ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.968.7
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

Поступила в редакцию 13.04.2020
Received 13.04.2020

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ И ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛАМИ

Аннотация. Изучено линейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка, заданное на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения имеют специальную структуру. Уравнение содержит сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши, и гиперсингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечной части по Адамару. Применяется метод аналитического продолжения. Уравнение сводится к последовательному решению краевой задачи Римана и двух линейных дифференциальных уравнений. Задача Римана решается в классе аналитических функций с особыми точками. Дифференциальные уравнения решаются в классе аналитических функций в областях комплексной плоскости. Приводятся в явном виде условия разрешимости исходного уравнения. Решение уравнения при выполнении этих условий также приводится в явном виде. Рассмотрены примеры. Проанализирован неочевидный частный случай.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, сингулярный интеграл, гиперсингулярный интеграл, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, линейные дифференциальные уравнения

Для цитирования. Шилин, А. П. О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 298–309. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

Andrey P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus

ON THE SOLUTION OF ONE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULAR AND HYPERSINGULAR INTEGRALS

Abstract. A linear integro-differential equation of the first order given on a closed curve located on the complex plane is studied. The coefficients of the equation have a special structure. The equation contains a singular integral, which can be understood as the main value by Cauchy, and a hypersingular integral which can be understood as the end part by Hadamard. The analytical continuation method is applied. The equation is reduced to a sequential solution of the Riemann boundary value problem and two linear differential equations. The Riemann problem is solved in the class of analytic functions with special points. Differential equations are solved in the class of analytical functions on the complex plane. The conditions for the solvability of the original equation are explicitly given. The solution of the equation when these conditions are fulfilled is also given explicitly. Examples are considered. A non-obvious special case is analyzed.

Keywords: integro-differential equation, singular integral, hypersingular integral, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, linear differential equations

For citation. Shilin A. P. On the solution of one integro-differential equation with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 298–309 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

Введение. Интегральные уравнения с сингулярными интегралами широко известны и имеют многочисленные приложения (см., напр., [1]). Менее известны и исследованы интегральные уравнения с гиперсингулярными интегралами, также имеющие важные приложения (см., напр., [2]). Изучение интегро-дифференциальных уравнений с гиперсингулярными интегралами было начато в статье [3], затем продолжено в работах [4–6], причем, как нам представляется, новизна и конструктивный характер полученных результатов способны привлечь к себе интерес и найти приложения.

Постановка задачи и общая схема решения. Пусть L – простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости, D_+ и D_- – области с границей L,

$0 \in D_+,\ \infty \in D_-$. Зададим H-непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции $a(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0,\ p_+(t) \neq 0,\ p_-(t) \neq 0,\ t \in L$. Будем искать H-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(a(t)p'_+(t)+b(t)p'_-(t)\right)\varphi(t)-\left(a(t)p_+(t)+b(t)p_-(t)\right)\varphi'(t)+$$
$$+\frac{a(t)p'_+(t)-b(t)p'_-(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}-\frac{a(t)p_+(t)-b(t)p_-(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=f(t),\ t \in L\ . \tag{1}$$

Интеграл с $\tau - t$ в знаменателе понимается в смысле главного значения по Коши, а с $(\tau - t)^2$ – в смысле конечной части по Адамару.

Уравнение (1) решено явно в [4] в предположении, что функции $p_\pm(t)$ аналитически продолжимы в соответствующие области $D_\pm$, причем $p_\pm(z) \neq 0,\ z \in D_\pm$. Теперь будем допускать у функций $p_\pm(z)$ в областях $D_\pm$ нули и полюсы. Конструктивный характер исследования уравнения сохранится, однако значительно усложнится.

Предположим, что функции $p_\pm(z)$ в точках $z_j^\pm \in D_\pm$ имеют полюсы порядков соответственно $n_j^\pm,\ j=\overline{1,n^\pm}$, а в точках $\zeta_j^\pm \in D_\pm$ имеют нули порядков соответственно $m_j^\pm,\ j=\overline{1,m^\pm}$. (Здесь и далее в аналогичных случаях соответствие понимается в том числе и по знакам «+» и «–».) Считаем для определенности, что среди точек $z_j^-,\ \zeta_j^-$ нет точки $z = \infty$. Как и в [4], введем функции

$$\Phi_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z \in D_\pm,$$

$$F_+(z)=p'_+(z)\Phi_+(z)-p_+(z)\Phi'_+(z),\quad z \in D_+, \tag{2}$$

$$F_-(z)=p'_-(z)\Phi_-(z)-p_-(z)\Phi'_-(z),\quad z \in D_-. \tag{3}$$

Тогда после использования обычных и обобщенных формул Сохоцкого [7] уравнение (1) сведется к последовательному решению краевой задачи Римана

$$F_+(t)=\frac{b(t)}{a(t)}F_-(t)+\frac{f(t)}{2a(t)},\quad t \in L, \tag{4}$$

и линейных дифференциальных уравнений (2), (3), после чего (в случае разрешимости) искомая функция находится по формуле

$$\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_-(t),\quad t \in L\ . \tag{5}$$

Вспомогательные факты. Функции $\Phi_\pm(z)$, введенные посредством интеграла типа Коши, являются аналитическими в областях $D_\pm$, причем $\Phi_-(z)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{z}\right)$ при $z \to \infty$ и, следовательно, $\Phi'_-(z)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$. Согласно нашим предположениям $p_-(z) \sim \mathrm{const}$ при $z \to \infty$, тогда $p'_-(z)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$ и по формуле (3) $F_-(z)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$. Поскольку дифференцирование аналитических функций в конечных точках увеличивает порядки полюсов на единицу, а порядки нулей на единицу уменьшает, то из соотношений (2), (3) вытекает, что функции $F_\pm(z)$ будут допускать в точках $z_j^\pm$ полюсы порядков не выше соответственно $n_j^\pm+1,\ j=\overline{1,n^\pm}$, а в точках $\zeta_j^\pm$ будут иметь нули порядков не ниже $m_j^\pm-1$ соответственно, $j=\overline{1,m^\pm}$. Пользуясь удобной терминологией из [8], можно сказать, что краевую задачу Римана (4) следует решать в классе функций, кратных дивизору

$$\bigcup_{j=1}^{n^+}\left(z_j^+\right)^{-n_j^+-1}\bigcup_{j=1}^{n^-}\left(z_j^-\right)^{-n_j^--1}\bigcup_{j=1}^{m^+}\left(\zeta_j^+\right)^{m_j^+-1}\bigcup_{j=1}^{m^-}\left(\zeta_j^-\right)^{m_j^--1}\infty^2.$$

Теория задачи Римана [9] позволяет получить такое решение. Для записи этого решения используем следующие обозначения:

$$æ = \mathrm{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}; \quad X_{\pm}(z)$$

– канонические функции задачи Римана, факторизующие ее коэффициент $\frac{b(t)}{a(t)}$;

$$\Psi_{\pm}(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau - z)}, \quad z \in D_{\pm};$$

$$n = \sum_{j=1}^{n^+} n_j^+ + \sum_{j=1}^{n^-} n_j^- + n^+ + n^-, \quad m = \sum_{j=1}^{m^+} m_j^+ + \sum_{j=1}^{m^-} m_j^- - m^+ - m^-;$$

$$\sum_{j=-\infty}^{n-1} \psi_j z^j$$

– разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функции $\Psi_-(z)\prod_{j=1}^{n^+}\left(z - z_j^+\right)^{n_j^+ + 1}\prod_{j=1}^{n^-}\left(z - z_j^-\right)^{n_j^- + 1}$;

$$P(z) = \sum_{j=0}^{æ+n-m-2} b_j z^j$$

– многочлен степени $æ + n - m - 2$ с произвольными коэффициентами, если $æ + n - m - 2 \geq 0$, $P(z) \equiv 0$, если $æ + n - m - 2 < 0$;

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j$$

– интерполяционный многочлен Эрмита, определяемый по условиям

$$\left(Q(z)\right)^{(k)}\Big|_{z=\zeta_j^{\pm}} = \left(\sum_{j=0}^{n-1}\psi_j z^j - \Psi_{\pm}(z)\prod_{j=1}^{n^+}\left(z - z_j^+\right)^{n_j^+ + 1}\prod_{j=1}^{n^-}\left(z - z_j^-\right)^{n_j^- + 1}\right)^{(k)}\Bigg|_{z=\zeta_j^{\pm}},$$

$$k = \overline{0, m_j^{\pm} - 2}, \quad j = \overline{1, m^{\pm}}$$

(если для какой-либо точки $\zeta_j^{\pm}$ значение $m_j^{\pm} = 1$, то соответствующее условие для многочлена Эрмита отсутствует, а если все $m_j^{\pm} = 1$, то $Q(z) \equiv 0$).

Решение задачи (4) имеет вид

$$F_{\pm}(z) = Y_{\pm}(z)P(z) + Z_{\pm}(z), \ z \in D_{\pm},$$

где

$$Y_{\pm}(z) = \frac{X_{\pm}(z)\prod_{j=1}^{m^+}\left(z - \zeta_j^+\right)^{m_j^+ - 1}\prod_{j=1}^{m^-}\left(z - \zeta_j^-\right)^{m_j^- - 1}}{\prod_{j=1}^{n^+}\left(z - z_j^+\right)^{n_j^+ + 1}\prod_{j=1}^{n^-}\left(z - z_j^-\right)^{n_j^- + 1}},$$

$$Z_{\pm}(z) = \frac{X_{\pm}(z)\left(\Psi_{\pm}(z)\prod_{j=1}^{n^+}\left(z - z_j^+\right)^{n_j^+ + 1}\prod_{j=1}^{n^-}\left(z - z_j^-\right)^{n_j^- + 1} - \sum_{j=0}^{n-1}\psi_j z^j + Q(z)\right)}{\prod_{j=1}^{n^+}\left(z - z_j^+\right)^{n_j^+ + 1}\prod_{j=1}^{n^-}\left(z - z_j^-\right)^{n_j^- + 1}}.$$

При этом в случае $æ + n - m \geq 1$ задача разрешима безусловно. При $æ + n - m < 1$ для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_j = 0, \quad j = \overline{æ + n - 1, m - 1}, \tag{6}$$

в которых следует положить $a_j = \psi_j$ при $j < 0$.

Решение дифференциальных уравнений. Основной результат. Предположим, что задача (4) разрешима, а ее решение найдено. Приступим к исследованию дифференциального уравнения (2). Формула его общего решения имеет вид

$$\Phi_+(z) = C_+ p_+(z) - \widetilde{C}_+(z) p_+(z), \; z \in D_+, \tag{7}$$

где $C_+ \in \mathbb{C}$, а $\widetilde{C}_+(z)$ – какая-либо первообразная функции $\frac{F_+(z)}{p_+^2(z)}$. Эта формула, вообще говоря, не даст аналитическую функцию из-за возможных полюсов. Кроме того, указанная первообразная может не существовать. Очевидно, что, желая устранить полюсы, следует в первую очередь положить $C_+ = 0$.

Функция $\frac{F_+(z)}{p_+^2(z)}$ в точках ζ_j будет иметь полюсы порядка не выше $m_j^+ + 1, \; j = \overline{1, m^+}$, а в точках z_j^+ – нули порядка не ниже $n_j^+ - 1, \; j = \overline{1, n^+}$ (если $n_j^+ = 1$ для какого-либо j, то в соответствующей точке z_j^+ будет просто аналитичность). Для существования упомянутой производной необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\operatorname*{res}_{z = \zeta_j^+} \frac{F_+(z)}{p_+^2(z)} = 0, \quad j = \overline{1, m^+}. \tag{8}$$

Предположим, что равенства (8) выполнены. Тогда в качестве первообразной можно взять функцию

$$\widetilde{C}_+(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{F_+(\zeta) d\zeta}{p_+^2(\zeta)}, \quad z \in D_+, \tag{9}$$

где $z_0 \in D_+$, а путь интегрирования не проходит через точки $\zeta_j^+, \; j = \overline{1, m^+}$. Представим функцию $\frac{F_+(z)}{p_+^2(z)}$ в виде

$$\frac{F_+(z)}{p_+^2(z)} = \sum_{j=1}^{m^+} H_j^+(z) + \left(\frac{F_+(z)}{p_+^2(z)} - \sum_{j=1}^{m^+} H_j^+(z) \right),$$

где

$$H_j^+(z) = \frac{d_{-m_j^+ - 1, j}}{\left(z - \zeta_j^+\right)^{m_j^+ + 1}} + \frac{d_{-m_j^+, j}}{\left(z - \zeta_j^+\right)^{m_j^+}} + \ldots + \frac{d_{-2, j}}{\left(z - \zeta_j^+\right)^2}$$

являются главными частями разложений этой функции в ряд Лорана в окрестности точек $\zeta_j^+, \; j = \overline{1, m^+}$. В качестве еще одной первообразной функции $\frac{F_+(z)}{p_+^2(z)}$ можно взять также функцию

$$\sum_{j=1}^{m^+} \left(-\frac{d_{-m_j^+ - 1, j}}{m_j^+ \left(z - \zeta_j^+\right)^{m_j^+}} - \frac{d_{-m_j^+, j}}{\left(m_j^+ - 1\right)\left(z - \zeta_j^+\right)^{m_j^+ - 1}} - \ldots - \frac{d_{-2, j}}{z - \zeta_j^+} \right) + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{F_+(\zeta)}{p_+^2(\zeta)} - \sum_{j=1}^{m^+} H_j^+(\zeta) \right) d\zeta,$$

для которой наличие полюсов в точках ζ_j^+ порядка не выше соответственно m_j^+ очевидно, $j=\overline{1,m^+}$. Следовательно, такими же будут полюсы и для первообразной (9), поскольку она может отличаться лишь на константу. В формуле (7), принявшей теперь вид

$$\Phi_+(z) = -p_+(z)\int\limits_{z_0}^{z} \frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)}, \quad z \in D_+, \tag{10}$$

полюсы первообразной в точках ζ_j^+, $j=\overline{1,m^+}$, «погасятся» нулями функции $p_+(z)$, так что эти точки станут точками аналитичности функции $\Phi_+(z)$. (Более точно, эти точки станут устранимыми особыми точками, но здесь и далее в аналогичных случаях мы не различаем подобные типы точек.)

Однако аналитичности функции $\Phi_+(z)$ все еще, вообще говоря, не будет из-за полюсов у функции $p_+(z)$ в точках z_j^+, $j=\overline{1,n^+}$. Добиваясь аналитичности, следует выбором первообразной постараться «погасить» эти полюсы. Сделать это можно лишь в одной точке. Возьмем для определенности полюс в точке z_1^+, тогда при $z_0 = z_1^+$ первообразная $\int\limits_{z_1^+}^{z} \frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)}$ будет иметь в точке z_1^+ нуль порядка не меньше n_1^+, а функция

$$\Phi_+(z) = -p_+(z)\int\limits_{z_1^+}^{z} \frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)}, \quad z \in D_+, \tag{11}$$

станет аналитической в точке z_1^+. Если $n^+ \geq 2$, то для устранения полюсов у функции (11) в остальных точках z_j^+ должны выполняться необходимые и достаточные условия

$$\int\limits_{z_1^+}^{z_j^+} \frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)} = 0, \quad j=\overline{2,n^+}.$$

Интегральные теоремы для аналитических функций позволяют придать записанным условиям более симметричный относительно точек z_j^+ вид:

$$\int\limits_{z_j^+}^{z_{j+1}^+} \frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)} = 0, \quad j=\overline{1,n^+-1}. \tag{12}$$

(Для придания полной симметрии относительно точек z_j^+ к условиям (12) можно добавить условие $\int\limits_{z_n^+}^{z_1^+} \frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)} = 0$, однако это будет уже следствием этих условий.)

Для общего решения

$$\Phi_-(z) = p_-(z)C_- - p_-(z)\widetilde{C}_-(z), \quad z \in D_-, \tag{13}$$

уравнения (3) рассуждения во многом аналогичны. Здесь C_- – произвольная постоянная, которую для аналитичности функции $\Phi_-(z)$ следует в дальнейшем положить равной нулю. Функция $\widetilde{C}_-(z)$ является какой-либо первообразной функции $\frac{F_-(\zeta)}{p_-^2(\zeta)}$. Чтобы такая первообразная существовала, должны выполняться условия

$$\operatorname*{res}_{z=\zeta_j^-} \frac{F_-(z)}{p_-^2(z)} = 0, \quad j=\overline{1,m^-}, \tag{14}$$

что мы в дальнейшем будем предполагать. Кроме того, должно выполняться условие $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{F_-(z)}{p_-^2(z)} = 0.$ Последнее условие имеет место, так как $\dfrac{F_-(z)}{p_-^2(z)} = O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$. Для справедливости равенства $\Phi\_(\infty) = 0$ следует взять первообразную в виде $\int\limits_\infty^z \dfrac{F_-(\zeta)d\zeta}{p_-^2(\zeta)}$, и тогда для аналитичности решения

$$\Phi_-(z) = -p_-(z)\int\limits_\infty^z \frac{F_-(\zeta)d\zeta}{p_-^2(\zeta)}, \quad z \in D_-, \tag{15}$$

возникают необходимые и достаточные условия

$$\int\limits_\infty^{z_j^-} \frac{F_-(\zeta)d\zeta}{p_-^2(\zeta)} = 0, \quad j = \overline{1, n^-}. \tag{16}$$

Теперь проведены все рассуждения, позволяющие сформулировать окончательный результат. В формулировке этого результата учтем тот факт, что при наличии в формулах решения краевой задачи (4) произвольных постоянных b_j, входящих в многочлен $P(z)$, равенства (8), (12), (14), (16) в развернутом виде будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений.

Т е о р е м а. *При* $æ + n - m < 1$ *для разрешимости уравнения* (1) *необходимо и достаточно выполнение совокупности условий* (6), (8), (12), (14), (16), *а при* $æ + n - m = 1$ – *совокупности условий* (8), (12), (14), (16). *При* $æ + n - m > 1$ *для разрешимости уравнения* (1) *необходима и достаточна совместность следующей системы линейных алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{æ+n-m-2} \alpha_{kj} b_j = \alpha_k, \quad k = \overline{1, m^+}; \\ \sum\limits_{j=0}^{æ+n-m-2} \beta_{kj} b_j = \beta_k, \quad k = \overline{1, n^+ - 1}; \\ \sum\limits_{j=0}^{æ+n-m-2} \gamma_{kj} b_j = \gamma_k, \quad k = \overline{1, m^-}; \\ \sum\limits_{j=0}^{æ+n-m-2} \delta_{kj} b_j = \delta_k, \quad k = \overline{1, n^-}, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\alpha_{kj} = \operatorname*{res}_{z=\zeta_k^+} \frac{Y_+(z)z^j}{p_+^2(z)}, \quad \alpha_k = -\operatorname*{res}_{z=\zeta_k^+} \frac{Z_+(z)}{p_+^2(z)},$$

$$\beta_{kj} = \int\limits_{z_k^+}^{z_{k+1}^+} \frac{Y_+(\zeta)\,\zeta^j d\zeta}{p_+^2(\zeta)}, \quad \beta_k = -\int\limits_{z_k^+}^{z_{k+1}^+} \frac{Z_+(\zeta)\,d\zeta}{p_+^2(\zeta)},$$

$$\gamma_{kj} = \operatorname*{res}_{z=\zeta_k^-} \frac{Y_-(z)z^j}{p_-^2(z)}, \quad \gamma_k = -\operatorname*{res}_{z=\zeta_k^-} \frac{Z_+(z)}{p_-^2(z)},$$

$$\delta_{kj} = \int\limits_\infty^{z_k^-} \frac{Y_-(\zeta)\,\zeta^j d\zeta}{p_-^2(\zeta)}, \quad \delta_k = -\int\limits_\infty^{z_k^-} \frac{Z_-(\zeta)\,d\zeta}{p_-^2(\zeta)}.$$

В случае разрешимости уравнения (1) *его решение имеет вид*

$$\varphi(t) = p_-(t)\int_{\infty}^{t}\frac{F_-(\zeta)\,d\zeta}{p_-^2(\zeta)} - p_+(t)\int_{z_1}^{t}\frac{F_+(\zeta)\,d\zeta}{p_+^2(\zeta)}, \quad t \in L,$$

причем при $æ + n - m > 1$ *произвольные постоянные* b_j, $j = \overline{0, æ + n - m - 2}$, *входящие в выражения для* $F_\pm(\zeta)$, *являются общим решением системы* (17).

Отметим, что теорема сформулирована для случая $n^+ > 1$. Если $n^+ = 1$, то в формулировке следует отбросить условие (12), а в системе (17) – соответствующие уравнения (содержащие β_{kj} и β_k). Отметим также, что использованные обозначения предполагали наличие хотя бы одного нуля и хотя бы одного полюса у каждой из функций $p_\pm(z)$. Если нет нулей и (или) полюсов у одной или обеих этих функций, то исследование уравнения и соответствующие формулы естественным образом упростятся. Например, если нет нулей у функции $p_+(z)$, то следует считать $\sum_{j=1}^{m^+} m_j^+$ и $\prod_{j=1}^{m^+}\left(z - \zeta_j^+\right)^{m_j^+ - 1}$ соответственно нулем и единицей, условий (8) не будет и т. п. Важно заметить, что отсутствие полюсов у функции $p_+(z)$ сохранит в формуле (7) слагаемое $p_+(z)C_+$ и даст соответствующее слагаемое в формулу решения исходного уравнения (для функции $p_-(z)$ аналогичный факт не верен).

Примеры. Рассмотрим два примера с разным характером особых точек. В обоих примерах $a(t) = b(t) = 1$.

Пример 1. Пусть в уравнении (1)

$$p_+(t) = \frac{1}{t(t-1)}, \quad p_-(t) = \frac{t}{t-1}, \quad f(t) = 2,$$

точки $z = 0$ и $z = 1$ расположены в D_+ (рис. 1).

Уравнение приобретает вид

$$\frac{1 - 2t - t^2}{t^2(t-1)^2}\varphi(t) - \frac{t^2+1}{t(t-1)}\varphi'(t) + \frac{1}{\pi i t^2}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{1+t}{\pi i t}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = 2, \quad t \in L.$$

Функция

$$F_+(z) = \frac{1-2z}{z^2(z-1)^2}\Phi_+(z) - \frac{1}{z(z-1)}\Phi'_+(z)$$

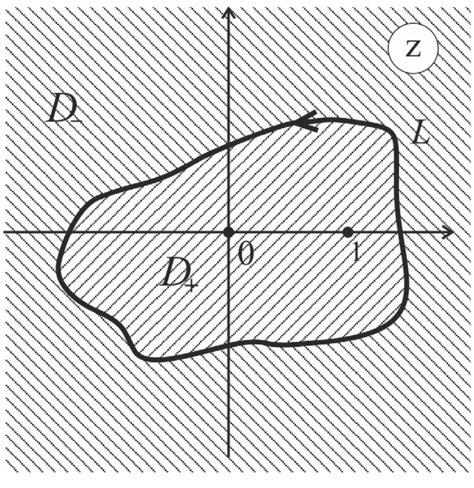

Рис. 1. Кривая L в примере 1

Fig. 1. Curve L in example 1

будет аналитической в D_+, за исключением точек $z = 0$, $z = 1$, где допускаются полюсы не выше 2-го порядка. Функция

$$F_-(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}\Phi_-(z) - \frac{z}{z-1}\Phi'_-(z)$$

будет аналитической в D_- и имеющей на бесконечности нуль по меньшей мере 2-го порядка. Краевая задача Римана (4) приобретает вид задачи о скачке

$$F_+(t) = F_-(t) + 1, \quad t \in L,$$

и должна решаться в классе функций, кратных дивизору $0^{-2}\,1^{-2}\,\infty^2$. Такая задача безусловно разрешима, решением будут функции с произвольными постоянными a, b, c:

$$F_+(z) = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z} - \frac{c}{z-1} + 1,$$

$$F_-(z) = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z} - \frac{c}{z-1}.$$

Здесь возникает одно условие разрешимости вида (12):

$$\int_0^1 \zeta^2(\zeta-1)^2\left(\frac{a}{\zeta^2} + \frac{b}{(\zeta-1)^2} + \frac{c}{\zeta} - \frac{c}{\zeta-1} + 1\right)d\zeta = 0,$$

откуда $2a + 2b + c + \frac{1}{5} = 0.$ Теперь находим функции

$$\Phi_+(z) = \frac{1}{z(z-1)}\int_0^z \zeta^2(\zeta-1)^2\left(\frac{a}{\zeta^2} + \frac{b}{(\zeta-1)^2} + \frac{c}{\zeta} - \frac{c}{\zeta-1} + 1\right)d\zeta =$$

$$= \frac{z^3}{5} - \frac{3z^2}{10} + \left(a + b + \frac{1}{10}\right)z,$$

$$\Phi_-(z) = \frac{z}{z-1}\int_\infty^z \frac{(\zeta-1)^2}{\zeta^2}\left(\frac{a}{\zeta^2} + \frac{b}{(\zeta-1)^2} + \frac{c}{\zeta} - \frac{c}{\zeta-1}\right)d\zeta =$$

$$= \frac{1}{1-z}\left(3a + 3b + \frac{1}{5} - \left(2a + b + \frac{1}{10}\right)\frac{1}{z} + \frac{a}{3z^2}\right),$$

полагая при этом $c = -2a - 2b - \frac{1}{5}$, так что остаются две произвольные постоянные a, b. Наконец по формуле (5) получаем решение примера

$$\varphi(t) = \frac{t^3}{5} + \frac{3t^2}{10} + \left(a + b + \frac{1}{10}\right)t - \frac{1}{1-t}\left(3a + 3b + \frac{1}{5} - \left(2a + b + \frac{1}{10}\right)\frac{1}{t} + \frac{a}{3t^2}\right).$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{(t-i)^2 - 2i}{(t-i)^2}\varphi(t) - \frac{t^2 + (1-i)t + i}{t-i}\varphi'(t) + \frac{(t-i)^2 + 2i}{\pi i(t-i)^2}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} -$$

$$-\frac{t^2 - (1+i)t - i}{\pi i(t-i)}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} = 2\left(\delta t + \frac{1}{t^2}\right), \ t \in L.$$

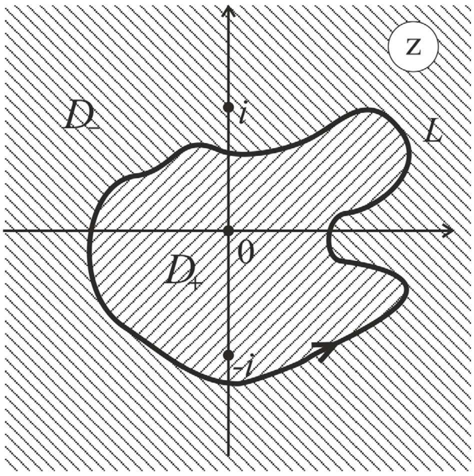

Рис. 2. Кривая L в примере 2

Fig. 2. Curve L in example 2

Так выглядит уравнение (1), если в нем $p_+(t)=t$, $p_-(t)=\dfrac{t+i}{t-i}$, $f(t)=2\left(\delta t+\dfrac{1}{t^2}\right)$ (δ – числовой параметр). Предположим, что точки $z = 0$, $z = -i$ расположены в D_+, а точка $z = i$ – в D_- (рис. 2). В этом случае функция

$$F_+(z)=\Phi_+(z)-z\Phi'_+(z)$$

будет аналитической в D_+ (без, вообще говоря, нулей), а функция

$$F_-(z)=-\frac{2i}{(z-i)^2}\Phi_-(z)-\frac{z+i}{z-i}\Phi'_-(z)$$

аналитической в D_-, допускающей полюс не выше 2-го порядка в точке $z = i$ и имеющей нуль по меньшей мере 2-го порядка в точке $z = \infty$. Соответствующая задача Римана

$$F_+(t)=F_-(t)+\delta t+\frac{1}{t^2},\quad t\in L,$$

должна решаться в классе функций, кратных дивизору $i^{-2}\infty^2$. Решением будут функции

$$F_+(z)=\delta z+\frac{a}{(z-i)^2},\quad F_-(z)=\frac{a}{(z-i)^2}-\frac{1}{z^2}$$

с произвольной постоянной a. По формуле (7) $\Phi_+(z)=zC_+-z\widetilde{C}_+(z)$, причем произвольная постоянная C_+ должна остаться, а в роли $\widetilde{C}_+(z)$ будет первообразная функции

$$\frac{F_+(z)}{p_+^2(z)}=\frac{1}{z^2}\left(\delta z+\frac{a}{(z-i)^2}\right)=\frac{-2ia}{z-i}-\frac{a}{(z-i)^2}+\frac{2ia+\delta}{z}-\frac{a}{z^2}.$$

Чтобы такая первообразная существовала, должно, очевидно, выполняться соотношение

$$\delta=-2ia, \tag{18}$$

что мы в дальнейшем предполагаем. Тогда можно взять

$$\widetilde{C}_+(z)=\frac{a}{z}+\frac{a}{z-i}-2ia\ln(z-i).$$

Здесь под $\ln(z-i)$ понимается произвольная фиксированная однозначная непрерывная ветвь в комплексной плоскости с разрезом, проведенным в D_- от точки $z = i$ до точки $z = \infty$. В результате получим

$$\Phi_+(z) = zC_+ - a\left(1 + \frac{z}{z-i} - 2iz\ln(z-i)\right).$$

Теперь вычислим функцию $\Phi_-(z)$ по формуле (15):

$$\Phi_-(z) = \frac{z+i}{z-i}\int\limits_{\infty}^{z}\left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{a}{(\zeta-i)^2}\right)\left(\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)^2 d\zeta = \frac{z+i}{z-i}\left(4i\ln\frac{z}{z+i} - \frac{1}{z} + \frac{a-4}{z+i}\right).$$

Здесь под $\ln\dfrac{z}{z+i}$ понимается однозначная непрерывная ветвь, характеризующаяся условием $\left.\ln\dfrac{z}{z+i}\right|_{z=\infty} = 0$; соответствующий разрез проводится в области D_+ от точки $z = 0$ до точки $z = -i$. Добиваясь устранения у этой функции возможного полюса в точке $z = i$, следует потребовать выполнения равенства

$$\left.\left(4i\ln\frac{z}{z+i} - \frac{1}{z} + \frac{a-4}{z+i}\right)\right|_{z=i} = 0,$$

откуда получим $a = 2(3 - 4\ln 2)$.

С учетом равенств (18) и (5) для рассматриваемого примера окончательно получим следующий результат: уравнение разрешимо лишь для $\delta = -4i(3 - 4\ln 2)$, при этом значении δ решение содержит произвольную постоянную C_+ и имеет вид

$$\varphi(t) = C_+t - 2(2\ln 2 - 1 - i)\left(1 + \frac{t}{t-i} - 2i\ln(t-i)\right) - \frac{t+i}{t-i}\left(4i\ln\frac{t}{t+i} - \frac{1}{t} + \frac{2(1-4\ln 2)}{t+i}\right).$$

Частный случай. Укажем не слишком очевидный частный случай уравнения (1):

$$\frac{\varphi(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} - \frac{\varphi'(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{g'(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} - \frac{g(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} = f(t), \quad t \in L. \tag{19}$$

Здесь $g(t)$, $t \in L$, – заданная H-непрерывно дифференцируемая функция. Такой вид можно придать уравнению (1), если в нем $a(t) = b(t) = 1$, функция $\dfrac{f(t)}{2}$ переобозначена снова $f(t)$, а в роли функции $p_\pm(t)$ выступают предельные значения на кривой L интеграла типа Коши

$$G_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad z \in D_\pm.$$

Задача Римана (4) станет задачей о скачке

$$F_+(t) = F_-(t) + f(t), \quad t \in L, \tag{20}$$

для функций $F_\pm(z) = G'_\pm(z)\Phi_\pm(z) - G_\pm(z)\Phi'_\pm(z)$, $z \in D_\pm$, которые могут иметь лишь нули (в точках, которые мы по-прежнему обозначаем $\zeta_j^\pm$, а $m_j^\pm$ – соответствующие порядки этих нулей теперь для функций $G_\pm(z)$, $j = \overline{1, m^\pm}$).

В отличие от общего случая точка $z = \infty$ будет нулем функции $G_-(z)$, и пусть для определенности это будет нуль 1-го порядка. В окрестности точки $z = \infty$ разложения функций $G_-(z)$ и $\Phi_-(z)$ в ряды Тейлора имеют вид

$$G_-(z) = \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z^2} + \ldots \ (k_1 \neq 0), \qquad \Phi_-(z) = \frac{l_1}{z} + \frac{l_2}{z^2} + \ldots\ .$$

Легко вычислить, что тогда в окрестности точки $z=\infty$ $F_-(z)=\dfrac{k_1l_2-k_2l_1}{z^4}+\ldots$, так что задачу (20) надо решать в классе функций, кратных дивизору

$$\bigcup_{j=1}^{m^+}\left(\zeta_j^+\right)^{m_j^+-1}\bigcup_{j=1}^{m^-}\left(\zeta_j^-\right)^{m_j^--1}\infty^4. \tag{21}$$

Решение задачи (20) очевидно: $F_+(z)=H_\pm(z)$, где $H_\pm(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_L\dfrac{f(\tau)d\tau}{\tau-z}$, $z\in D_\pm$, а кратность дивизору (21) даст требование кратности этому же дивизору функций $H_\pm(z)$. В развернутом виде такое требование запишется следующим образом:

$$\int\limits_L\frac{f(\tau)d\tau}{\left(\tau-\zeta_j^\pm\right)^k}=0,\ k=\overline{1,m_j^\pm-1},\ j=\overline{1,m^\pm};\quad \int\limits_L f(\tau)\tau^k d\tau=0,\ k=0,1,2 \tag{22}$$

(если $m_j=1$ для каких-либо j, то соответствующие условия отсутствуют).

Решение возникающих дифференциальных уравнений будет иметь лишь ту особенность, что в формуле (13), принимающей теперь вид

$$F_-(z)=G_-(z)C_--G_-(z)\int\limits_\infty^z\frac{H_-(\zeta)d\zeta}{G_-^2(\zeta)},\quad z\in D_-,$$

постоянную C_- следует оставить произвольной на основе несложного анализа поведения функции $F_-(z)$ на бесконечности.

Применяя доказанную теорему к уравнению (19), отметим возможность выразить окончательный результат непосредственно через исходные функции.

С л е д с т в и е. *Для разрешимости уравнения* (19) *необходимо и достаточно выполнение совокупности условий* (22) *и*

$$\operatorname*{res}_{z=\zeta_j^\pm}\frac{\int\limits_L\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-z}}{\left(\int\limits_L\frac{g(\tau)d\tau}{\tau-z}\right)^2}=0,\quad j=\overline{1,m^\pm}.$$

Если эти условия выполнены, то решение содержит две произвольные постоянные $C_\pm$ и записывается по формуле

$$\varphi(t)=\left(\frac{g(t)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\left(C_+-2\pi i\int\limits_{z_0}^t\frac{\int\limits_L\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}}{\left(\int\limits_L\frac{g(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}\right)^2}d\zeta\right)+$$
$$+\left(\frac{g(t)}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)\left(C_--2\pi i\int\limits_\infty^t\frac{\int\limits_L\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}}{\left(\int\limits_L\frac{g(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}\right)^2}d\zeta\right).$$

Подчеркнем, что интегралы $\int\limits_{z_0}^t$ и $\int\limits_\infty^t$ в формулировке следствия берутся по любым путям, расположенным соответственно в областях D_+ и D_- (и не проходящим через точки ζ_j^+ и ζ_j^-). В формулировке теоремы этот факт понятен из обозначений подынтегральных функций.

Заключение. Исследование исходного уравнения при сделанных предположениях носит законченный характер. Дальнейшие разработки возможны, например, для случая функций $p_{\pm}(z)$, имеющих существенно особые точки, а также для интегро-дифференциальных уравнений, имеющих порядок выше первого. При этом следует снова ожидать конструктивный и законченный характер получаемых результатов.

Список использованных источников

1. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
2. Бойков, И. В. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Изв. высш. учеб. заведений. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 2 (42). – С. 63–78. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6
3. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.
4. Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407
5. Шилин, А. П. Дифференциальная краевая задача Римана и ее приложение к интегро-дифференциальным уравнениям / А. П. Шилин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397
6. Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29
7. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.
8. Зверович, Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях / Э. И. Зверович // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26, вып. 1 (157). – С. 113–179.
9. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

References

1. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p. (in Russian).
2. Boykov I. V., Boykova A. I. Analytical methods of solving hypersingular integral equations. *Izvestiyavuzow. Povolzshiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, 2017, no. 2 (42), pp. 63–78. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6
3. Zverovich, E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Nacionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).
4. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryiafizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407
5. Shilin A. P. Riemann's differential boundary-value problem and its application to integro-differential equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397
6. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equations of the Euler type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 17–29 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29
7. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 2, pp. 2–28 (in Russian).
8. Zverovich E. I. Boundary value problems in the theory of analytic functions in Holder classes on riemann surfaces. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Advances in mathematical Sciences*, 1971, vol. 26, no. 1 (157), pp. 117–192 (in Russian).
9. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

Информация об авторе

Шилин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

Information about the author

Andrey P. Shilin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com