $\underset{4}{t}^{ij}\neq 0$ при $i=j$). Для вычисления $\underset{4}{p}$, $\underset{4}{t}^{11}$, $\underset{4}{t}^{22}$, $\underset{4}{t}^{33}$ используем закон сохранения $T^{i\beta}_{;\beta}=0,$ являющийся следствием уравнений Эйнштейна (4), из которого находим (в дальнейшем для упрощения записей всюду заменяем $\underset{2}{m}_a$, $\underset{2}{m}_b$ на m_a, m_b; вводим также обозначения $r_a=\left|\vec r-\vec a\right|$, $r_b=\left|\vec r-\vec b\right|$, $a=\left|\vec a\right|$, $b=\left|\vec b\right|$):

$$3\underset{4}{p}+\underset{4}{t}^{11}+\underset{4}{t}^{22}+\underset{4}{t}^{33}=\rho_0\left[\frac{\gamma m_a}{r_a}+\frac{\gamma m_b}{r_b}+\frac{\gamma m_a}{R}\left(-\frac{r}{r_a}+\ln\left|\frac{r-\dfrac{a^2}{r}+\dfrac{r_a^2}{r}+2r_a}{R-\dfrac{a^2}{R}+\dfrac{\left|\vec R-\vec a\right|}{R}+2\left|\vec R-\vec a\right|}\right|\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma m_b}{R}\left(-\frac{r}{r_b}+\ln\left|\frac{r-\dfrac{b^2}{r}+\dfrac{r_b^2}{r}+2r_b}{R-\dfrac{b^2}{R}+\dfrac{\left|\vec R-\vec b\right|}{R}+2\left|\vec R-\vec b\right|}\right|\right)\right], \tag{19}$$

где $\vec R=\dfrac{\vec r}{r}R$ – радиус-вектор произвольной точки M на поверхности шара. Подставив в (14) найденные выражения для $\underset{4}{m}_a$, $\underset{4}{m}_b$ согласно (18), а также выражение для $3\underset{4}{p}+\underset{4}{t}^{11}+\underset{4}{t}^{22}+\underset{4}{t}^{33}$ из (19), находим уравнение Пуассона для $\underset{4}{h}_{00}$ (его не выписываем из-за чрезвычайной громоздкости), решение которого получаем после продолжительных вычислений в виде

$$\underset{4}{h}_{00}=-\gamma m_a r_{a,00}-\gamma m_b r_{b,00}+\frac{2\gamma^2 m_a m_b}{a+b}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)-\frac{4\pi\gamma^2}{3r_a}\rho_0 m_a\left(a^2-\frac{a^3}{2R}-R^2\right)-$$

$$-\frac{4\pi\gamma^2}{3r_b}\rho_0 m_b\left(b^2-\frac{b^3}{2R}-R^2\right)+\frac{2\gamma^2}{r_a^2}m_a^2+\frac{2\gamma^2}{r_b^2}m_b^2+\frac{4\gamma^2}{r_a r_b}m_a m_b-$$

$$-\frac{8}{3}\pi\gamma^2\rho_0\left(r^2-\frac{r^3}{2R}-R^2\right)\left(\frac{m_a}{r_a}+\frac{m_b}{r_b}\right)-$$

$$-\frac{3\gamma m_a}{r_a}\dot{a}^s\dot{a}^s-\frac{3\gamma m_b}{r_b}\dot{b}^s\dot{b}^s-6\gamma^2\rho_0\left(m_a\int\limits_{V_R}\frac{dV'}{\left|\vec{r}'-\vec{a}\right|\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|}+m_b\int\limits_{V_R}\frac{dV'}{\left|\vec{r}'-\vec{b}\right|\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|}\right)+$$

$$+\frac{6\gamma^2\rho_0}{R}\left(m_a\int\limits_{V_R}\frac{r'dV'}{\left|\vec{r}'-\vec{a}\right|\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|}+m_b\int\limits_{V_R}\frac{r'dV'}{\left|\vec{r}'-\vec{b}\right|\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|}\right)+$$

$$+\frac{2\gamma^2\rho_0}{R}\left(m_a\int\limits_{V_R}\ln\left|\frac{R-\dfrac{a^2}{R}+\dfrac{\left|\vec{R}'-\vec{a}\right|^2}{R}+2\left|\vec{R}'-\vec{a}\right|}{r'-\dfrac{a^2}{r'}+\dfrac{\left|\vec{r}'-\vec{a}\right|^2}{r'}+2\left|\vec{r}'-\vec{a}\right|}\right|\frac{dV'}{\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|}+\right.$$

$$\left.+m_b\int\limits_{V_R}\ln\left|\frac{R-\dfrac{b^2}{R}+\dfrac{\left|\vec{R}'-\vec{b}\right|^2}{R}+2\left|\vec{R}'-\vec{b}\right|}{r'-\dfrac{b^2}{r'}+\dfrac{\left|\vec{r}'-\vec{b}\right|^2}{r'}+2\left|\vec{r}'-\vec{b}\right|}\right|\frac{dV'}{\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|}\right), \tag{20}$$

где

$$x^0=ct,\quad r_{a,00}=\frac{\partial^2 r_a}{\left(\partial x^0\right)^2},\quad r_{b,00}=\frac{\partial^2 r_b}{\left(\partial x^0\right)^2},\quad \dot{a}^s=\frac{da^s}{dt},\quad \dot{b}^s=\frac{db^s}{dt},$$

интегрирование ведется по объему шара V_R.

Вывод уравнений движения тел A и B и их центра масс C_p в среде (1) в ньютоновском приближении общей теории относительности. Известно [8–10], что уравнения движения (УД) тел A и B в общей теории относительности можно записать в интегральной форме, проинтегрировав по V_a и V_b плотность дивергенции тензора энергии-импульса (16) и приравняв нулю полученные выражения:

$$\int\limits_{V_a}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}_{;\beta}dV=0,\quad \int\limits_{V_b}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}_{;\beta}dV=0. \tag{21}$$

При $\alpha = 0$ из (21) получаем в третьем порядке по λ $m_a=\text{const}$, $m_b=\text{const}$, а в пятом – $\underset{4}{m}_a$, $\underset{4}{m}_b$ из (18). При $\alpha = i$ в НП ОТО из (21), использовав метрику (2), (9), выводим после достаточно длинных и утомительных вычислений УД тел A и B (напоминаем, что движение плоское, и поэтому здесь и далее i принимает только значения 1 и 2):

$$m_a \ddot{a}^i_\rho = m_a \frac{d^2 a^i_\rho}{dt^2} = -\frac{\gamma m_a m_b}{\left|\vec{a}_\rho - \vec{b}_\rho\right|^3}\left(a^i_\rho - b^i_\rho\right) - 2\pi\gamma\rho_0 m_a \left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R}\right) a^i, \tag{22}$$

$$m_b \ddot{b}^i_\rho = m_b \frac{d^2 b^i_\rho}{dt^2} = -\frac{\gamma m_a m_b}{\left|\vec{a}_\rho - \vec{b}_\rho\right|^3}\left(b^i_\rho - a^i_\rho\right) - 2\pi\gamma\rho_0 m_b \left(\frac{2}{3} - \frac{b}{2R}\right) b^i, \tag{23}$$

где a^i_ρ, b^i_ρ – координаты тел A, B, учитывающие влияние на движение тел гравитационного поля среды; координатами векторов $\overrightarrow{a_\rho}$, $\overrightarrow{b_\rho}$ являются a^i_ρ, b^i_ρ. Так как последние члены справа в (22), (23) пропорциональны ρ_0, которое учитываем только в первой степени, то величины a, b, a^i, b^i значком ρ не снабжаются, т. е. они вычисляются без учета гравитационного поля среды.

В ньютоновском приближении общей теории относительности в пустоте выбрана барицентрическая система координат, т. е. центр масс $C(c^i)$, определяемый известной формулой

$$c^i = \frac{m_a a^i + m_b b^i}{m_a + m_b}, \tag{24}$$

покоится в начале координат O и, следовательно, выполняется равенство

$$m_a a^i + m_b b^i = 0. \tag{25}$$

Центр масс материальной системы «тела A, B – шар» $C_\rho\left(c^i_\rho\right)$ следует в НП ОТО определить формулой

$$c^i_\rho = \frac{m_a a^i_\rho + m_b b^i_\rho}{m_a + m_b}. \tag{26}$$

Дважды продифференцировав (26) по t, заменив $m_a \ddot{a}^i_\rho$ и $m_b \ddot{b}^i_\rho$ их выражениями из (22), (23) и воспользовавшись (25), получаем УД центра масс C_ρ в среде (1) в НП ОТО:

$$\ddot{c}^i_\rho = \frac{\pi\gamma\rho_0}{\left(m_a + m_b\right) R}\left(m_a a\, a^i + m_b b\, b^i\right). \tag{27}$$

Так как вычисления ведутся с точностью до первой степени ρ_0, то в (27) величины a, b, a^i, b^i относятся к движению тел A и B в *пустоте* и имеют значения

$$a = \frac{m_b}{m_a + m_b} r, \quad b = \frac{m_a}{m_a + m_b} r, \quad a^i = \frac{m_b}{m_a + m_b} x^i, \quad b^i = -\frac{m_a}{m_a + m_b} x^i, \quad \begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{28}$$

где

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{29}$$

и (29) является уравнением относительной орбиты тел A и B в полярной системе координат. Используя соотношения (28), (29), преобразуем уравнение (27):

$$\ddot{c}^i_\rho = \frac{\pi\gamma\rho_0 m_a m_b \left(m_b - m_a\right) p x^i}{R\left(m_a + m_b\right)^3 \left(1 + e\cos\varphi\right)}, \tag{30}$$

интегрирование которого с точностью до e^2 и вековых членов приводит к параметрическим уравнениям траектории движения центра масс тел A и B в среде (1) в НП ОТО:

$$c_\rho^1 = K\left(1 - \cos\varphi - e\varphi^2 + 4e^2\varphi\sin\varphi\right), \quad c_\rho^2 = K\left(\varphi - \sin\varphi + \frac{3}{2}e^2\varphi\right), \tag{31}$$

где

$$K = \frac{\pi\rho_0 m_a m_b \left(m_b - m_a\right) p^5}{R\left(m_a + m_b\right)^4}. \tag{32}$$

Пользуясь связью (26) и соотношениями (28), находим координаты тел *A* и *B*, дающие уравнения траекторий тел *A* и *B* в среде (1) в НП ОТО:

$$a_\rho^i = \frac{m_b}{m_a + m_b}x^i + c_\rho^i, \quad b_\rho^i = -\frac{m_a}{m_a + m_b}x^i + c_\rho^i, \tag{33}$$

где x^i определяется согласно (28), (29), а c_ρ^i – согласно (31), (32).

Подчеркнем, что φ в уравнениях (31), (33) играет роль параметра, а не координаты полярной системы координат, т. е. (31), (33) – параметрические уравнения некоторых линий.

Вывод уравнений движения тел *A*, *B* и их центра масс в среде (1) в постньютоновском приближении общей теории относительности. Рассмотрим уравнения (21). При $\alpha = 0$ в пятом порядке из них уже найдены $\underset{4}{m}_a$, $\underset{4}{m}_b$ (см. (18)). При $\alpha = i$ и использовании (18) и (19) после продолжительных и достаточно сложных вычислений (занимающих примерно 30 страниц текста) из (21) в шестом порядке по λ получаем УД тел *A*, *B* в ПНП ОТО, которые после сокращения на λ^4 и замены оставшегося λ^2 на c^{-2} (см. формулу (6.20) в [8]) можно записать в виде

$$\tilde{m}_a \frac{d^2\tilde{a}_\rho^i}{dt^2} + \frac{\gamma\tilde{m}_a\tilde{m}_b}{\left|\tilde{\vec{a}}_\rho - \tilde{\vec{b}}_\rho\right|^3}\left(\tilde{a}_\rho^i - \tilde{b}_\rho^i\right) + 2\pi\gamma\rho_0\tilde{m}_a\left(\frac{2}{3} - \frac{\tilde{a}}{2R}\right)\tilde{a}^i = F_{a\rho}^i, \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{a\rho}^i = \frac{\gamma m_a}{c^2}\Bigg\{ & \frac{3m_b}{r_{ab}^3}\left(a^s - b^s\right)\dot{a}^s\dot{a}^i - \frac{m_b}{r_{ab}^3}\left(a^i - b^i\right)\dot{a}^s\dot{a}^s + \frac{4\gamma m_b^2}{r_{ab}^4}\left(a^i - b^i\right) - \\
& - \frac{3m_b}{r_{ab}^3}\left(a^s - b^s\right)\dot{b}^s\dot{a}^i - \frac{2m_b}{r_{ab}^3}\left(a^i - b^i\right)\dot{b}^s\dot{b}^s + \frac{5m_a m_b}{r_{ab}^4}\left(a^i - b^i\right) + \frac{3m_b}{r_{ab}^3}\left(a^s - b^s\right)\dot{b}^s\dot{b}^i + \\
& + \frac{3m_b}{2r_{ab}^5}\left[\left(a^s - b^s\right)\dot{b}^s\right]^2\left(a^i - b^i\right) + \frac{4m_b}{r_{ab}^3}\dot{a}^s\dot{b}^s\left(a^i - b^i\right) - \frac{4m_b}{r_{ab}^3}\left(a^s - b^s\right)\dot{a}^s\dot{b}^i + \\
& + \pi\rho_0\Bigg[6\left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R}\right)a^s\dot{a}^s\dot{a}^i - 2\left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R}\right)\dot{a}^s\dot{a}^s a^i + 8\frac{\gamma m_b}{r_{ab}}\left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R}\right)a^i - \\
& - 8\frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{6R} - \frac{R^2}{3}\right)\left(a^i - b^i\right) - 7\frac{\gamma m_b}{r_{ab}}\left(\frac{2}{3} - \frac{b}{2R}\right)b^i - \frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3}\left(\frac{2}{3} - \frac{b}{2R}\right)\times \\
& \times\left(a^s - b^s\right)b^s\left(a^i - b^i\right) - 2\frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3}\left(\frac{b^2}{3} - \frac{b^3}{6R} - \frac{R^2}{3}\right)\left(a^i - b^i\right)\Bigg]\Bigg\} + \\
& + \frac{\gamma^2 m_a\rho_0}{c^2}\Bigg\{3\Bigg[m_a\int\limits_{V_R}\frac{x^{i\prime} - a^i}{\left|\vec{r}\,' - \vec{a}\right|^4}dV' - m_b\int\limits_{V_R}\frac{\left(x^{i\prime} - a^i\right)dV'}{\left|\vec{r}\,' - \vec{b}\right|\left|\vec{r}\,' - \vec{a}\right|^3}\Bigg] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{3}{R}\left[m_a\int\limits_{V_R}\frac{r'\left(x^{i\prime}-a^i\right)}{\left|\vec{r}\,'-\vec{r}\right|^4}dV'+m_b\int\limits_{V_R}\frac{r'\left(x^{i\prime}-a^i\right)dV'}{\left|\vec{r}\,'-\vec{b}\right|\left|\vec{r}\,'-\vec{a}\right|^3}\right]-$$

$$-\frac{1}{R}\left[m_a\int\limits_{V_R}\ln\left|\frac{R-\dfrac{a^2}{R}+\dfrac{\left|\vec{R}\,'-\vec{a}\right|^2}{R}+2\left|\vec{R}\,'-\vec{a}\right|}{r'-\dfrac{a^2}{r'}+\dfrac{\left|\vec{r}\,'-\vec{a}\right|^2}{r'}+2\left|\vec{r}\,'-\vec{a}\right|}\right|\frac{x^{i\prime}-a^i}{\left|\vec{r}\,'-\vec{a}\right|^3}dV'+\right.$$

$$\left.\left.+m_b\int\limits_{V_R}\ln\left|\frac{R-\dfrac{b^2}{R}+\dfrac{\left|\vec{R}\,'-\vec{b}\right|^2}{R}+2\left|\vec{R}\,'-\vec{b}\right|}{r'-\dfrac{b^2}{r'}+\dfrac{\left|\vec{r}\,'-\vec{b}\right|^2}{r'}+2\left|\vec{r}\,'-\vec{b}\right|}\right|\frac{x^{i\prime}-b^i}{\left|\vec{r}\,'-\vec{b}\right|^3}dV'\right]\right\}; \tag{35}$$

тильда «~» над буквой указывает, что величина вычисляется с учетом релятивистских поправок, пропорциональных множителю $\lambda^2=c^{-2}$, $\tilde{m}_a=m_a+\underset{4}{m}_a$, $\tilde{m}_b=m_b+\underset{4}{m}_b$, $\underset{4}{m}_a$, $\underset{4}{m}_b$ (см. в (18)); $r_{ab}=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ – ньютоновское расстояние между телами A и B.

Для тела B имеем следующие УД в среде (1) в ПНП ОТО:

$$\tilde{m}_b\frac{d^2\tilde{b}^i_\rho}{dt^2}+\frac{\gamma\tilde{m}_a\tilde{m}_b}{\tilde{r}^3_{ab\rho}}\left(\tilde{b}^i_\rho-\tilde{a}^i_\rho\right)+2\pi\gamma\rho_0\tilde{m}_b\left(\frac{2}{3}-\frac{\tilde{b}}{2R}\right)\tilde{b}^i=F^i_{b\rho}, \tag{36}$$

где $\tilde{r}_{ab\rho}=\left|\tilde{\vec{a}}_\rho-\tilde{\vec{b}}_\rho\right|$ – расстояние между телами A и B при учете влияния гравитационного поля среды (1) и релятивистских поправок к движению тел A и B; $F^i_{b\rho}$ получаем из $F^i_{a\rho}$ заменой букв $a\leftrightarrow b$.

Центр масс $\tilde{C}_\rho\left(\tilde{c}^i_\rho\right)$ тел A и B в среде (1) в ПНП ОТО определяем формулой

$$\tilde{c}^i_\rho=\frac{\tilde{m}_a\tilde{a}^i_\rho+\tilde{m}_b\tilde{b}^i_\rho}{\tilde{m}_a+\tilde{m}_b}, \tag{37}$$

где $\tilde{a}^i_\rho$, $\tilde{b}^i_\rho$ являются решениями уравнений (34), (36). Если релятивистские силы $F^i_{a\rho}$, $F^i_{b\rho}$ в (34), (36) заменить нулями, получаем уравнения (22), (23), решениями которых являются a^i_ρ, b^i_ρ, указанные формулами (33).

Проинтегрировав систему (34), (36), находим $\tilde{a}^i_\rho$, $\tilde{b}^i_\rho$ (выражающие их формулы занимают чрезвычайно много места, и поэтому здесь не приводятся), подставив которые в (37), находим

$$\tilde{c}^i_\rho=c^i_\rho+\Delta c^i_\rho, \tag{38}$$

где функции c^i_ρ определяются формулами (31), (32), а функции Δc^i_ρ появились, благодаря учету в (34), (36) релятивистских сил $F^i_{a\rho}$, $F^i_{b\rho}$.

Таким образом, получили параметрические уравнения траектории движения центра масс тел A и B (38), состоящие из суммы: ньютоновское движение c_ρ^i плюс поправочное релятивистское движение Δc_ρ^i.

Обсуждение результатов, численные оценки эффектов в ньютоновском приближении общей теории относительности. Рассмотрим сначала предсказываемые закономерности движения центра масс C_ρ и тел A, B в среде (1) в НП ОТО, пользуясь достаточно простыми и *впервые* выведенными уравнениями (31)–(33).

1. Рассматриваемая система «два тела – материальный шар» не является замкнутой, что приводит при учете гравитационного поля неоднородной среды к неравномерному криволинейному движению центра масс (26), (37) этой системы, т. е. к отсутствию барицентрической системы отсчета в НП и ПНП ОТО. (О понятиях «замкнутая система», «центр тяжести», «центр инерции», «центр масс» см. в [8, §17, 23; 11, §9, 14; 13, § 23; 14, §5, 8].)

2. Прежде всего отметим, что эффект смещения центра масс в неоднородной среде (1) существует уже в *ньютоновской* теории движения тел, в то время как в среде с *постоянной* плотностью ρ = const эффект появляется только в ПНП ОТО (см. [1, формулы (15)–(17)]; в (17) следует заменить 10^{10} на 10^{-10}, что означает чрезвычайную малость релятивистского эффекта, указанного в [1]). Если в [1], формула (15), взять, в частности,

$$m_a = 10^{33}\,\text{г},\quad m_b = 2\cdot 10^{33}\,\text{г},\quad \rho = 10^{-21}\,\text{г}\cdot\text{см}^{-3},\quad R = 10^{18}\,\text{см},\quad \left|\vec{a}\right| = 2\left|\vec{b}\right| = (1-10^{-\nu})R,$$

где $\nu = 3{,}36 \cdot 10^5$, то получим в [1] циклоиду (17), но период обращения тел будет порядка 250 лет.

3. Ньютоновский эффект смещения центра масс C_ρ существует только при $m_a \neq m_b$. Если $m_a = m_b$, то согласно (32) $K = 0$, и тогда $c_\rho^i = 0$, т. е. центр масс C_ρ покоится в начале координат O, $a = b$ согласно (28) и тела A и B движутся по одному и тому же эллипсу, диаметр которого r из (29), находясь в диаметрально противоположных положениях.

4. Если движение тел A и B эллиптическое, то $m_a \neq m_b$ и движение центра масс подчиняется уравнениям (31), (32), из которых при *малом* эксцентриситете $0 < e \ll 1$ следует, что центр масс практически передвигается по циклоиде (за небольшой промежуток времени)

$$c_\rho^1 = K\left(1-\cos\varphi\right),\quad c_\rho^2 = K\left(\varphi-\sin\varphi\right), \tag{39}$$

в положительном направление координатной оси Ox^2 с увеличением φ, если $K > 0$ ($m_b > m_a$ согласно (32)), и в отрицательном – при $K < 0$ ($m_b < m_a$). За один оборот тел A и B вокруг своего центра масс получаем смещение на расстояние $\Delta = 2\pi K$. При нормальных эксцентриситетах e траектория (31) значительно отличается от циклоиды (39).

5. Оценим порядок величины K для системы двух тел, близких по своим характеристикам к системе Солнце – Юпитер плюс плотность межпланетной среды. Принимаем:

$$m_a = 2\cdot 10^{33}\,\text{г},\ m_b = 2\cdot 10^{30}\,\text{г},\ e = 0{,}048,\ R = 10^{18}\,\text{см},\ p = 7{,}62\cdot 10^{13}\,\text{см},\ \rho_0 = 10^{-21}\,\text{г}\cdot\text{см}^{-3}.$$

Тогда согласно (32) имеем $K \approx -4\cdot 10^{-6}\,\text{см}$ и смещение за один оборот $\Delta = 2\pi K \approx -1{,}26\cdot 10^{-5}\,\text{см}$, т. е. смещение для планетарной системы чрезвычайно малое.

6. С помощью современной наблюдательной техники в Галактике обнаружены газопылевые облака, внутри которых находятся плотные образования (планетарные, диффузные туманности, шаровые скопления и т. п.). Принимаем в соответствии с данными наблюдений (см. [2–6]) один из реальных вариантов:

$$m_a = 10^{33}\,\text{г},\ m_b = 2\cdot 10^{33}\,\text{г},\ p = 10^{16}\,\text{см},\ R = 10^{18}\,\text{см},\ \rho_0 = 10^{-18}\,\text{г}\cdot\text{см}^{-3}.$$

Подставив эти данные в формулу (32), находим $K \approx 0{,}78\cdot 10^{10}\,\text{см}$. Тогда за один оборот тел A и B вокруг их центра масс получаем его смещение на $\Delta = 2\pi K \approx 5\cdot 10^{10}\,\text{см} = 500\,000\,\text{км}$.

7. При нормальном эксцентриситете $0 < e < 1$ членами с «e» в (31) при рассмотрении движения за *большие* промежутки времени пренебрегать нельзя, так как при больших φ (31) дает траекторию, существенно отличающуюся от циклоиды (39). Действительно, при прежнем K и e = 0,5 смещение по оси Ox^1 центра масс после n оборотов дает величину $c_\rho^1 = (2\pi n)^2 eK$, а по оси Ox^2 смещение $c_\rho^2 = 2,75\pi nK$. С увеличением числа оборотов n c_ρ^1, c_ρ^2 неограниченно увеличиваются (по модулю). За миллионы – миллиарды лет своего существования центр масс двух тел (например, двойной звезды, рассмотренной в пункте 6) благодаря неоднородной среде должен согласно уравнениям (31) «путешествовать» в космосе на значительные расстояния, порядка нескольких миллиардов километров.

Обсуждение результатов и численные оценки эффектов в постньютоновском приближении общей теории относительности. Отношение релятивистских сил $F_{a\rho}^i$, $F_{b\rho}^i$, присутствующих в уравнениях движения (34) и (36), к ньютоновским силам в этих уравнениях слева (пропорциональных плотности ρ_0) дает величину порядка v^2/c^2, где v – скорость движения тел A и B, которая в стандартных ситуациях имеет порядок десятков километров в час. Тогда $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$. Это означает, что *качественная* картина поведения тел A и B не изменится при воздействии на систему тел сил $F_{a\rho}^i$, $F_{b\rho}^i$, а только изменятся численные оценки эффектов на величины порядка 10^{-8}. Формулы, представляющие эти величины, выписать в статье невозможно из-за их большого объема, в чем нет сожаления в силу малых поправок при их учете. Таким образом, $\tilde{a}_\rho^i$, $\tilde{b}_\rho^i$, $\tilde{c}_\rho^i$ соответственно из уравнений (34), (36), (38) должны отличаться от a_ρ^i, b_ρ^i, c_ρ^i из (31)–(33) на величины порядка 10^{-8}, которыми можно пренебречь.

Заключение. Подводя итоги проведенным обсуждениям и оценкам полученных результатов, отметим, что структура коэффициента K из (32) определяет те ситуации в системе «два тела – среда», при которых смещения центра масс тел будут значительными и траектории тел существенно будут отличаться от их траекторий в пустоте: смещения увеличиваются при увеличении ρ_0 и особенно при увеличении расстояния между телами, т. е. при увеличении p (оно в 5-й степени!) и постоянном эксцентриситете e эллиптической относительной орбиты тел (в силу связи $p = a(1-e^2)$ при увеличении p также увеличивается a – большая полуось орбиты).

Полученные в данной работе результаты можно использовать в космологии и космогонии (движения пар планетарных систем, пар шаровых скоплений в Галактике, пар галактик в космической среде и других систем).

Список использованных источников

1. Рябушко, А. П. Движение релятивистского центра масс системы двух тел в среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 77–82. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82

2. Мартынов, Д. Я. Курс общей астрофизики / Д. Я. Мартынов. – М.: Наука, 1988. – 640 с.

3. Ипатов, С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе / С. И. Ипатов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

4. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии / Э. В. Кононович, В. И. Мороз. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 544 с.

5. Клищенко, А. П. Астрономия / А. П. Клищенко, В. И. Шупляк. – М.: Новое знание, 2004. – 224 с.

6. Засов, А. В. Общая астрофизика / А. В. Засов, К. А. Постнов. – Фрязино: Век-2, 2011. – 576 с.

7. Рябушко, А. П. Гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами в общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1987. – Т. 31, № 8. – С. 519–522.

8. Рябушко, А. П. Движение тел в общей теории относительности / А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1979. – 240 с.

9. Einstein, A. On the Motion of Particles in General Relativity Theory / A. Einstein., L. Infeld // Canad. J. Math. – 1949. – Vol. 1, № 3. – P. 209–241. https://doi. org/10.4153/CJM-1949-020-8.

10. Инфельд, Л. Движение и релятивизм / Л. Инфельд, Е. Плебаньский. – М.: Иностр. лит., 1962. – 204 с.

11. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

12. Рябушко, А. П. Гравитационное поле притягивающего центра, окруженного пылевидным облаком, в постньютоновском приближении общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1983. – Т. 27, № 10. – С. 889–892.

13. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М.: Мир и Образование, 2003. – 432 с.

14. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

References

1. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Motion of the relativistic center of mass of the two-body system in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 77–82 (in Russian). https://doi. org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82
2. Martinov D. Y. *General Astrophysics Course*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p. (in Russian).
3. Ipatov S. I. *Migration of Celestial Bodies in the Solar System*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 320 p. (in Russian).
4. Kononovich E. V., Moroz V. I. *General Course of Astronomy*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 544 p. (in Russian).
5. Klischenko A. P., Shuplyak V. I. *Astronomy*. Moscow, Novoe Znanie Publ., 2004. 224 p. (in Russian).
6. Zasov A. V., Postnov K. A. *General Astrophysics*. Fryazino, Vek-2 Publ., 2011. 576 p. (in Russian).
7. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The gravitational field of a gas-dust ball with two attractive centers in the general theory of relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1987, vol. 31, no. 6, pp. 519–522 (in Russian).
8. Ryabushko A. P. *Motion of Bodies in the General Theory of Relativity*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1979. 240 p. (in Russian).
9. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory. *Canadian Journal of Mathematics*, 1949, vol. 1, no. 3, pp. 209–241. https://doi. org/10.4153/CJM-1949-020-8.
10. Infeld L. Plebanski J. *Motion and Relativity*. Elsevier, 1960. 230 p. https://doi.org/10.1016/C2013-0-10013-X
11. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Field Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.
12. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The Gravitational Field of an Attractive Center Surrounded by a Dusty Cloud in the Post-Newtonian Approximation of the General Theory of Relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1983, vol. 27, no. 10, pp. 889–892. (in Russian).
13. Matveev A. N. *Mechanics and Theory of Relativity*. Moscow, Mir i Obrazovanie Publ., 2003. 432 p. (in Russian).
14. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1965. 204 p. (in Russian).

Information about the authors

Рябушко Антон Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220141, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Неманова Инна Тимофеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Жур Татьяна Антоновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики факультета предпринимательства и управления, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Информация об авторах

Anton P. Ryabushko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Inna T. Nemanova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Tatyana A. Zhur – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Entrepreneurship and Management, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru