

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.958:537.311.1; 621.315.592

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-239-252>

Поступила в редакцию 28.03.2020

Received 28.03.2020

Н. А. Поклонский, А. Н. Дервяго, С. А. Вырко*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ЭЛЕКТРОНОВ
НА ИОНАХ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ ДОНОРОВ
В НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

Аннотация. В квазиклассическом приближении квантовой механики развита модель локализации электронов проводимости на ионах водородоподобных доноров во внешнем магнитном поле. Проведен расчет термической энергии ионизации доноров в слабо легированных и умеренно компенсированных кристаллах арсенида галлия и антимонида индия *n*-типа в зависимости от индукции внешнего магнитного поля. В отличие от известных теоретических работ (с использованием вариационных методов решения уравнения Шредингера) предложено простое аналитическое выражение для энергии ионизации донора в магнитном поле, которое количественно согласуется с известными экспериментальными данными. Показано, что величина магнитного поля, индуцированного орбитальным движением электрона вокруг ионного остова донора, пренебрежимо мала по сравнению с внешним полем и не вносит вклада в энергию ионизации доноров.

Ключевые слова: полупроводник *n*-типа, водородоподобные примеси, локализация электронов, магнитное поле

Для цитирования. Локализация внешним магнитным полем электронов на ионах водородоподобных доноров в невырожденных полупроводниках / Н. А. Поклонский [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 239–252. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-239-252>

Nikolai A. Poklonski, Aliaksandr N. Dzeraviha, Sergey A. Vyrko*Belarusian State University, Minsk, Belarus***LOCALIZATION BY AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD OF ELECTRONS ON THE IONS
OF HYDROGEN-LIKE DONORS IN NON-DEGENERATE SEMICONDUCTORS**

Abstract. In the quasi-classical approximation of quantum mechanics a model for the localization of conduction electrons on the ions of hydrogen-like donors in an external magnetic field was developed. The thermal ionization energy of donors in lightly doped and moderately compensated crystals of gallium arsenide and indium antimonide of *n*-type was calculated depending on the induction of the external magnetic field. In contrast to the known theoretical works (which use variational methods for solving the Schrödinger equation), a simple analytical expression is proposed for the ionization energy of the donor in the magnetic field, which quantitatively agrees with the known experimental data. It is shown that the magnitude of the magnetic field induced by the orbital motion of the electron around the ion core of the donor is negligible compared to the external field and does not contribute to the ionization energy of donors.

Keywords: *n*-type semiconductor, hydrogen-like impurities, localization of electrons, magnetic field

For citation. Poklonski N. A., Dzeraviha A. N., Vyrko S. A. Localization by an external magnetic field of electrons on the ions of hydrogen-like donors in non-degenerate semiconductors. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 239–252 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-239-252>

Введение. В работе [1] введено понятие о «вымораживании» свободных электронов магнитным полем на водородоподобные доноры в полупроводниках (исходя из анализа гальваномагнитных измерений на кристаллах *n*-InSb при температуре жидкого гелия). Особенностью этого полупроводника является большое значение эффективного боровского радиуса и, как следствие, перекрытие электронных оболочек соседних атомов примесей при малых их концентрациях. При приложении к полупроводнику магнитного поля размер орбиты донорного электрона в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, уменьшается, и существует такое значение магнитной индукции, при котором перекрытие электронных оболочек не наблюдается, что и называют магнитной локализацией электронов. В работе [2] энергия ионизации донора в магнитном поле находилась как разность энергий дна *s*-зоны и уровня энергии донора в запре-

щенной зоне полупроводника; для расчета положения дна c -зоны учтено квантование состояний электрона проводимости (т. е. уровни Ландау) без учета спинового расщепления уровней Ландау. Положение уровня энергии донора находилось путем решения уравнения Шредингера вариационным принципом. В работах [3, 4] вариационным методом найдены уровни энергии донора в n -InSb в основном и первом возбужденном состояниях, учитывая непараболичность зависимости энергии электрона c -зоны от его волнового вектора. Экспериментально определены термические энергии ионизации доноров в кристаллах антимонида индия [5] и арсенида галлия [6] в магнитном поле из измерений температурных зависимостей концентрации электронов c -зоны. В работе [7] была высказана идея о возможности локализации электронов проводимости металла на положительно заряженных ионах примеси под действием внешнего постоянного магнитного поля (см. также [8]), однако не обозначены условия, при которых такая локализация электрона возможна.

Цель работы – описать в квазиклассическом приближении схему локализации электронов из c -зоны внешним магнитным полем на термически ионизованных донорах в слабо легированных немагнитных кристаллических полупроводниках n -типа при криогенных температурах. Работа построена по принципу «просто о сложном» [9, 10] в рамках полуклассической квантовой механики (см., напр., [11]). Конкретно решается задача: рассчитать изменение термической энергии ионизации водородоподобных доноров в кристаллах арсенида галлия и антимонида индия n -типа при помещении их в магнитное поле.

Основные соотношения. Рассмотрим полупроводник с концентрацией водородоподобных доноров $N = N_0 + N_{+1}$ в зарядовых состояниях (0) и (+1) и концентрацией акцепторов KN , полностью находящихся в зарядовом состоянии (–1), где $0 < K < 1$ – степень компенсации доноров акцепторами. Зарядовые состояния примесей указаны в единицах элементарного заряда e . Условие электрической нейтральности в кристалле для случайного распределения примесей имеет вид $n + KN = N_{+1}$, где n – концентрация электронов в c -зоне. Считается, что уровни энергии доноров расположены в запрещенной зоне (энергетической щели полупроводника) достаточно близко к дну c -зоны, так что эффективная масса электрона на доноре фактически равна эффективной массе электрона на дне c -зоны.

Пусть электрон из c -зоны кристалла движется в плоскости, перпендикулярной направлению магнитной индукции, по круговой орбите, в центре которой расположен донор в зарядовом состоянии (+1). На электрон действуют три силы: центробежная \mathbf{F}_t , лоренцева \mathbf{F}_L и кулоновская \mathbf{F}_C (рис. 1). Поскольку радиус-вектор электрона \mathbf{r}_t , вектор его скорости \mathbf{v}_t и вектор магнитной индукции \mathbf{B} ортогональны друг другу, то даламберово условие баланса сил имеет вид

$$\frac{m_t v_t^2}{R_t} = e v_t B + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{m_t v_t^2}{R_t} + e v_t B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t^2}, \quad (2)$$

где $m_t = m$ – эффективная масса локализованного на доноре электрона, $v_t = |\mathbf{v}_t|$, $R_t = |\mathbf{r}_t|$, $B = |\mathbf{B}|$, ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость кристаллической матрицы, $\epsilon_0 = 8,85$ пФ/м – электрическая постоянная.

Здесь отметим, что соотношение (1) соответствует движению электрона, показанному на рис. 1, *a*, соотношение (2) – движению на рис. 1, *b*. Если электрон движется в плоскости, не перпендикулярной направлению магнитной индукции \mathbf{B} , то v_t – проекция вектора скорости электрона на плоскость xy .

Вектор магнитного поля \mathbf{B}_t , индуцируемого на электроны при его движении вокруг иона донора, определяется выражением [12, 13]:

$$\mathbf{B}_t = \epsilon_r\epsilon_0\mu_r\mu_0[\mathbf{E} \times \mathbf{v}_t] = \frac{e\mu_r\mu_0}{4\pi R_t^3}[\mathbf{r}_t \times \mathbf{v}_t], \quad (3)$$

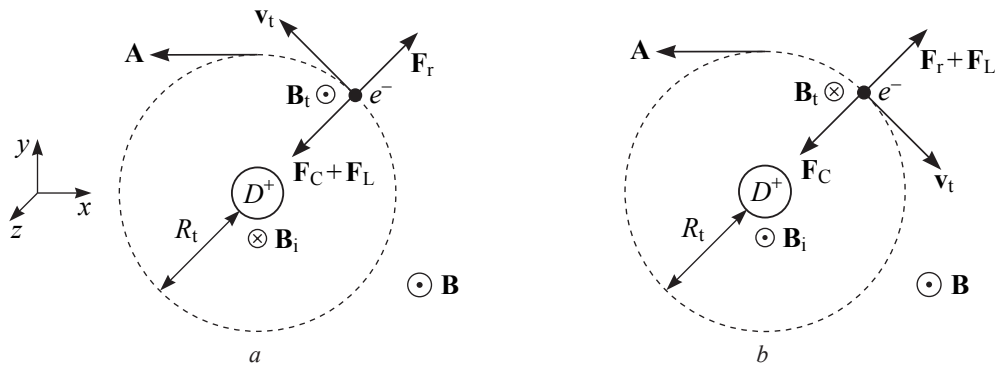


Рис. 1. Схема орбиты электрона (e^- ; заряд $-e < 0$) вокруг иона донора (D^+ ; заряд $+e > 0$) в плоскости xy во внешнем магнитном поле с направленным по оси z вектором индукции \mathbf{B} ; векторный потенциал \mathbf{A} расположен в плоскости xy ; a – вектор скорости электрона направлен против хода часовой стрелки, вектор \mathbf{B}_t сонаправлен \mathbf{B} и оси z ; b – вектор скорости электрона направлен по ходу часовой стрелки, вектор \mathbf{B}_t направлен противоположно \mathbf{B} и оси z ; $B_i = B_t$

Fig. 1. Scheme of electron orbit (e^- ; charge $-e < 0$) around the donor ion (D^+ ; charge $+e > 0$) in the xy plane in an external magnetic field with the induction vector \mathbf{B} directed along the z axis; the vector potential \mathbf{A} is located in the xy plane; (a) the electron velocity vector is directed counterclockwise, the vector \mathbf{B}_t is co-directed to \mathbf{B} and the z axis; (b) the electron velocity vector is clockwise, the vector \mathbf{B}_t is opposite to \mathbf{B} and the z axis; $B_i = B_t$

где $\mu_r = 1$ – относительная магнитная проницаемость полупроводника, $\mu_0 = 1,257$ мкГн/м – магнитная постоянная, $\mathbf{E} = e\mathbf{r}_t/4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t^3$ – вектор напряженности электрического поля, создаваемого ионным остовом (условно ядром) донора с зарядом $+e$ на орбите электрона, \mathbf{r}_t – радиус-вектор положения электрона относительно ядра донора, радиус орбиты $R_t = |\mathbf{r}_t|$. Поскольку считается, что движение электрона происходит по круговой орбите, то $|\mathbf{r}_t \times \mathbf{v}_t| = R_t v_t$. Тогда из (3) получаем

$$B_t = |\mathbf{B}_t| = \frac{1}{2} \frac{e\mu_0 v_t}{4\pi R_t^2}. \quad (4)$$

Коэффициент $1/2$ в формуле (4) появляется за счет прецессии Томаса – релятивистского эффекта, заключающегося в прецессии спина (собственного магнитного момента) электрона относительно направления угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_t$ его движения по круговой орбите [14, 15]; $[\boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{r}_t] = \mathbf{v}_t$. Если электрон движется против хода часовой стрелки (как показано на рис. 1, a), то вектор \mathbf{B}_t сонаправлен индукции \mathbf{B} внешнего поля, а при противоположном направлении движения электрона (см. рис. 1, b) вектор \mathbf{B}_t направлен против индукции \mathbf{B} .

Движущийся по круговой орбите электрон создает магнитное поле с индукцией B_t на ядре иона донора (см. рис. 1). Известно, что магнитная индукция B_i в центре кругового плоского проводника радиуса R_t с силой тока I есть (см., напр., [13]): $B_i = \mu_0 I / 2R_t$. Электрон, движущийся со скоростью v_t по орбите вокруг иона, можно уподобить круговому току. Сила этого кругового тока I равна произведению элементарного заряда e на частоту $\omega_t / 2\pi$ вращения электрона по орбите: $I = e\omega_t / 2\pi$. Если радиус орбиты равен R_t , а скорость электрона – v_t , то $\omega_t = v_t / R_t$ и, следовательно, $I = ev_t / 2\pi R_t$. Тогда магнитная индукция B_i , индуцируемая электроном при движении по круговой орбите радиусом R_t , в центре этой орбиты (т. е. на ядре донора) при $\mu_r = 1$ есть $B_i = e\mu_0 v_t / 4\pi R_t^2$. Если теперь учесть спин электрона и схему ввода множителя $1/2$ в формуле (4), то получаем $B_i = B_t$. Отметим, что векторы магнитной индукции \mathbf{B}_t (на электроне) и \mathbf{B}_i (на ядре), обусловленные локализацией электрона под действием кулоновского притяжения и внешнего магнитного поля на орбите вокруг ионного остова донора, противоположно направлены.

Неизвестными величинами в (1) являются v_t и R_t . Связь между ними находится из условия квантования Бора – Зоммерфельда [16, 17]:

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\hbar\gamma, \quad (5)$$

где \mathbf{p} – обобщенный импульс электрона в магнитном поле, $d\mathbf{l}$ – элемент траектории электрона, $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Планка, $\gamma = 1, 2, \dots$ – номер траектории (число раз, которое длина волны де Бройля электрона укладывается на длине его круговой орбиты $2\pi R_t$ вокруг иона донора), главное квантовое число в теории атома водорода.

Известно [13, 18], что обобщенный импульс электрона в магнитном поле $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_m$, где $\mathbf{p}_k = m\mathbf{v}_t$ – кинетический импульс, $\mathbf{p}_m = -e\mathbf{A}$ – «полевой» импульс, связанный с однородным постоянным внешним магнитным полем с индукцией $\mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}]$, в котором находится электрон с зарядом $-e < 0$. Подставляя выражение для \mathbf{p} в (5), находим:

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{p}_k \cdot d\mathbf{l} - e \oint_{(\gamma)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\hbar\gamma. \quad (6)$$

Первый интеграл в (6) по замкнутому контуру с учетом круговых орбит есть

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{p}_k \cdot d\mathbf{l} = 2\pi p R_t,$$

где $p = |\mathbf{p}_k| = mv_t$ – величина кинетического импульса электрона.

Второй интеграл в (6) по замкнутому контуру есть поток магнитного поля Φ_γ через площадь, ограниченную контуром γ -й круговой траектории электрона:

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_\gamma,$$

где $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$ – векторный потенциал, $d\mathbf{l}$ – вектор бесконечно малого перемещения электрона по круговой орбите; $A = BR_t/2$. Если электрон движется против хода часовой стрелки (см. рис. 1, *a*), то векторы \mathbf{A} и $d\mathbf{l}$ сонаправлены и $\Phi_\gamma = \pi R_t^2 B$. Если электрон движется по ходу часовой стрелки (если смотреть против направления вектора индукции внешнего поля; см. рис. 1, *b*), то векторы \mathbf{A} и $d\mathbf{l}$ имеют противоположное направление и $\Phi_\gamma = -\pi R_t^2 B$.

Для случая движения электрона, показанного на рис. 1, *a*, когда $\Phi_\gamma = \pi R_t^2 B$, условие квантования орбитального момента импульса (6) имеет вид

$$p R_t - e \Phi_\gamma / 2\pi = mv_t R_t - e B R_t^2 / 2 = \hbar\gamma, \quad (7)$$

откуда находим скорость электрона на орбите:

$$v_t = v_t^+ = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} + \frac{eB}{m} \frac{R_t}{2} = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} + \frac{\omega_c R_t}{2} > 0, \quad (8)$$

где $\omega_c = eB/m$ – циклотронная частота электрона *c*-зоны.

Для случая движения электрона, показанного на рис. 1, *b*, когда $\Phi_\gamma = -\pi R_t^2 B$, имеем

$$v_t = v_t^- = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} - \frac{eB}{m} \frac{R_t}{2} = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} - \frac{\omega_c R_t}{2} > 0. \quad (9)$$

Радиус орбиты $R_t > 0$ электрона находим путем подстановки выражения для скорости электрона (8) в уравнение для баланса сил (1) или выражения (9) – в уравнение (2). В итоге обе подстановки приводят к одному и тому же уравнению для нахождения R_t (при движении электрона как против хода часовой стрелки, так и по ходу часовой стрелки):

$$\frac{\gamma^2 \hbar^2}{2m R_t^2} - \frac{e^2 B^2 R_t^2}{8m} - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r \epsilon_0 R_t} = 0. \quad (10)$$

В отсутствие магнитного поля ($B = 0$) при $\gamma = 1$ из (10) получаем боровский радиус $R_t = a_d = 4\pi\epsilon_r \epsilon_0 \hbar^2 / me^2$; энергия ионизации одиночного водородоподобного донора (см., напр., [19]) равна

$I_d = e^2/8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a_d = me^4/[2(4\pi\epsilon_r\epsilon_0\hbar)^2]$. Далее рассматривается электрон на доноре в основном состоянии, т. е. при $\gamma = 1$.

Из сравнения соотношений (8) и (9) видно, что угловая частота ω_t/R_t вращения электрона вокруг иона донора, показанного на рис. 1, *a*, увеличивается на ларморовскую частоту $\omega_L = \omega_c/2$, а угловая частота электрона, движущегося в обратную сторону (см. рис. 1, *b*), уменьшается на ту же величину (см., напр., [17, 20]).

Энергию связанного состояния электрона на доноре во внешнем магнитном поле определим по теореме вириала [21, 22]. Энергия взаимодействия эффективного спинового магнитного момента электрона $|g_t|\mu_B$ с магнитным полем $B \pm B_t$ учитывается отдельным слагаемым. В итоге для уровней энергии водородоподобного донора [23] при наложении на кристалл внешнего магнитного поля получаем

$$\begin{aligned} E_t(\uparrow) &= E_t(B) - \frac{1}{2}|g_t|\mu_B(B \pm B_t); \\ E_t(\downarrow) &= E_t(B) + \frac{1}{2}|g_t|\mu_B(B \pm B_t), \end{aligned} \quad (11)$$

где (см. приложение, формула (38))

$$E_t(B) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} \left(1 - \frac{R_t}{R_{im}} \right) - \frac{1}{4}m(\omega_c R_t)^2. \quad (12)$$

Комментарий к формуле (11): фактор спектроскопического расщепления для электрона на доноре обозначен g_t ; знак « \rightarrow » соответствует ориентации спина электрона по направлению индукции \mathbf{B} внешнего магнитного поля (\uparrow), знак « \leftarrow » – против направления индукции (\downarrow); знак « \pm » перед B_t означает случаи движения электрона против хода часовой стрелки (+) и по ходу часовой стрелки (–); индукция B_t магнитного поля, индуцируемого на электроны его круговым движением вокруг иона донора, вычисляется по (4) с учетом (8)–(10).

Комментарий к формуле (12): радиус орбиты $R_t(B)$ электрона на доноре определяется из уравнения (10); средний радиус сферической области кристаллической матрицы, приходящейся на каждый донор и акцептор, равен $R_{im} = [4\pi N(1 + K)/3]^{-1/3}$; множитель $(1 - R_t/R_{im})$ отражает опускание дна c -зоны в глубь запрещенной энергетической зоны кристалла при увеличении концентрации примесей; величина $m(\omega_c R_t)^2/4$ отражает сдвиг уровня энергии электрона на уединенном доноре к дну c -зоны из-за увеличения кинетической энергии локализации электрона в магнитном поле; уровень энергии электрона $E_t(B)$ отсчитывается от положения дна c -зоны в нелегированном полупроводнике при $B = 0$ (рис. 2).

Рассмотрим для примера кристалл арсенида галлия n -типа с относительной статической диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 12,4$ в области криогенных температур и изотропной эффективной массой электрона c -зоны $m = 0,067m_0$, где m_0 – масса электрона в вакууме. Фактор спектроскопического расщепления для электрона, локализованного на водородоподобном доноре, примем, следуя измерениям [24], равным $g_t \approx 2$; g -фактор электрона c -зоны $g_n < 0$.

Пусть кристалл легирован водородоподобными донорами (Te, S или Se). Экспериментальные значения энергии ионизации этих примесей таковы: Te – $I_d = 5,76$ мэВ [25], S – $I_d = 5,87$ мэВ [26], Se – $I_d = 5,71$ мэВ [25]. Расчетное значение энергии ионизации одиночного донора в отсутствие магнитного поля $I_d = e^2/8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a_d = me^4/[2(4\pi\epsilon_r\epsilon_0\hbar)^2]$, где $a_d = 4\pi\epsilon_r\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 9,8$ нм – боровский радиус, составляет 5,93 мэВ, что близко к экспериментальным значениям.

Полагаем, что концентрация доноров $N = N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, степень их компенсации акцепторами $K = 0,03$ и выполняется условие электронейтральности: $n + KN = N_{+1}$, где n – концентрация электронов c -зоны, KN – концентрация акцепторов. При этом радиус сферической области в кристаллической матрице арсенида галлия, приходящейся на один атом примеси, составляет $R_{im} = 91,8$ нм. На рис. 2 показан расчет уровней энергии водородоподобного донора $E_t(\uparrow)$ и $E_t(\downarrow)$ по формуле (11) с учетом (12) в зависимости от индукции B внешнего магнитного поля для

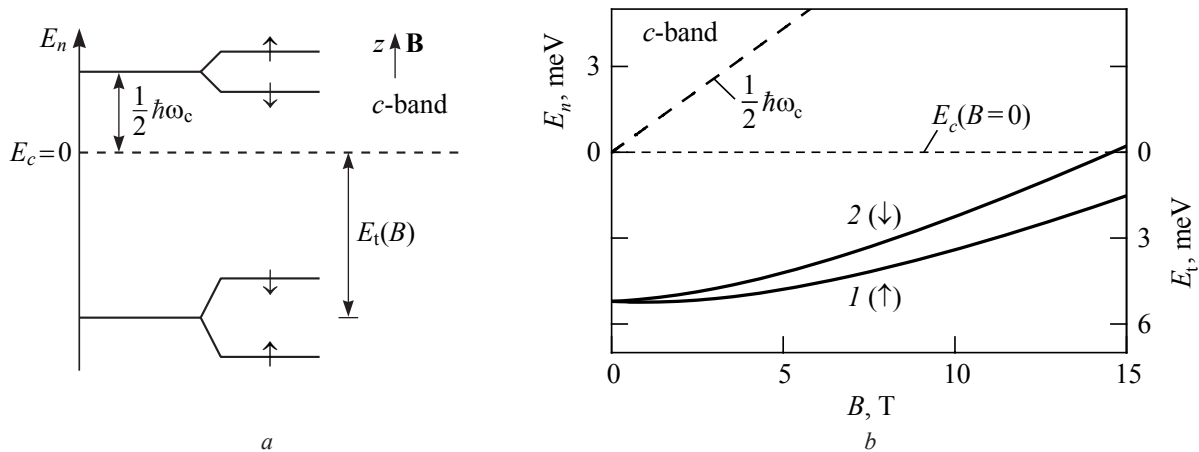


Рис. 2. Схема расщепления уровней энергии электрона c -зоны и электрона на доноре под действием магнитного поля (а); зависимости энергии электрона c -зоны E_n (левая шкала) и локализованного состояния электрона на доноре E_t (правая шкала) от магнитной индукции B для кристалла n -GaAs с концентрацией доноров $N = N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и степенью их компенсации $K = 0,03$: кривые 1 и 2 соответствуют ориентации спина по (\uparrow) и против (\downarrow) направления индукции внешнего поля (b)

Fig. 2. Scheme for splitting energy levels of the c -band electron and the electron on the donor under the influence of a magnetic field (a); dependences of the c -band electron energy E_n (left scale) and the energy of the localized state of the electron on the donor E_t (right scale) on the magnetic induction B for an n -GaAs crystal with a donor concentration of $N = N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ and a compensation ratio $K = 0.03$: curves 1 and 2 correspond to the spin orientation along (\uparrow) and against (\downarrow) the direction of the external field induction (b)

кристалла n -GaAs (кривая 1 – спин электрона направлен по вектору индукции \mathbf{B} , кривая 2 – спин направлен противоположно \mathbf{B}).

В отсутствие магнитного поля температура T_j , ниже которой темп захвата электронов из c -зоны на водородоподобные доноры превалирует над темпом теплового выброса электронов с доноров в c -зону, для кристаллического полупроводника n -типа при $n \ll K(1 - K)N$ имеет следующий вид [27]:

$$T_j = \frac{0,728}{k_B} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} (KN)^{1/3}. \quad (13)$$

При концентрации доноров $N = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и степени компенсации $K = 0,03$ температура T_j по формуле (13) в арсениде галлия n -типа составляет $\approx 2 \text{ К}$.

Оценим значение индукции магнитного поля B_t , обусловленного движением электрона вокруг иона донора. Даже при $B = 30 \text{ Тл}$ расчет по формуле (4) при учете (8) и (10) дает $B_t = 0,14 \text{ мТл}$, а при учете (9) и (10) получаем $B_t = 0,03 \text{ мТл}$. Индукция магнитного поля B_i на ядре донора, обусловленная движением электрона по орбите радиуса R_t , равна B_t . Таким образом, величины B_t и B_i , индуцируемые на электроны и ядре донора, малы по сравнению с индукцией внешнего магнитного поля B .

В магнитном поле концентрация электронов c -зоны $n(B) = n(B, \uparrow) + n(B, \downarrow)$ с двумя ориентациями спина дается формулой [28, 29]:

$$n(B) = \frac{n_c}{2} \frac{\hbar\omega_c}{k_B T} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ F_{-1/2} \left[\frac{1}{k_B T} \left(E_F(B) - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c - \frac{g_n \mu_B B}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + F_{-1/2} \left[\frac{1}{k_B T} \left(E_F(B) - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c + \frac{g_n \mu_B B}{2} \right) \right] \right\}, \quad (14)$$

где $n_c = 2(2\pi m k_B T / (2\pi \hbar)^2)^{3/2}$; α – номер уровня Ландау, $g_n = -0,44$ – g -фактор электрона c -зоны [30, 31], $E_F(B)$ – уровень Ферми, отсчитанный от дна c -зоны ($E_c = 0$) нелегированного кристалла, находящегося в нулевом магнитном поле ($E_F(B) < 0$, если уровень Ферми находится в запрещенной зоне), $F_{-1/2}(y)$ – интеграл Ферми – Дирака;

$$F_{-1/2}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{-1/2} dt}{1 + \exp(t - y)}. \quad (15)$$

Концентрация положительно заряженных доноров (без учета возбужденных состояний электрически нейтральных доноров и ионов доноров) равна [19, 32]:

$$N_{+1}(B) = \frac{N}{\Xi(B; \uparrow, \downarrow)}, \quad (16)$$

где статистическая сумма

$$\Xi(B; \uparrow, \downarrow) = 1 + \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\uparrow)}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\downarrow)}{k_B T}\right);$$

$E_t(\uparrow)$ и $E_t(\downarrow)$ определяются из (11).

Из условия электрической нейтральности $n(B) + KN = N_{+1}(B)$ определяется зависимость уровня Ферми $E_F(B)$ от индукции внешнего магнитного поля, показанная на рис. 3, а для температуры 5 и 78 К.

С учетом (16) суммарная концентрация электрически нейтральных доноров $N_0(B) = N_0(B, \uparrow) + N_0(B, \downarrow) = N - N_{+1}(B)$, где концентрации этих доноров с двумя ориентациями спина электрона

$$\begin{aligned} N_0(B, \uparrow) &= \frac{N}{\Xi(B; \uparrow, \downarrow)} \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\uparrow)}{k_B T}\right), \\ N_0(B, \downarrow) &= \frac{N}{\Xi(B; \uparrow, \downarrow)} \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\downarrow)}{k_B T}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Расчет концентраций $N_0(B, \uparrow)$ и $N_0(B, \downarrow)$ нейтральных доноров по формуле (17) в зависимости от магнитной индукции B показан на рис. 3, б. Видно, что при температуре $T = 5$ К в сильном магнитном поле ($B = 15$ Тл) все некомпенсированные акцепторами доноры находятся в зарядовом состоянии (0) с направленным по полю спином; при $T = 78$ К все доноры ионизованы.

Отметим, что в отсутствие внешнего магнитного поля выражение (14) для концентрации электронов c -зоны принимает стандартный вид [19, 32]:

$$n = n_c F_{1/2}\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) = n_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{1/2} dt}{1 + \exp[t - (E_F/k_B T)]}; \quad (18)$$

для невырожденного полупроводника ($E_F < 0$, $|E_F| > k_B T$) из (18) имеем

$$n \approx n_c \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right).$$

Для невырожденных полупроводников в магнитном поле (т. е. при выполнении условия: $(\hbar \omega_c - |g_n| \mu_B B)/2 > E_F + 3k_B T/2$) из (14) и (16) получаем выражения для концентраций электронов c -зоны $n(B)$ и ионизованных доноров $N_{+1}(B)$ в виде

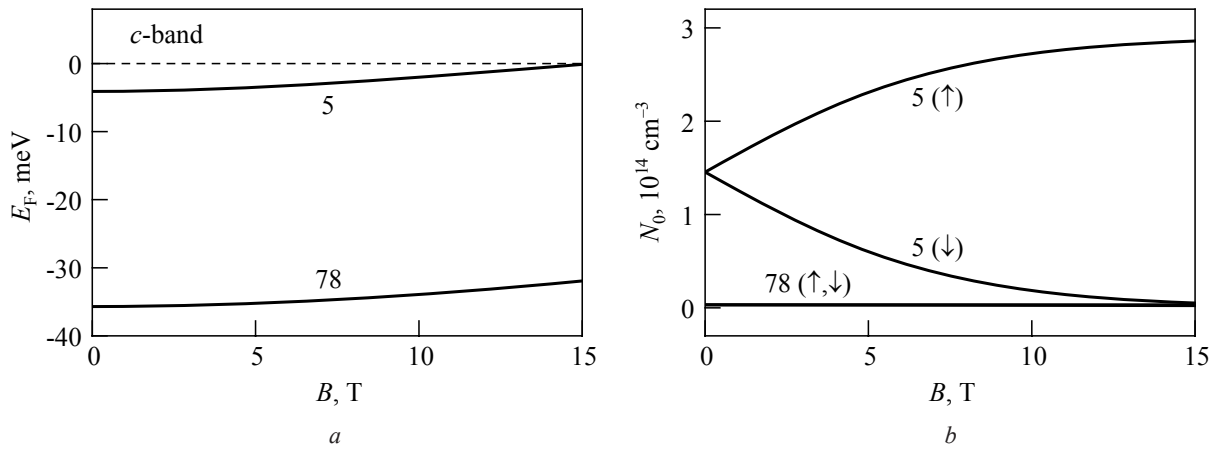


Рис. 3. Зависимости положения уровня Ферми E_F , отсчитанного от дна c -зоны (а) и концентрации N_0 электрически нейтральных доноров (б) от магнитной индукции B в кристалле n -GaAs при $N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $K = 0,03$ для температуры $T = 5$ и 78 K; стрелки соответствуют ориентации спина электрона донора по полю (↑) и против поля (↓)

Fig. 3. Dependences of the Fermi level E_F position counted from the bottom of the c -band (a) and the concentration N_0 of electrically neutral donors (b) on the magnetic induction B in an n -GaAs crystal at $N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ and $K = 0.03$ for temperatures $T = 5$ and 78 K; the arrows correspond to the orientation of the electron spin of the donor along the field (↑) and against the field (↓)

$$n(B) = n(B, \uparrow) + n(B, \downarrow) = \frac{n_c}{2} \frac{\hbar \omega_c}{k_B T} \frac{\text{ch}\left(\frac{g_n \mu_B B}{2k_B T}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\hbar \omega_c}{2k_B T}\right)} \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right), \quad (19)$$

$$N_{+1}(B) = \frac{N}{1 + 2 \text{ch}\left(\frac{g_t \mu_B B}{2k_B T}\right) \exp\left(\frac{E_t(B) + E_F}{k_B T}\right)}, \quad (20)$$

где величина $E_t(B)$ определяется по (12) и не зависит от температуры.

Отметим, что входящие в формулы (16), (17) и (20) величины $E_t(\uparrow)$, $E_t(\downarrow)$, $E_t(B)$ и $\Xi(B; \uparrow, \downarrow)$ в отсутствие внешнего магнитного поля (при $B \rightarrow 0$) принимают вид $E_t(\uparrow) = E_t(\downarrow) = E_t(B \rightarrow 0) = I_d(1 - a_d/R_{im})$; $\Xi(B \rightarrow 0; \uparrow, \downarrow) = 1 + 2 \exp\{[E_F + I_d(1 - a_d/R_{im})]/k_B T\}$.

Концентрации электронов n , положительно заряженных ионов доноров N_{+1} и отрицательно заряженных компенсирующих акцепторов KN связаны между собой условием электронейтральности:

$$n(B) + KN = N_{+1}(B) = N - N_0(B, \uparrow) - N_0(B, \downarrow).$$

Исключая из формул (19) и (20) уровень Ферми $E_F(B)$, получаем выражение для концентрации электронов в c -зоне невырожденного полупроводника:

$$n(B) = n(B, \uparrow) + n(B, \downarrow) = n = \frac{1-K}{2K} \frac{n_c}{2} \frac{\hbar \omega_c}{k_B T} \frac{\text{ch}\left(\frac{g_n \mu_B B}{2k_B T}\right) \exp\left(-\frac{E_t(B)}{k_B T}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\hbar \omega_c}{2k_B T}\right) \text{ch}\left(\frac{g_t \mu_B B}{2k_B T}\right)}. \quad (21)$$

Дифференциальная термическая энергия ионизации доноров определяется так (см., напр., [23] и цитируемую там литературу):

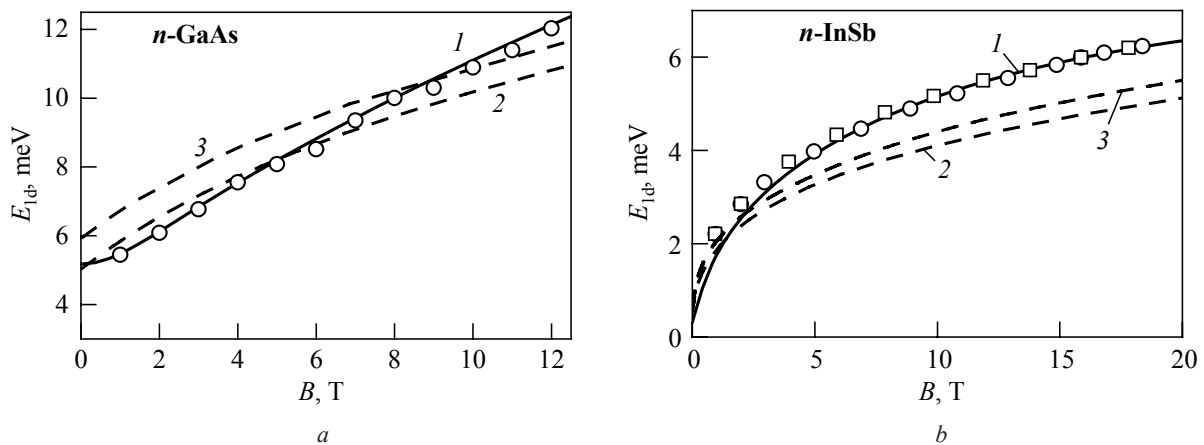


Рис. 4. Зависимость энергии ионизации атома донора E_{id} в кристаллах n -GaAs (а) и n -InSb (б) от магнитной индукции B внешнего поля. Точки – эксперимент: [6] (а), [5] (б). Сплошные линии (1) – расчет E_{id} по формуле (23) для $N = 3,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $K = 0,48$ (а) и $N = 7,82 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и $K = 0,3$ (б); штриховые (2, 3) – расчет по моделям [2] и [4] соответственно

Fig. 4. Dependence of the ionization energy E_{id} of the donor atom in n -GaAs (a) and in n -InSb (b) crystals on the magnetic induction B of an external field. The points are experiment: [6] (a), [5] (b); the solid lines (1) are the calculation of E_{id} by formula (23) for $N = 3,5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ and $K = 0.48$ (a) and $N = 7,82 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ and $K = 0.3$ (b); the dashed lines (2 and 3) are the calculation by models [2] and [4], respectively

$$E_{id} = -k_B \frac{d}{d(1/T)} \ln(nT^{-3/2}) = -\frac{3}{2} k_B T - \frac{k_B}{n} \frac{dn}{d(1/T)}. \quad (22)$$

При подстановке (21) в (22) получаем

$$E_{id} = E_i(B) + \frac{\hbar\omega_c}{2} \text{cth}\left(\frac{\hbar\omega_c}{2k_B T}\right) + \frac{g_i \mu_B B}{2} \text{th}\left(\frac{g_i \mu_B B}{2k_B T}\right) - \frac{g_n \mu_B B}{2} \text{th}\left(\frac{g_n \mu_B B}{2k_B T}\right) - k_B T; \quad (23)$$

в пределе $B \rightarrow 0$ из (23) следует: $E_{id} = I_d(1 - a_d/R_{im})$.

Проведем расчет энергии ионизации E_{id} по формуле (23) для кристаллов n -GaAs и n -InSb. Параметры кристаллов n -GaAs указаны при расчетах, представленных на рис. 2, б и рис. 3. Для кристаллов n -InSb в области криогенных температур использовались следующие параметры: относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r = 16,8$ и изотропная эффективная масса электрона s -зоны $m = 0,0136m_0$. Фактор спектроскопического расщепления для электрона s -зоны $g_n = -51,55$ [33]. Для локализованного на водородоподобном доноре электрона, находящегося в возбужденном состоянии, значение g -фактора g_i приближается к значению g -фактора g_n электрона s -зоны [34] (см. также [35]), что для антимонида индия составляет $g_i \approx -45$. Результаты расчетов для температуры $T_l = 3T_j/2$, где T_j вычислялась по (13), показаны на рис. 4. Для сравнения с экспериментальными данными по кристаллам n -GaAs использовались температурные зависимости концентрации электронов [6] в различных магнитных полях. Строились зависимости $\ln(nT^{-3/2})$ от $1/T$, по тангенсу наклона линейного участка которых в соответствии с формулой (22) определялись экспериментальные значения дифференциальной энергии активации E_{id} , показанные точками на рис. 4, а. Экспериментальные данные для кристалла n -InSb на рис. 4, б взяты из [5].

Заключение. В квазиклассическом приближении представлена модель локализации электронов s -зоны на ионах водородоподобных доноров во внешнем магнитном поле. Рассмотрены полупроводники с малой эффективной массой электронов и большой диэлектрической проницаемостью (кристаллы арсенида галлия и антимонида индия n -типа). В модели учтены:

- 1) даламберово условие баланса центробежной, кулоновской и лоренцевой сил;
- 2) квантование орбитального момента электрона на доноре по Бору – Зоммерфельду;

- 3) уровни Ландау электронов в c -зоне;
 4) зеемановское расщепление уровней энергии доноров и уровней Ландау.

Применена теорема вириала для электронейтральной системы (электрон + ион донора) в магнитном поле. Получено простое выражение для термической энергии ионизации доноров в магнитном поле по сравнению с имеющимися в известных теоретических работах, в которых эта величина находилась путем решения вариационным методом уравнения Шредингера. Расчеты по предложенной в работе модели количественно согласуются с известными экспериментальными данными.

Приложение. Водородоподобный донор во внешнем магнитном поле. Согласно теореме вириала [21], кинетическая энергия электрона E_k в кулоновском поле неподвижного положительно заряженного иона донора равна половине потенциальной энергии U_C , взятой с обратным знаком:

$$E_k = -U_C/2, \quad (24)$$

где $U_C = -e^2/4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t$ – энергия кулоновского взаимодействия электрона и ионизованного атома водородоподобной донорной примеси.

При помещении системы (электрон + ион донора) во внешнее магнитное поле с индукцией \mathbf{B} формула (24) преобразуется, согласно [22], к виду

$$E_k + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) = -U_C/2, \quad (25)$$

где \mathbf{M} – магнитный момент электрона, связанный с его орбитальным движением относительно иона донора.

Тогда полная энергия E системы с учетом (25) есть

$$E = E_k + U_C = -E_k - 2(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}). \quad (26)$$

По определению магнитный момент \mathbf{M} , создаваемый круговым движением электрона вокруг ионного остова донора, равен [13, 18]

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{2} e[\mathbf{r}_t \times \mathbf{v}_t], \quad (27)$$

где \mathbf{r}_t – радиус-вектор локализованного на доноре электрона; $|\mathbf{r}_t| = R_t$ – радиус орбиты; \mathbf{v}_t – линейная скорость движения электрона. В зависимости от направления силы Лоренца (к иону донора или от него; см. рис. 1) скорость электрона может принимать два значения (см. формулы (8) и (9)):

$$v_t^+ = \frac{\hbar\gamma}{mR_t} + \frac{\omega_c R_t}{2}, \quad v_t^- = \frac{\hbar\gamma}{mR_t} - \frac{\omega_c R_t}{2}. \quad (28)$$

Подстановка v_t^+ и v_t^- из (28) в (27) дает две проекции магнитных моментов:

$$\begin{aligned} M_+ &= -\frac{1}{2} eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} + \frac{\omega_c R_t}{2} \right] \text{ при } \mathbf{M}_+ \downarrow \uparrow \mathbf{B}; \\ M_- &= +\frac{1}{2} eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} - \frac{\omega_c R_t}{2} \right] \text{ при } \mathbf{M}_- \uparrow \uparrow \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (29)$$

Исходя из (29), получаем скалярные произведения:

$$(\mathbf{M}_+ \cdot \mathbf{B}) = -\frac{1}{2} eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} + \frac{\omega_c R_t}{2} \right] B; \quad (\mathbf{M}_- \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} - \frac{\omega_c R_t}{2} \right] B. \quad (30)$$

Среднее значение потенциальной энергии взаимодействия магнитного момента электрона с внешним магнитным полем, входящей в выражение для полной энергии электрически ней-

трального донора (электрон + ион), определим исходя из (30) через алгебраическую сумму произведений $(\mathbf{M}_+ \cdot \mathbf{B})$ и $(\mathbf{M}_- \cdot \mathbf{B})$ так:

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) = [(\mathbf{M}_+ \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{M}_- \cdot \mathbf{B})]/2 = -m(\omega_c R_t)^2/4. \quad (31)$$

Теперь рассчитаем среднее значение кинетической энергии:

$$E_k = \frac{1}{2}(E_k^+ + E_k^-), \quad (32)$$

где $E_k^+ = m(v_t^+)^2/2$, $E_k^- = m(v_t^-)^2/2$.

Подставляя скорости электрона v_t^+ и v_t^- из (28) в (32), получим

$$E_k = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\hbar \gamma}{m R_t} \right)^2 + \left(\frac{\omega_c R_t}{2} \right)^2 \right]. \quad (33)$$

Отсюда видно, что кинетическая энергия E_k электрона на доноре во внешнем магнитном поле увеличивается, так как по (10) радиус орбиты электрона R_t слабее уменьшается при увеличении индукции B поля, нежели увеличивается циклотронная частота электрона $\omega_c = eB/m$.

Полная энергия системы (электрон + ион донора) E с учетом (31) и (33) равна

$$E = -\frac{m}{2} \left[\left(\frac{\hbar \gamma}{m R_t} \right)^2 + \left(\frac{\omega_c R_t}{2} \right)^2 \right] + 2 \frac{m(\omega_c R_t)^2}{4} = -\frac{(\hbar \gamma)^2}{2m R_t^2} + \frac{3}{8} m(\omega_c R_t)^2. \quad (34)$$

Из (34) получаем энергию связи электрона и ионного остова донора:

$$I_t(B) = -E = \frac{(\hbar \gamma)^2}{2m R_t^2} - \frac{3}{8} m(\omega_c R_t)^2. \quad (35)$$

Далее, если кинетическую энергию E_k из (25) подставить в выражение (26) для полной энергии E и учесть (31), то получим

$$E = E_k + U_C = -U_C/2 - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) + U_C = \frac{U_C}{2} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} + \frac{1}{4} m(\omega_c R_t)^2. \quad (36)$$

Тогда из (35) и (36) энергия связи электрона на уединенном (одиночном) доноре в магнитном поле имеет вид

$$I_t(B) = -E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} - \frac{1}{4} m(\omega_c R_t)^2. \quad (37)$$

В отсутствие внешнего магнитного поля (при $B \rightarrow 0$) из (37) получаем энергию ионизации одиночного (уединенного) донора $I_t(B) \rightarrow I_d = e^2/8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a_d = me^4/[2(4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \hbar)^2]$ для боровского радиуса локализации на нем электрона $R_t(B) \rightarrow a_d = 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \hbar^2/me^2$.

Приравнявая выражения (35) и (37) для $I_t(B)$, получим уравнение для нахождения радиуса орбиты R_t , локализованного на атоме донора электрона в магнитном поле (совпадающее с уравнением (10)):

$$\frac{(\hbar \gamma)^2}{2m R_t^2} - \frac{1}{8} m(\omega_c R_t)^2 - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} = 0.$$

Формула (37) дает энергию ионизации одиночного донора в магнитном поле. Если учесть взаимный «конфайнмент» примесей, т. е. ограничение на максимальный радиус орбиты R_t электрона на одном доноре по [23], то (37) принимает вид

$$E_t(B) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} \left(1 - \frac{R_t}{R_{im}}\right) - \frac{1}{4} m(\omega_c R_t)^2, \quad (38)$$

где $R_{im} = 0,62[N(1 + K)]^{-1/3}$ – средний радиус сферической области, приходящейся на каждый атом донорной и акцепторной примесей в кристаллическом полупроводнике.

Здесь отметим, что в нулевом магнитном поле радиус орбиты электрона $R_t = a_d$, и формула (38) принимает вид $E_t = I_d(1 - a_d/R_{im})$. Это соотношение между E_t/I_d и a_d/R_{im} согласуется с экспериментальными данными по зависимости термической энергии ионизации водородоподобных доноров и акцепторов от их концентрации в различных полупроводниковых материалах [23].

Благодарности. Работа поддержана Государственной программой научных исследований «Физматтех» Республики Беларусь, Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф19PM-054), а также Рамочной программой Европейского союза по развитию научных исследований и технологий Horizon2020 (грант № H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

Acknowledgements. The work was supported by the Belarusian National Research Program “Fizmattekh”, the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant No. Ф19PM-054), and the European Union Framework Program for Research and Innovation Horizon 2020 (Grant No. H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

Список использованных источников

1. Durkan, J. Localization of electrons in impure semiconductors by a magnetic field / J. Durkan, R. J. Elliot, N. H. March // *Rev. Mod. Phys.* – 1968. – Vol. 40, № 4. – P. 812–815. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.40.812>
2. Yafet, Y. Hydrogen atom in a strong magnetic field / Y. Yafet, R. W. Keyes, E. N. Adams // *J. Phys. Chem. Solids.* – 1956. – Vol. 1, № 3. – P. 137–142. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(56\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0022-3697(56)90020-8)
3. Larsen, D. M. Shallow donor levels of InSb in a magnetic field / D. M. Larsen // *J. Phys. Chem. Solids.* – 1968. – Vol. 29, № 2. – P. 271–280. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(68\)90071-1](https://doi.org/10.1016/0022-3697(68)90071-1)
4. Experimental and theoretical study of magnetodonors in GaAs and InP at megagauss fields / W. Zawadzki [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 1994. – Vol. 49, № 3. – P. 1705–1710. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.1705>
5. Ionization energy of magnetodonors in InSb / A. Raymond [et al.] // *J. Phys. C: Solid State Phys.* – 1984. – Vol. 17, № 13. – P. 2381–2389. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/17/13/019>
6. Jouault, B. Ionization energy of magnetodonors in pure bulk GaAs / B. Jouault, A. Raymond, W. Zawadzki // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 65, № 24. – P. 245210 (7 p.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.245210>
7. Бычков, Ю. А. Квантовая теория электропроводности металлов в сильных магнитных полях // Ю. А. Бычков // *Журн. эксперим. и теор. физики.* – 1960. – Т. 39, № 3. – С. 689–702.
8. Архинчеев, В. Е. О влиянии магнитного поля на вероятность захвата диффундирующих частиц поглощающими ловушками / В. Е. Архинчеев // *Журн. эксперим. и теор. физики.* – 2019. – Т. 155, № 3. – С. 562–566. <https://doi.org/10.1134/s0044451019030180>
9. Пайерлс, Р. Построение физических моделей / Р. Пайерлс // *Успехи физ. наук.* – 1983. – Т. 140, № 2. – С. 315–332. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0140.198306d.0315>
10. Weisskopf, V. F. Search for simplicity: quantum mechanics of the hydrogen atom / V. F. Weisskopf // *Am. J. Phys.* – 1985. – Vol. 53, № 3. – P. 206–207. <https://doi.org/10.1119/1.14122>
11. Оглуздин, В. Е. Роль боровских частот в процессах рассеяния, люминесценции, генерации излучения в различных средах / В. Е. Оглуздин // *Успехи физ. наук.* – 2006. – Т. 176, № 4. – С. 415–420. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0176.200604e.0415>
12. Ферми, Э. Квантовая механика (конспект лекций) / Э. Ферми. – М.: Мир, 1965. – 368 с.
13. Poole, C. P. The physics handbook: fundamentals and key equations / C. P. Poole. – Weinheim: Wiley, 2007. – xxii+514 p.
14. Малыкин, Г. Б. Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения / Г. Б. Малыкин // *Успехи физ. наук.* – 2006. – Т. 176, № 8. – С. 865–882. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0176.200608f.0865>
15. Kholmetskii, A. L. On the classical analysis of spin-orbit coupling in hydrogenlike atoms / A. L. Kholmetskii, O. V. Mishevitch, T. Yarman // *Am. J. Phys.* – 2010. – Vol. 78, № 4. – P. 428–432. <https://doi.org/10.1119/1.3277052>
16. Краснопевцев, Е. А. Квантовая механика в приложениях к физике твердого тела / Е. А. Краснопевцев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 355 с.
17. Шпольский, Э. В. Атомная физика: в 2 т. / Э. В. Шпольский. – СПб.: Лань, 2010. – Т. 1. – 560 с.; Т. 2. – 448 с.
18. Jackson, J. D. Classical electrodynamics / J. D. Jackson. – New York: Wiley, 1999. – xxii+808 p.
19. Поклонский Н. А., Вырко С. А., Поденок С. Л. Статистическая физика полупроводников. – М.: КомКнига, 2005. – 264 с.
20. Беллюстин, С. В. Классическая электронная теория / С. В. Беллюстин. – М.: Высш. шк., 1971. – 350 с.
21. Васильев, Б. В. Теорема вириала и некоторые свойства электронного газа в металлах / Б. В. Васильев, В. Л. Любошиц // *Успехи физ. наук.* – 1994. – Т. 164, № 4. – С. 367–374. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0164.199404f.0367>

22. Любошиц, В. Л. Теорема вириала и условия равновесия системы заряженных частиц в магнитном поле / В. Л. Любошиц. – Дубна: ОИЯИ, 1996. – 18 с. – (Сообщения Объединенного института ядерных исследований; Р4-96-221).
23. Поклонский, Н. А. Термическая энергия ионизации водородоподобных примесей в полупроводниковых материалах / Н. А. Поклонский, С. А. Вырко, А. Н. Деревяго // Журн. БГУ. Физика. – 2020. – № 2. – С. 28–41. <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-2-28-41>
24. Haraldson, S. ESR-resonances in doped GaAs and GaP / S. Haraldson, C.-G. Ribbing // J. Phys. Chem. Solids. – 1969. – Vol. 30, № 10. – P. 2419–2425. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(69\)90066-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(69)90066-3)
25. GaAs:Se and GaAs:Te photoconductive detectors in 300 μm region for astronomical observations / K. Watanabe [et al.] // Jpn. J. Appl. Phys. – 2008. – Vol. 47, № 11. – P. 8261–8264. <https://doi.org/10.1143/JJAP.47.8261>
26. Madelung, O. Semiconductors: data handbook / O. Madelung. – Berlin: Springer, 2004. – xiv+692 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18865-7>
27. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction / N. A. Poklonski [et al.] // J. Appl. Phys. – 2011. – Vol. 110, № 12. – P. 123702 (7 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
28. Аронзон, Б. А. Статистика электронов в полупроводниках в квантующем магнитном поле / Б. А. Аронзон, Е. З. Мейлихов // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1971. – Т. 61, № 5 (11). – С. 1906–1912.
29. Мейлихов, Е. З. Влияние квантующего магнитного поля на концентрацию электронов в полупроводниках / Е. З. Мейлихов, Б. А. Аронзон // Докл. Акад. наук СССР. – 1972. – Т. 206, № 6. – С. 1329–1332.
30. Temperature dependence of the electron Landé g factor in InSb and GaAs / K. L. Litvinenko [et al.] // Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 77, № 3. – P. 033204 (4 p.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.033204>
31. Oestreich, M. Temperature dependence of the electron Landé g factor in GaAs / M. Oestreich, W. W. Rühle // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74, № 12. – P. 2315–2318. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2315>
32. Askerov, B. M. Thermodynamics, Gibbs method and statistical physics of electron gases / B. M. Askerov, S. R. Figarova. – Berlin: Springer, 2010. – xii+374 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03171-7>
33. Vdovin, A. V. Precise measurement of the free electron g -factor in InSb / A. V. Vdovin, E. M. Skok // Phys. Status Solidi B. – 1986. – Vol. 136, № 2. – P. 603–613. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221360225>
34. Fourier-transform magnetophotoluminescence spectroscopy of donor-bound excitons in GaAs / V. A. Karasyuk [et al.] // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 49, № 23. – P. 16381–16397. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.16381>
35. Окулов, В. И. Ферми-жидкостная аномалия концентрационной зависимости g -фактора электронов проводимости в полупроводнике с гибридизированными примесными состояниями / В. И. Окулов, Е. А. Памятных, Г. А. Алышанский // Физика низких температур. – 2009. – Т. 35, № 2. – С. 194–196.

References

1. Durkan J., Elliot R. J., March N. H. Localization of electrons in impure semiconductors by a magnetic field. *Review of Modern Physics*, 1968, vol. 40, no. 4, pp. 812–815. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.40.812>
2. Yafet Y., Keyes R. W., Adams E. N. Hydrogen atom in a strong magnetic field. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1956, vol. 1, no. 3, pp. 137–142. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(56\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0022-3697(56)90020-8)
3. Larsen D. M. Shallow donor levels of InSb in a magnetic field. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1968, vol. 29, no. 2, pp. 271–280. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(68\)90071-1](https://doi.org/10.1016/0022-3697(68)90071-1)
4. Zawadzki W., Pfeiffer P., Najda S. P., Yokoi H., Takeyama S., Miura N. Experimental and theoretical study of magnetodonors in GaAs and InP at megagauss fields. *Physical Review B*, 1994, vol. 49, no. 3, pp. 1705–1710. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.1705>
5. Raymond A., Robert J. L., Zawadzki W., Wlasak J. Ionization energy of magnetodonors in InSb. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 1984, vol. 17, no. 13, pp. 2381–2389. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/17/13/019>
6. Jouault B., Raymond A., Zawadzki W. Ionization energy of magnetodonors in pure bulk GaAs. *Physical Review B*, 2002, vol. 65, no. 24, pp. 245210 (1–7). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.245210>
7. Bychkov Yu. A. The quantum theory of the electrical conductivity of metals in strong magnetic fields. *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1961, vol. 12, no. 3, pp. 483–491.
8. Arkhincheev V. E. On the influence of magnetic field on the probability of diffusing particle capture by absorbing traps. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2019, vol. 128, no. 3, pp. 485–488. <https://doi.org/10.1134/S1063776119020018>
9. Peierls R. Model-making in physics. *Contemporary Physics*, 1980, vol. 21, no. 1, pp. 3–17. <https://doi.org/10.1080/00107518008210938>
10. Weisskopf V. F. Search for simplicity: quantum mechanics of the hydrogen atom. *American Journal of Physics*, 1985, vol. 53, no. 3, pp. 206–207. <https://doi.org/10.1119/1.14122>
11. Ogluzdin V. E. The role of Bohr frequencies in the scattering, luminescence, and generation of radiation in different media. *Physics Uspekhi*, 2006, vol. 49, no. 4, pp. 401–405. <https://doi.org/10.1070/PU2006v049n04ABEH005803>
12. Fermi E. *Notes on Quantum Mechanics: A Course Given by Enrico Fermi at the University of Chicago*. Chicago, The University of Chicago Press, 1995. vii+188 p.
13. Poole C. P. *The Physics Handbook: Fundamentals and Key Equations*. Weinheim, Wiley, 2007. xxii+514 p.
14. Malykin G. B. Thomas precession: correct and incorrect solutions. *Physics Uspekhi*, 2006, vol. 49, no. 8, pp. 837–853. <https://doi.org/10.1070/PU2006v049n08ABEH005870>

15. Kholmetskii A. L., Missevitch O. V., Yarman T. On the classical analysis of spin-orbit coupling in hydrogenlike atoms. *American Journal of Physics*, 2010, vol. 78, no. 4, pp. 428–432. <https://doi.org/10.1119/1.3277052>
16. Krasnopevtsev E. A. *Quantum Mechanics in Applications to Solid State Physics*. Novosibirsk, NGTU Publ., 2017. 355 p. (in Russian).
17. Shpol'skii E. V. *Atomic Physics. 2 vols.* Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2010. 560+448 p. (in Russian).
18. Jackson J. D. *Classical Electrodynamics*. New York, Wiley, 1999. xxii+808 p.
19. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Podenok S. L. *Statistical Physics of Semiconductors*. Moscow, KomKniga Publ., 2005. 264 p. (in Russian).
20. Bellyustin S. V. *Classical Electronic Theory*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1971. 350 p. (in Russian).
21. Vasil'ev B. V., Lyuboshits V. L. Virial theorem and some properties of the electron gas in metals. *Physics Uspekhi*, 1994, vol. 37, no. 4, pp. 345–351. <https://doi.org/10.1070/PU1994v037n04ABEH000018>
22. Lyuboshits V. L. *The Virial theorem and the conditions of equilibrium of a system of charged particles in the magnetic field*. Dubna, Joint Institute for Nuclear Research (JINR), 1996. 18 p. (in Russian).
23. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Dzeraviah A. N. Thermal ionization energy of hydrogen-like impurities in semiconductor materials. *Journal of the Belarusian State University. Physics*, 2020, no. 2, pp. 28–41. <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-2-28-41> (in Russian).
24. Haraldson S., Ribbing C.-G. ESR-resonances in doped GaAs and GaP. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1969, vol. 30, no. 10, pp. 2419–2425. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(69\)90066-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(69)90066-3)
25. Watanabe K., Ueno M., Wakaki M., Abe O., Murakami H. GaAs:Se and GaAs:Te photoconductive detectors in 300 μm region for astronomical observations. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 47, no. 11, pp. 8261–8264. <https://doi.org/10.1143/JJAP.47.8261>
26. Madelung O. *Semiconductors: Data Handbook*. Berlin, Springer, 2004. xiv+692 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18865-7>
27. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Poklonskaya O. N., Zabrodskii A. G. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction. *Journal of Applied Physics*, 2011, vol. 110, no. 12, pp. 123702 (1–7). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
28. Aronzon B. A., Meilikhov E. Z. Statistics of electrons in semiconductors in a quantizing magnetic field. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1972, vol. 34, no. 5, pp. 1014–1017.
29. Meilikhov E. Z., Aronzon B. A. The influence of a quantizing magnetic field on the electron concentration in semiconductors. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1972, vol. 206, no. 6, pp. 1329–1332. (in Russian).
30. Litvinenko K. L., Nikzad L., Pidgeon C. R., Allam J., Cohen L. F., Ashley T., Emeny M., Zawadzki W., Murdin B. N. Temperature dependence of the electron Landé g factor in InSb and GaAs. *Physical Review B*, 2008, vol. 77, no. 3, pp. 033204 (1–4). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.033204>
31. Oestreich M., Rühle W. W. Temperature dependence of the electron Landé g factor in GaAs. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 74, no. 12, pp. 2315–2318. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2315>
32. Askerov B. M., Figarova S. R. *Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases*. Berlin, Springer, 2010, xii+374 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03171-7>
33. Vdovin A. V., Skok E. M. Precise measurement of the free electron g-factor in InSb. *Physica Status Solidi B*, 1986, vol. 136, no. 2, pp. 603–613. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221360225>
34. Karasyuk V. A., Beckett D. G. S., Nissen M. K., Villemaire A., Steiner T. W., Thewalt M. L. W. Fourier-transform magnetophotoluminescence spectroscopy of donor-bound excitons in GaAs. *Physical Review B*, 1994, vol. 49, no. 23, pp. 16381–16397. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.16381>
35. Okulov V. I., Pamyatnykh E. A., Al'shanskii G. A. Fermi-liquid anomaly of the concentration dependence of the g-factor of the conduction electrons in a semiconductor with hybridized impurity states. *Low Temperature Physics*, 2009, vol. 35, no. 2, pp. 146–148. <https://doi.org/10.1063/1.3075946>

Информация об авторах

Поклонский Николай Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

Деревяго Александр Николаевич – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: deralex@list.ru

Вырко Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vyrko@bsu.by

Information about the authors

Nikolai A. Poklonski – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

Aliaksandr N. Dzeraviah – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: deralex@list.ru

Sergey A. Vyrko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vyrko@bsu.by