

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 517.925.42
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-275-286>

Поступила в редакцию 15.05.2020
 Received 15.05.2020

А. А. Гринь

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ФУНКЦИИ ДЮЛАКА – ЧЕРКАСА ДЛЯ СИСТЕМ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЮ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Аннотация. Объектом исследования в настоящей работе является автономная система ван дер Поля на вещественной плоскости. Предметом исследования выступают свойства предельного цикла указанной системы. Основная цель предлагаемой статьи состоит в нахождении локализации предельного цикла на фазовой плоскости и установлении его формы при различных значениях действительного параметра системы ван дер Поля. Наш подход основан на применении трансверсальных кривых, соответствующих функциям Дюлака – Черкаса и аппроксимирующих расположение предельного цикла. В качестве первого шага для системы ван дер Поля были выделены пять топологически эквивалентных систем, включая системы с параметром, поворачивающим векторное поле, и сингулярно возмущенные системы. Затем, применяя ранее разработанный способ, для трех из рассматриваемых систем в фазовой плоскости при всех действительных значениях параметра кроме нулевого построены по две полиномиальные функции Дюлака – Черкаса. С их помощью найдены трансверсальные кривые, образующие границы областей локализации предельного цикла системы ван дер Поля. Таким образом, построенные функции Дюлака – Черкаса позволяют определять расположение предельного цикла на основе алгебраических кривых при всех действительных значениях параметра, включая значения, близкие к бифуркации предельного цикла из овалов центра, бифуркации Андронова – Хопфа и бифуркации из замкнутой траектории, соответствующей разрывному периодическому решению.

Ключевые слова: автономная система ван дер Поля на плоскости, топологически эквивалентные системы, предельный цикл, функция Дюлака – Черкаса, сингулярно возмущенная система, система с параметром, поворачивающим векторное поле

Для цитирования. Гринь, А. А. Функции Дюлака – Черкаса для систем, эквивалентных уравнению ван дер Поля / А. А. Гринь // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 275–286. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-275-286>

Aliaksandr A. Hryn

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

DULAC – CHERKAS FUNCTIONS FOR SYSTEMS EQUIVALENT TO THE VAN DER POL EQUATION

Abstract. The object of this study is an autonomous van der Pol system on a real plane. The subject of the study is the properties of the limit cycle of this system. The main purpose of this paper is to find the localization of the limit cycle on the phase plane and establish its shape for various values of the real parameter of the van der Pol system. Our approach is based on the use of transverse curves related to the Dulac – Cherkas functions and approximating the location of the limit cycle. As the first step, five topologically equivalent systems, including systems with a parameter rotating the vector field, as well as singularly perturbed systems are determined for the van der Pol system. Then, applying the previously elaborated method, we constructed two polynomial Dulac – Cherkas functions for each of three systems from the considered ones in the phase plane for all real nonzero values of the parameter. Using them, transverse curves forming the boundaries of the localization regions of the limit cycle for the van der Pol system are found. Thus, the constructed Dulac – Cherkas functions allow us to determine the location of the limit cycle on the basis of algebraic curves for all real parameter values, including values close to the bifurcation of a limit cycle from the center ovals, the Andronov – Hopf bifurcation, and the bifurcation from a closed trajectory related to a discontinuous periodic solution.

Keywords: van der Pol planar autonomous system, topologically equivalent systems, limit cycle, Dulac – Cherkas function, singularly perturbed system, system with a parameter rotated the vector field

For citation. Hryn A. A. Dulac – Cherkas functions for systems equivalent to the van der Pol equation. *Vesti Natsyianal'noi akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 275–286 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-275-286>

Введение. Рассмотрим скалярное автономное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (1)$$

которое было введено голландским инженером и физиком ван дер Полем в 1926 г. [1] для описания автоколебаний в триодном генераторе с колебательным контуром в цепи сетки лампы. Действительный параметр λ характеризует нелинейность и силу затухания колебаний [2].

Уравнение ван дер Поля (1) легко записывается как специальный случай системы Лъенара [3, с. 254]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - \lambda(x^2 - 1)y. \end{aligned} \quad (2)$$

При $\lambda = 0$ фазовый портрет системы (2) состоит из континуума концентрических окружностей с центром в начале координат. Когда параметр проходит нулевое значение, имеет место бифуркация предельного цикла Γ_λ , появляющегося из окружности радиуса 2 [4, с. 465].

Известно [3, с. 257], что при всех $\lambda \neq 0$ это уравнение имеет единственное периодическое решение $p(t, \lambda)$, соответствующее предельному циклу системы (2), чья амплитуда x остается вблизи значения 2, а максимальная скорость y растет неограниченно, когда $|\lambda|$ стремится к бесконечности. В связи с этим для нахождения положения предельного цикла при конкретных значениях параметра используют приближенные методы [5, с. 413; 6]. Поэтому разработка аналитического или качественного способа для установления локализации предельного цикла системы (2) остается актуальной задачей в теории дифференциальных уравнений и их приложениях.

При этом предельный цикл является асимптотически орбитально устойчивым при $\lambda > 0$ и неустойчивым при $\lambda < 0$. Доказательство существования предельного цикла для системы Лъенара основано на нахождении в фазовой плоскости кольцеобразной области, к которой теорема Пуанкаре – Бендиксона может быть применена [7]. Построение кривых, ограничивающих такую кольцеобразную область, требует изучения поведения некоторых траекторий и не является простым процессом.

В работе [8] ван дер Полю заметил, что при очень больших значениях параметра характер колебаний отличается прерывистыми скачками, возникающими каждый раз, когда система становится неустойчивой, и что период этих новых колебаний определяется продолжительностью емкостного разряда, который принято называть временем релаксации. В последствии ван дер Полю интенсивно изучал такие релаксационные колебания.

Основная цель нашего исследования состоит в установлении локализации предельного цикла на фазовой плоскости и нахождении его формы в зависимости от параметра системы ван дер Поля (2). Наш подход основан на применении трансверсальных кривых, соответствующих функциям Дюлака – Черкаса и аппроксимирующих предельный цикл. В качестве первого шага для системы ван дер Поля мы выделим 5 топологически эквивалентных систем, включая системы с параметром, поворачивающим векторное поле [3, с. 384], и сингулярно возмущенные системы [9, с. 15]. Затем, применяя ранее разработанный способ, для трех из рассматриваемых систем в фазовой плоскости при всех действительных значениях параметра кроме нулевого построим по две полиномиальные функции Дюлака – Черкаса [10, 11]. С их помощью найдем трансверсальные кривые, аппроксимирующие локализацию предельного цикла системы ван дер Поля.

Системы, топологически эквивалентные уравнению ван дер Поля. Замена t на $-t$ и λ на $-\lambda$ оставляет уравнение (1) без изменений. Следовательно, в нашем исследовании предельного цикла можем ограничиться случаем $\lambda > 0$.

Если заменить x на $-x$ и y на $-y$, то система (2) остается без изменений. Это означает, что предельный цикл системы (2) является симметричным относительно начала координат.

Используя для $\lambda > 0$ масштабирование $u = \sqrt{\lambda}x$, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (u^2 - \lambda)\frac{du}{dt} + u = 0, \tag{3}$$

котарый эквівалентен сістэме

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -v, \\ \frac{dv}{dt} &= u + \lambda v - u^2 v. \end{aligned} \tag{4}$$

Сістэма (2) можа быць перафармавана ў (4) напрамую з дапамогай суадношэнняў

$$x := u / \sqrt{\lambda}, \quad y := v / \sqrt{\lambda}. \tag{5}$$

Очевидно, что при $\lambda > 0$ системы (2) и (4) имеют одну и ту же топологическую структуру из траекторий, т. е. система (4) при $\lambda > 0$ имеет единственный предельный цикл, который является орбитально асимптотически устойчивым. При $\lambda = 0$ фазовые портреты этих систем не являются топологически эквивалентными. Система (4) имеет единственную точку покоя в начале координат, характер устойчивости которой изменяется при прохождении параметром λ нулевого значения. В этом случае имеет место бифуркация Андронова – Хопфа, при которой из точки покоя появляется предельный цикл.

Одно из важнейших свойств системы (4) состоит в том, что ее векторное поле поворачивается в одном и том же направлении при возрастании или убывании параметра λ .

Представления (1) и (3) удобны для исследования при малых значениях параметра λ . Теперь получим представления уравнения ван дер Поля (1), которые удобны для исследования при больших значениях параметра λ . С этой целью введем быстрое время τ для $\lambda > 0$ с помощью соотношения $t = \lambda\tau$. Полагая $\varepsilon := \frac{1}{\lambda^2}$, уравнение (1) может быть записано в следующем виде

$$\varepsilon \frac{d^2x}{d\tau^2} + (x^2 - 1)\frac{dx}{d\tau} + x = 0. \tag{6}$$

Если же уравнение (6) переписать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left[\varepsilon \frac{dx}{d\tau} + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] + x = 0 \tag{7}$$

и использовать обозначение

$$\xi := \varepsilon \frac{dx}{d\tau} + \left(\frac{x^3}{3} - x \right), \quad \eta := x,$$

то уравнение (7) становится эквивалентным сингулярно возмущенной системе

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -\eta, \\ \varepsilon \frac{d\eta}{d\tau} &= \xi - \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Система (2) может быть преобразована напрямую в систему (8) при использовании соотношений

$$\varepsilon := \frac{1}{\lambda^2}, \quad t := \lambda\tau, \quad \xi := -\frac{y}{\lambda} + \frac{x^3}{3} - x, \quad \eta := x. \tag{9}$$

В случае $\varepsilon = 0$ система (8) называется вырожденной и является дифференциально-алгебраической [9, с. 15]. У вырожденной системы есть замкнутая траектория, соответствующая разрывному периодическому решению. При значениях параметра, достаточно близких к нулевому, у системы (8) возникает устойчивый предельный цикл. Соответствующее ему периодическое решение имеет характер релаксационного колебания.

Далее представим уравнение (1) в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dx}{dt} + \lambda \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] + x = 0. \quad (10)$$

С помощью обозначений

$$\bar{x} := \frac{dx}{dt} + \lambda \left(\frac{x^3}{3} - x \right), \quad \bar{y} := x$$

уравнение (10) может быть переписано в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= -\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \bar{x} - \lambda \left(\frac{\bar{y}^3}{3} - \bar{y} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученная система (11), как и исходная система ван дер Поля (2), является результатом возмущения гамильтоновой системы с траекториями в виде континуума концентрических окружностей с центром в начале координат. Система (2) может быть напрямую преобразована к виду (11) с помощью соотношений

$$x := \bar{y}, \quad y := -\bar{x} + \lambda \left(\frac{\bar{y}^3}{3} - \bar{y} \right). \quad (12)$$

Кроме того заметим, что система (11) эквивалентна уравнению

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \lambda \left(\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 / 3 - 1 \right) \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{x} = 0, \quad (13)$$

которое известно как уравнение Релея [12, с. 86].

С помощью масштабирования $\bar{u} = \sqrt{\lambda \bar{x}}$ уравнение (13) принимает вид

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \left(\left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)^2 / 3 - \lambda \right) \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} = 0, \quad (14)$$

который эквивалентен следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\bar{v}, \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= \bar{u} + \lambda \bar{v} - \frac{\bar{v}^3}{3}, \end{aligned} \quad (15)$$

где параметр λ поворачивает векторное поле. Система (11) может быть напрямую преобразована в систему (15) с помощью соотношений

$$\bar{x} := \bar{u} / \sqrt{\lambda}, \quad \bar{y} := \bar{v} / \sqrt{\lambda}. \quad (16)$$

А система (2) может быть напрямую преобразована в систему (15) с помощью соотношений

$$x := \bar{v} / \sqrt{\lambda}, \quad y := -\left(\bar{u} - \frac{\bar{v}^3}{3} + \lambda \bar{v}\right) / \sqrt{\lambda}. \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что системы (4) и (15) имеют одинаковые фазовые портреты.

Далее заметим, что система (8) эквивалентна сингулярно возмущенному уравнению

$$\varepsilon \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \left(\left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 / 3 - 1 \right) \frac{d\xi}{d\tau} + \xi = 0, \quad (18)$$

а уравнения (6) и (18) имеют одинаковые фазовые портреты. Уравнение (6) эквивалентно следующей сингулярно возмущенной системе:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\eta}}{d\tau} &= -\bar{\xi}, \\ \varepsilon \frac{d\bar{\xi}}{d\tau} &= \bar{\eta} - (\bar{\eta}^2 - 1)\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Система (2) может быть напрямую сведена к системе (19) с помощью соотношений

$$\varepsilon := \frac{1}{\lambda^2}, \quad t := \lambda\tau, \quad x := \bar{\eta}, \quad y := \frac{\bar{\xi}}{\lambda}. \quad (20)$$

Для полноты изложения заметим, что при применении масштабирования времени $\sigma = \lambda t$ в случае $\lambda > 0$ и при использовании обозначения $\varepsilon := \frac{1}{\lambda^2}$ уравнение (1) в работе [13] было переписано следующим образом:

$$\frac{d^2 x}{d\sigma^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{d\sigma} + \varepsilon x = 0,$$

а затем в виде эквивалентной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\sigma} &= -y, \\ \frac{dy}{d\sigma} &= \varepsilon x - (x^2 - 1)y. \end{aligned} \quad (21)$$

Функция Дюлака – Черкаса: определение, основные свойства и построение. Рассмотрим планарную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \lambda), \quad (22)$$

зависящую от действительного параметра $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ в области $G \subset \mathbb{R}^2$ при выполнении следующего условия: $P, Q \in C^1_{(x,y)}{}^0_{\lambda}(G \times \Lambda, \mathbb{R})$. Напомним, что признак Дюлака [14, с. 189], как один из инструментов для нелокального изучения предельных циклов системы (22), был существенно улучшен в 1997 г. Л. А. Черкасом [15]. Соответствующая обобщенная функция Дюлака, известная теперь как функция Дюлака – Черкаса [10], определяется следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Функция $\Psi \in C^1_{(x,y)}{}^0_{\lambda}(G \times \Lambda, \mathbb{R})$ называется функцией Дюлака – Черкаса системы (22) в области G при $\lambda \in \Lambda$, если существует действительное число $k \neq 0$ такое, что выполняется условие

$$\Phi := (\text{grad } \Psi, X_\lambda) + \kappa \Psi \text{ div } X_\lambda > 0 (< 0). \quad (23)$$

З а м е ч а н и е. Условие (23) может быть ослаблено, если предположить, что функция Φ может принимать нулевое значение в G на множестве $N_\lambda \subset G$ меры нуль.

Далее с помощью множества W_λ , которое вводится следующим образом:

$$W_\lambda := \{(x, y) \in G : \Psi(x, y, \lambda) = 0\}, \quad (24)$$

опишем основные свойства функции Дюлака – Черкаса [15], применяемые для исследования предельных циклов.

Т е о р е м а 1. Пусть $\Psi(x, y, \lambda)$ является функцией Дюлака – Черкаса системы (22) при $\lambda \in \Lambda$ в области G . Тогда произвольный предельный цикл Γ_λ системы (22), целиком расположенный в G , обладает следующими свойствами:

- Γ_λ не пересекает множество W_λ ;
- Γ_λ является грубым предельным циклом;
- Γ_λ является орбитально асимптотически устойчивым (неустойчивым) предельным циклом, если на нем выражение $\kappa \Phi(x, y, \lambda) \Psi(x, y, \lambda)$ имеет отрицательный (положительный) знак.

Следующий результат по оценке числа предельных циклов был доказан в работе [10], где под овалом понимается простая замкнутая кривая.

Т е о р е м а 2. Пусть G представляет собой p -связную область, в которой Ψ является функцией Дюлака – Черкаса системы (22) при $\lambda \in \Lambda$ такой, что множество W_λ содержит s овалов, расположенных в G . Тогда в случае $k < 0$ система (22) имеет при $\lambda \in \Lambda$ не более $p - 1 + s$ предельных циклов в G , которые, если существуют, являются грубыми.

В работе [11] был предложен способ построения функции Дюлака – Черкаса для обобщенной системы Лъенара вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{k=0}^l h_k(x, \lambda) y^k, \end{aligned} \quad (25)$$

где функции h_k являются непрерывными по переменной x при $\lambda \in \Lambda$. Если функция Дюлака – Черкаса строится в виде

$$\Psi(x, y, \lambda) := \sum_{r=0}^n \Psi_r(x, \lambda) y^r,$$

где функции Ψ_i являются непрерывно дифференцируемыми по переменной x при $\lambda \in \Lambda$, то в случае $l = 1, n = 2$ из работы [11] вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 3. Ψ является функцией Дюлака – Черкаса системы (25) в G при $\lambda \in \Lambda$, если функции Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \Psi'_2 &= 0, \\ \Psi'_1 &= (\kappa + 2)h_1(x, \lambda)\Psi_2, \\ \Psi'_0 &= (\kappa + 1)h_1(x, \lambda)\Psi_1 + 2h_0(x, \lambda)\Psi_2, \end{aligned} \quad (26)$$

а число κ и постоянные интегрирования c_i для Ψ_i могут быть выбраны таким образом, что выражение

$$\Phi(x, \lambda, \kappa) := h_0(x)\Psi_1(x, \lambda) + \kappa h_1(x, \lambda)\Psi_0(x, \lambda) \quad (27)$$

не изменяет свой знак в G и может принимать нулевое значение только на множестве $N_\lambda \subset G$ меры нуль при $\lambda \in \Lambda$.

Функции Дюлака – Черкаса для систем, эквивалентных уравнению ван дер Поля. Применяя способ, основанный на теореме 3, построим последовательно функции Дюлака – Черкаса для системы ван дер Поля (2) и для полученных эквивалентных ей систем (4) и (19). Заметим, что если найдена функция Дюлака – Черкаса для одной из указанных систем, то применение преобразований (5) и (20) позволяет функции Дюлака – Черкаса легко построить и для двух других эквивалентных систем. В завершение используем трансверсальные кривые, соответствующие всем построенным функциям Дюлака – Черкаса, чтобы получить лучшую аппроксимацию для расположения предельного цикла системы ван дер Поля (2) при $\lambda > 0$.

Начнем с системы ван дер Поля (2).

Теорема 4. Функции

$$\Psi_{a1}(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \tag{28}$$

и

$$\Psi_{b1}(x, y, \lambda) := x^2 + y^2 - \frac{8}{3} + \lambda \left(x - \frac{x^3}{3} \right) y \tag{29}$$

являются функциями Дюлака – Черкаса системы (2) при $\lambda > 0$ во всей фазовой плоскости.

Доказательство. Обе функции Ψ_a и Ψ_b строились в виде $\sum_{i=0}^2 \Psi_i(x, \lambda) y^i$, где функции $\Psi_i(x, \lambda)$ определяются с помощью линейной дифференциальной системы (26). В случае функции Ψ_a при $c_0 = -1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ и $\kappa = -2$ из (27) получаем

$$\Phi_a(x, -2, \lambda) = 2\lambda(x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

В случае функции Ψ_b при $c_0 = -\frac{8}{3}$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ и $\kappa = -1$ из (27) получаем

$$\Phi_b(x, -1, \lambda) = \frac{2}{3}\lambda(x^2 - 2)^2 \geq 0.$$

С учетом замечания доказательство теоремы завершено.

Функция Дюлака – Черкаса Ψ_{a1} изначально была найдена Л. А. Черкасом в работе [15] с помощью такого же способа. Заметим, что обе эти функции Дюлака – Черкаса имеют такую же симметрию, как и предельный цикл системы (2).

Множество $W_a := \{(x, y) \in G : \Psi_{a1}(x, y, \lambda) = 0\}$, соответствующее функции Дюлака – Черкаса $\Psi(x, y)_{a1}$, состоит из единственного овала в виде единичной окружности. Поэтому из теоремы 2 получаем следующий глобальный результат.

Теорема 5. Система (2) при $\lambda > 0$ имеет не более одного предельного цикла на всей фазовой плоскости. Если цикл существует, то он окружает единичную окружность.

Для второй функции Дюлака – Черкаса $\Psi(x, y)_{b1}$ алгебраическими методами устанавливается следующий результат.

Теорема 6. Множество $W_b := \{(x, y) \in G : \Psi_{b1}(x, y, \lambda) = 0\}$ состоит из овала O_λ , окружающего начало координат, и двух ветвей $K_{1,\lambda}$ и $K_{3,\lambda}$, расположенных в первой и третьей четвертях. Это множество симметрично относительно начала координат.

Обозначим через $A_{0,\lambda}$, $A_{1,\lambda}$ и $A_{3,\lambda}$ области, ограниченные овалом O_λ , ветвью $K_{1,\lambda}$ в первой четверти и ветвью $K_{3,\lambda}$ в третьей четверти соответственно.

Взаимные расположения овала O_λ , ветвей $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ и единичной окружности O_1 вместе с предельным циклом Γ_λ системы (2) для значений параметра $\lambda = 0,1$, $\lambda = 3$ и $\lambda = 10$ представлены на рис. 1.1, 1.2, 1.3 соответственно.

Теперь рассмотрим систему (4), для которой существование функции Дюлака – Черкаса важно во взаимосвязи с бифуркацией Андронова – Хопфа.

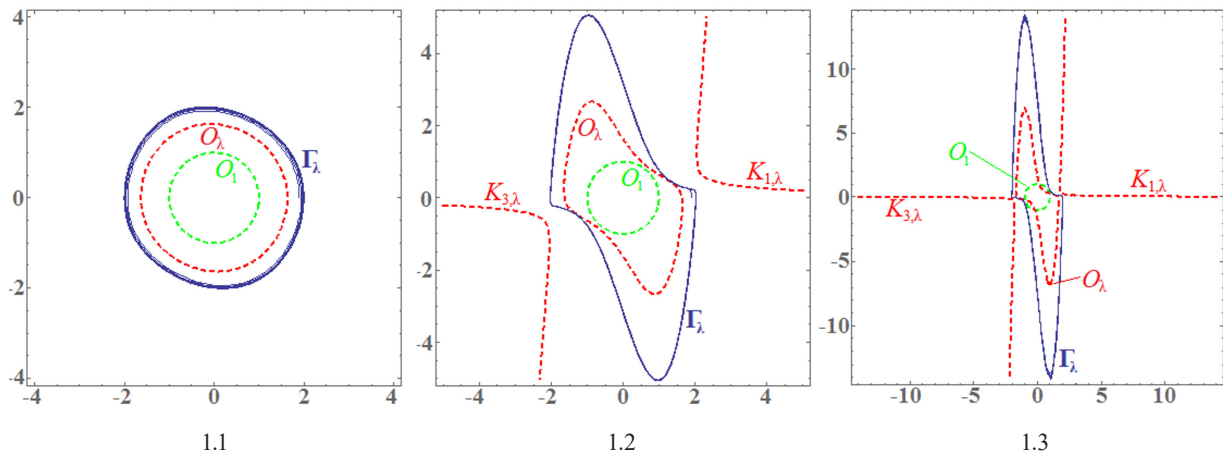


Рис. 1. Взаимное расположение овала O_λ , ветвей $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ и единичной окружности O_1 вместе с предельным циклом Γ_λ системы (2) при $\lambda = 0,1$, $\lambda = 3$ и $\lambda = 10$

Fig. 1. Mutual location of the O_λ oval, $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ branches, and O_1 unit circle together with the limit Γ_λ cycle of the system (2) for $\lambda = 0,1$, $\lambda = 3$, and $\lambda = 10$

Теорема 7. Функции

$$\Psi_{a2}(u, v, \lambda) := u^2 + v^2 - \lambda \tag{30}$$

u

$$\Psi_{b2}(u, v, \lambda) := u^2 + v^2 - \frac{8}{3}\lambda + \left(\lambda u - \frac{u^3}{3} \right) v \tag{31}$$

являются функциями Дюлака – Черкаса системы (4) при $\lambda > 0$.

Доказательство. Как и в теореме 4, функции Ψ_{a2} и Ψ_{b2} строились в виде $\sum_{i=0}^2 \Psi_i(x, \lambda) y^i$, где функции $\Psi_i(x, \lambda)$ определяются с помощью линейной дифференциальной системы (26), в которой x и y заменяются на u и v соответственно. В случае функции Ψ_{a2} при $\kappa = -2$ из (27) получаем

$$\Phi_{a2}(u, -2, \lambda) = 2(u^2 - \lambda)^2 \geq 0.$$

В случае функции Ψ_{b2} при $\kappa = -1$ из (27) получаем

$$\Phi_{b2}(u, -1, \lambda) = \frac{2}{3}(u^2 - 2\lambda)^2 \geq 0.$$

С учетом замечания доказательство теоремы завершено.

Доказательство теоремы также можно получить, если применить соотношения (5) $u := \sqrt{\lambda}x$, $v := \sqrt{\lambda}y$ непосредственно к функциям (28) и (29).

При малых значениях параметра λ кривые множества W_{b2} лучше аппроксимируют расположение предельного цикла Γ_λ , при значениях $\lambda > 4$ нужно использовать кривые обоих множеств W_{a2} и W_{b2} , чтобы получить наилучшую аппроксимацию расположения предельного цикла.

Взаимные расположения овала O_λ и ветвей $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ множества W_{b2} и окружности множества W_{a2} вместе с предельным циклом Γ_λ системы (4) для значений параметра $\lambda = 0,1$, $\lambda = 3$ и $\lambda = 6$ представлены на рис. 2.1, 2.2, 2.3 соответственно.

Наконец рассмотрим систему (19).

Теорема 8. Функции

$$\Psi_{a3}(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \epsilon) := \bar{\eta}^2 + \epsilon \bar{\xi}^2 - 1 \tag{32}$$

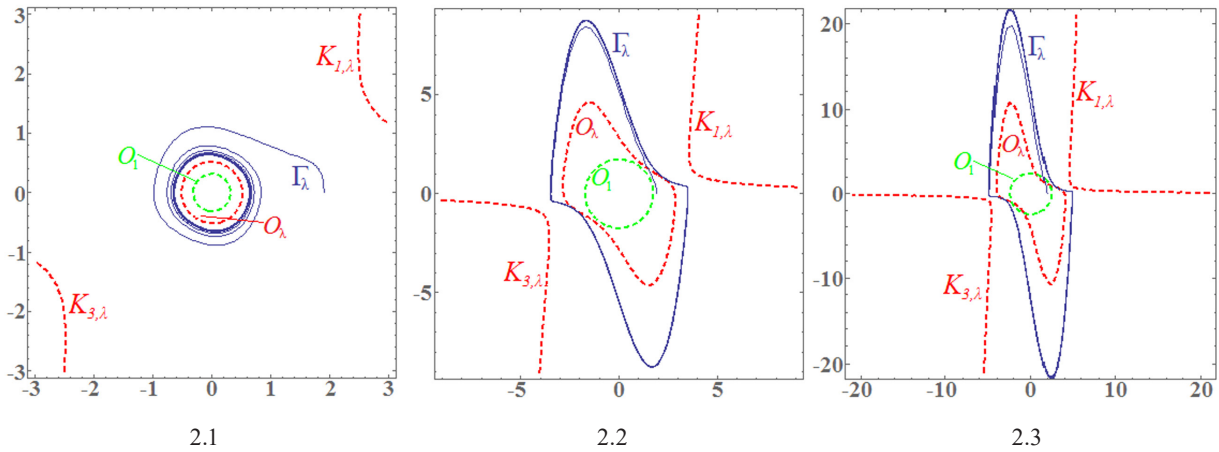


Рис. 2. Взаимное расположение овала O_λ , ветвей $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ и окружности O_1 вместе с предельным циклом Γ_λ системы (4) при $\lambda = 0,1$, $\lambda = 3$ и $\lambda = 6$

Fig. 2. Mutual location of the O_λ oval, $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ branches, and O_1 circle together with the limit Γ_λ cycle of the system (4) for $\lambda = 0,1$, $\lambda = 3$, and $\lambda = 6$

и

$$\Psi_{b3}(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \varepsilon) := \bar{\eta}^2 + \varepsilon \bar{\xi}^2 - \frac{8}{3} + \left(\bar{\eta} - \frac{\bar{\eta}^3}{3} \right) \bar{\xi} \quad (33)$$

являются функциями Дюлака – Черкаса системы (19) при $\lambda > 0$.

Доказательство. Утверждение теоремы доказывается аналогично теореме 4. Для функции Ψ_{a3} при $c_0 = -1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ и $\kappa = -2$ из (27) получаем

$$\Phi_{a3}(\bar{\eta}, -2, \varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} (1 - \bar{\eta}^2)^2 \geq 0,$$

а для функции Ψ_{b3} при $c_0 = -\frac{8}{3}$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ и $\kappa = -1$ из (27) получаем

$$\Phi_{b3}(\bar{\eta}, -1, \varepsilon) = \frac{2}{3\varepsilon} (\bar{\eta}^2 - 2)^2 \geq 0.$$

Принимая во внимание замечание, доказательство завершено.

Если применить преобразование (17) к функциям Дюлака – Черкаса (32) и (33) для системы (19), то с точностью до параметра получим такие же функции Дюлака – Черкаса, как (28) и (29) соответственно для системы ван дер Поля (2).

Взаимные расположения овала O_λ и ветвей $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ множества W_{b2} и эллипса O_1 множества W_{a2} вместе с предельным циклом Γ_λ системы (19) для значений параметра $\lambda = 0,15$, $\lambda = 3$ и $\lambda = 10$ представлены на рис. 3.1, 3.2, 3.3 соответственно.

Отметим, что в работе [13] для системы (21) на фазовой плоскости при $\varepsilon > 0$ была построена функция Дюлака – Черкаса вида

$$\Psi(x, y, \varepsilon) \equiv x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon} - 1.$$

В завершение применим построенные функции Дюлака – Черкаса Ψ_a и Ψ_b для исследования предельного цикла системы ван дер Поля. Поскольку при $\lambda > 0$ вне единичной окружности выражение $\kappa \Phi_a(x, -2, \lambda) \Psi_a(x, y)$ отрицательно, то из теоремы 1 получаем следующий результат.

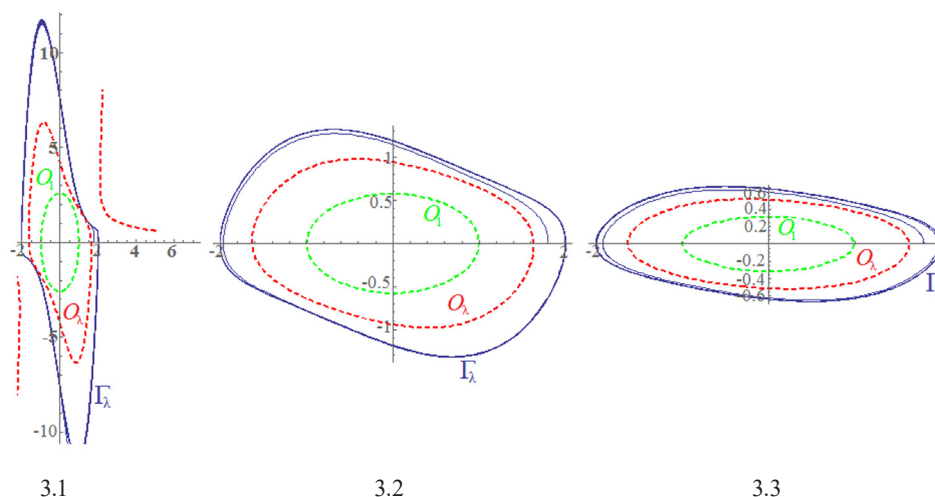


Рис. 3. Взаимное расположение овала O_λ , ветвей $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ и эллипса O_1 вместе с предельным циклом Γ_λ системы (19) при $\varepsilon = 0,15$, $\varepsilon = 3$ и $\varepsilon = 10$

Fig. 3. Mutual location of the O_λ oval, $K_{1,\lambda}$, $K_{3,\lambda}$ branches, and O_1 ellipse together with the limit Γ_λ cycle of the system (19) for $\varepsilon = 0.15$, $\varepsilon = 3$, and $\varepsilon = 10$

Теорема 9. Если система (2) при $\lambda > 0$ имеет предельный цикл, то он является грубым и орбитально асимптотически устойчивым.

При доказательстве существования предельного цикла системы (2) единичная окружность может быть использована как внутренняя граница кольцевой области K , к которой применяется теорема Пуанкаре – Бендиксона. Все траектории системы (2), которые пересекают единичную окружность, делают это трансверсально, покидая при этом внутренность соответствующего круга при возрастании t . В качестве внешней границы кольцевой области K может быть использована замкнутая кривая, построенная Г. Сансоне [16] для уравнения Льенара. Таким образом, вытекает следующий результат.

Теорема 10. Система (2) при $\lambda > 0$ имеет единственный предельный цикл Γ_λ , который является орбитально асимптотически устойчивым и окружает единичную окружность.

Теперь применим вторую функцию Дюлака – Черкаса Ψ_b , чтобы получить лучшую аппроксимацию для расположения предельного цикла Γ_λ в зависимости от параметра λ . Из теоремы 1 следует такое утверждение.

Теорема 11. Предельный цикл Γ_λ системы (2) при $\lambda > 0$ расположен вне областей $A_{0,\lambda}$, $A_{1,\lambda}$ и $A_{3,\lambda}$.

Если сравнить взаимное расположение овала O_λ и единичной окружности O_1 , то получим следующее заключение.

Теорема 12. Существует число $\lambda^* \approx 3,9$ такое, что при $0 < \lambda < \lambda^*$ единичная окружность O_1 расположена внутри области, ограниченной овалом O_λ . При $\lambda > \lambda^*$ существуют две другие части O_λ , расположенные внутри единичной окружности.

Если обозначим через A область, ограниченную единичной окружностью, а через A_λ – область, ограниченную O_λ , то из теоремы 12 получим следующую теорему.

Теорема 13. При $0 < \lambda \leq \lambda^*$ овал O_λ лучше аппроксимирует предельный цикл Γ_λ системы (2), чем единичная окружность, при $\lambda > \lambda^*$ граница множества $A_\lambda \cup A$ аппроксимирует предельный цикл Γ_λ системы (2).

Обозначим через P_λ точку на овале O_λ , в которой координата y принимает максимальное значение. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 14. Координата y точки P_λ возрастает вместе с возрастанием λ , а точка P_λ стремится к $+\infty$ при λ , стремящемся к ∞ .

Таким образом, с помощью признака Дюлака – Черкаса мы получили новое доказательство известного результата [6].

Теорема 15. Амплитуда предельного цикла Γ_λ системы (2) вдоль оси u стремится к ∞ .

На языке теории бифуркаций можно сказать, что предельный цикл Γ_λ при достаточно большом λ появляется из бесконечности. Учитывая, что множество W_b стремится к четырем прямым $x = 0$, $x = \pm 1$, $y = 0$, когда λ стремится к $+\infty$, приходим к заключению, что имеет место бифуркация от разрывного периодического решения с неограниченной амплитудой.

Заключение. Для нахождения локализации предельного цикла на фазовой плоскости и установления его формы в зависимости от параметра системы ван дер Поля был разработан подход, основанный на применении трансверсальных кривых, соответствующих функциям Дюлака – Черкаса и аппроксимирующих предельный цикл. В качестве первого шага для системы ван дер Поля были выделены 5 топологически эквивалентных систем, включая системы с параметром, поворачивающим векторное поле, и сингулярно возмущенные системы. Затем, применяя ранее разработанный способ, для трех из рассматриваемых систем в фазовой плоскости при всех действительных значениях параметра, кроме нулевого, построены по две полиномиальные функции Дюлака – Черкаса. С их помощью найдены трансверсальные кривые, образующие границы областей локализации предельного цикла системы ван дер Поля. Таким образом, построенные функции Дюлака – Черкаса позволяют определять расположение предельного цикла на основе алгебраических кривых при всех действительных значениях параметра, включая значения, близкие к бифуркации из овалов центра, бифуркации Андронова – Хопфа и бифуркации из замкнутой траектории, соответствующей разрывному периодическому решению.

Список использованных источников

1. Van der Pol, B. On relaxation-oscillations / B. van der Pol // London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. J. Sci. – 1926. – Vol. 2, № 11. – P. 978–992. <https://doi.org/10.1080/14786442608564127>
2. Феномен уравнения ван дер Поля / А. П. Кузнецов [и др.] // Изв. вузов. ПНД. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
3. Perko, L. Differential equations and dynamical systems / L. Perko. – Springer-Verlag, 2001. – 557 p. – (Texts in Applied Mathematics, Vol. 7). <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>
4. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов [и др.]. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
5. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
6. Cao, Y. The estimate of the amplitude of limit cycles of symmetric Liénard systems / Y. Cao, C. Liu // J. Differ. Equations. – 2017. – Vol. 262, № 3. – P. 2025 – 2038. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.034>
7. Liénard, A. Etude des oscillations entretenues / A. Liénard // Rev. Gén. Électr. – 1928. – Vol. 23. – P. 901–912.
8. Van der Pol, B. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart / B. van der Pol, J. van der Mark // The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. J. Sci. – 1928. – Vol. 6, № 38. – P. 763–992. <https://doi.org/10.1080/14786441108564652>
9. Мищенко, Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
10. Grin, A. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems / A. Grin, K. Schneider // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. – 2007. – Vol. 14, № 5. – P. 641–656.
11. Cherkas, L. A. Dulac – Cherkas functions for generalized Liénard systems / L. A. Cherkas, A. A. Grin, K. R. Schneider // Electron. J. Qualitative Theory Differential Equations. – 2011. – № 35. – P. 1–23. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2011.1.35>
12. Lynch, S. Dynamical Systems with Applications Using Mathematica / S. Lynch. – Boston: Birkhäuser, 2007. – 484 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4586-1>
13. Schneider, K. R. New approach to study the van der Pol equation for large damping / K. R. Schneider // Electron. J. Qualitative Theory Differential Equations. – 2018. – № 8. – P. 1–10. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.8>
14. Dumortier, F. Qualitative Theory of Planar Differential Systems / F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artes. – Berlin; Heidelberg: Springer. – 2006. – XVI, 302 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32902-2>
15. Черкас, Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 689–699.
16. Sansone, G. Sopra l'equazione di A. Liénard delle oscillazioni di rilassamento / G. Sansone // Ann. Math. Pura Appl. – 1949. – Vol. 28, № 1. – P. 153–181. <https://doi.org/10.1007/bf02411124>

References

1. Van der Pol B. On relaxation-oscillations. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1926, vol. 2, no. 11, pp. 978–992. <https://doi.org/10.1080/14786442608564127>
2. Kuznetsov A. P., Seliverstova E. S., Trubetskoy D. I., Tyuryukina L. V. The phenomenon of the van der Pol equation. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika = Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 4, pp. 3–42 (in Russian).

3. Perko L. *Differential equations and dynamical systems. Texts in Applied Mathematics. Vol. 7.* Springer-Verlag, 2001. 557 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>
4. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. M., Maier A. G. *The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on the Plane.* Moscow, Nauka Publ., 1967. 488 p. (in Russian).
5. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Oscillation Theory.* Moscow, Nauka Publ., 1981. 918 p. (in Russian).
6. Cao Y., Liu C. The estimate of the amplitude of limit cycles of symmetric Lienard systems. *Journal of Differential Equations*, 2017, vol. 262, no. 3, pp. 2025–2038. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.034>
7. Liénard A. Etude des oscillations entretenues. *Revue Générale de l'Électricité*, 1928, vol. 23, pp. 901–912.
8. Van der Pol B., Van der Mark J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1928, vol. 6, no. 38, pp. 763–992. <https://doi.org/10.1080/14786441108564652>
9. Mishchenko E. F., Rozov N. Kh. *Small-parameter Differential Equations and Relaxation Oscillations.* Moscow, Nauka Publ., 1975. 248 p. (in Russian).
10. Grin A., Schneider K. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems. *Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Series A: Mathematical Analysis*, 2007, vol. 14, no. 5, pp. 641–656.
11. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. R. Dulac-Cherkas functions for generalized Liénard systems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2011, no. 35, pp. 1–23. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2011.1.35>
12. Lynch S. *Dynamical Systems with Applications Using Mathematica.* Boston, Birkhäuser, 2007. 484 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4586-1>
13. Schneider K. R. New approach to study the van der Pol equation for large damping. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2018, no. 8, pp. 1–10. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.8>
14. Dumortier F., Llibre J., Artes J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. XVI, 302 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32902-2>
15. Cherkas L. A. The Dulac function for polynomial autonomous systems on a plane. *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 5, pp. 692–701.
16. Sansone G. Sopra l'equazione di A. Liénard delle oscillazioni di rilassamento. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1949, vol. 28, no. 1, pp. 153–181. <https://doi.org/10.1007/bf02411124>

Информация об авторе

Гринь Александр Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: grin@grsu.by

Information about the author

Aliaksandr A. Hryn – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Republic of Belarus). E-mail: grin@grsu.by