ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-310-317

Поступила в редакцию 14.04.2020
Received 14.04.2020

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ БРАУЭРА ДЛЯ БЕЗЗНАКОВОГО ЛАПЛАСИАНА КОГРАФОВ

Аннотация. Рассматривается класс кографов и его подклассы: пороговые графы и анти-регулярные графы. В 2011 г. Х. Бай подтвердил гипотезу Гроне – Меррис о сумме первых k собственных значений лапласиана произвольного графа. Как вариант указанной гипотезы А. Брауэр выдвинул свою гипотезу о верхней оценке этой суммы, которая хотя и была подтверждена для многих классов графов, однако по-прежнему остается открытой. По аналогии с гипотезой Брауэра в 2013 г. Ф. Ашрафом и другими была предложена гипотеза для суммы k собственных значений беззнакового лапласиана, которая также была впоследствии подтверждена для некоторых классов графов, но остается открытой. В настоящей работе для рассматриваемых нами классов графов подтверждается аналог гипотезы Брауэра для собственных значений их беззнакового лапласиана при некоторых натуральных значениях k, не превосходящих порядка рассматриваемых графов.

Ключевые слова: кограф, пороговый граф, анти-регулярный граф, матрица смежности, лапласиан, беззнаковый лапласиан, спектры матрицы

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Аналог гипотезы Брауэра для беззнакового лапласиана кографов / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 310–317. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-310-317

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ANALOGUE OF BRAUER'S CONJECTURE FOR THE SIGNLESS LAPLACIAN OF COGRAPHS

Abstract. In this paper, we consider the class of cographs and its subclasses, namely, threshold graphs and anti-regular graphs. In 2011 H. Bai confirmed the Grone – Merris conjecture about the sum of the first k eigenvalues of the Laplacian of an arbitrary graph. As a variation of the Grone – Merris conjecture, A. Brouwer put forward his conjecture about an upper bound for this sum. Although the latter conjecture was confirmed for many graph classes, however, it remains open. By analogy to Brouwer's conjecture, in 2013 F. Ashraf et al. put forward a conjecture about the sum of k eigenvalues of the signless Laplacian, which was also confirmed for some graph classes but remains open. In this paper, an analogue of the Brouwer's conjecture is confirmed for the graph classes under our consideration for the eigenvalues of their signless Laplacian for some natural k which does not exceed the order of the considered graphs.

Keywords: cograph, threshold graph, anti-regular graph, adjacency matrix, Laplacian, signless Laplacian, spectra of matrix

For citation. Benediktovich V. I. Analogue of Brauer's conjecture for the signless Laplacian of cographs. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 310–317 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-310-317

Пусть G – простой неориентированный связный граф порядка n с множеством вершин $V(G)=\{v_1,...,v_n\}$ и множеством ребер $E(G)$. Кроме того, пусть $e(G)=|E(G)|$. *Матрицей смежности* $A(G)=(a_{ij})$ графа G называется квадратная матрица порядка n, такая, что

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } v_iv_j\in E(G),\\ 0, \text{ если } v_iv_j\notin E(G).\end{cases}$$

Мы будем также рассматривать *матрицу Лапласа* (*лапласиан*) графа G

$$L(G)=:D(G)-A(G)$$

и *беззнаковую матрицу Лапласа* (*беззнаковый лапласиан*) графа G

$$Q(G) =: D(G) + A(G),$$

где $D(G)$ – диагональная матрица, состоящая из диагональных элементов, равных степеням d_v вершин графа G. Обе матрицы $L(G)$, $Q(G)$ являются симметрическими, положительно полуопределенными матрицами. Обозначим через $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n = 0$ и $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n \geq 0$ собственные значения лапласиана и беззнакового лапласиана графа G, соответственно упорядоченные по их невозрастанию. В 2011 г. Х. Бай [1] доказал известную гипотезу Гроне – Меррис [2] о сумме первых k наибольших собственных значений лапласиана графа G.

Гипотеза 1 ([2]). *Для любого целого числа* $1 \leq k \leq n$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \leq \sum_{i=1}^{k} d_i^*(G),$$

где $d_i^*(G) = |\{v \in V(G) : d_v \geq i\}| \ \ \forall i = \overline{1,n}.$

Основываясь на этой теореме, А. Брауэр [3] сформулировал свою гипотезу для собственных значений лапласиана произвольного графа G.

Гипотеза 2 ([3]). *Для любого целого числа* $1 \leq k \leq n$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \leq e(G) + \binom{k+1}{2}.$$

Данная гипотеза в настоящее время подтверждена для многих классов графов и послужила основой для формулировки в 2013 г. Ф. Ашрафом и другими [4] *аналога гипотезы Брауэра для собственных значений беззнакового лапласиана* произвольного графа G. Для любого $1 \leq k \leq n$ обозначим

$$S_k^+(G) = \sum_{i=1}^{k} q_i(G),$$

где $q_i(G)$ – i-е собственное значение беззнаковой матрицы Лапласа $L(G)$.

Гипотеза 3 ([4]). *Для любого целого числа* $1 \leq k \leq n$ *справедливо неравенство*

$$S_k^+(G) \leq e(G) + \binom{k+1}{2}.$$

В настоящее время данный аналог гипотезы также подтвержден для некоторых классов графов.

Мы рассматриваем данный аналог гипотезы для класса кографов. Напомним, что граф G называется *кографом*, если он может быть построен из одновершинных графов с помощью операции *дизъюнктного объединения* графов и операции *дополнения* графа. В свою очередь, *дизъюнктным объединением* двух простых графов G и H называется простой граф $G + H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$, где $V(G) \cap V(H) = \varnothing$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H. Для подмножеств вершин $K, U \subset V(G)$ обозначим через $e[K,U]$ число ребер с одной концевой вершиной из подмножества K, а с другой – из подмножества U. Через $G[K]$ обозначим граф, порожденный подмножеством вершин K.

Кографы могут быть определены *рекурсивно* следующим образом: граф G является *кографом* тогда и только тогда, когда

– G – одновершинный граф, или

– G – дизъюнктное объединение двух кографов G_1 и G_2, или

– G – соединение двух кографов G_1 и G_2.

Справедливо следующее утверждение, которое имеет место и для класса кографов.

Т е о р е м а 1. *Пусть F – произвольный класс графов, замкнутый относительно дополнения, т. е. если $G \in F$, то и $\overline{G} \in F$. Тогда если для некоторого целого числа $k \le \frac{n}{3}$ в классе графов F справедлив аналог гипотезы Брауэра для беззнакового лапласиана, то он справедлив и для целого числа $l = n - k \ge \frac{2n}{3}$.*

При доказательстве теоремы воспользуемся следующим утверждением.

Л е м м а 1 (Курант – Вейль [3]). *Пусть A и B – квадратные эрмитовы матрицы порядка n и $1 \le i,\ j \le n$. Тогда*

1) *если $i + j - 1 \le n$, то $\lambda_{i+j-1}(A+B) \le \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$;*

2) *если $i + j - 1 \ge n$, то $\lambda_{i+j-n}(A+B) \ge \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$,*

где $\lambda_i(X)$ – i-е собственное значение матрицы X, причем все они упорядочены по невозрастанию.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Так как, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2e(G),$$

то имеем

$$\sum_{i=1}^{l} q_i = 2e(G) - \sum_{i=l+1}^{n} q_i.$$

В силу леммы 1 для любого $l + 1 \le i \le n$ справедливо неравенство

$$n - 2 = q_n(K_n) \le q_i + \overline{q}_{n-i+1},$$

где $\overline{q}_j = q_j(\overline{G})\quad \forall j$. Поэтому

$$-\sum_{i=l+1}^{n} q_i \le \sum_{i=1}^{k} \overline{q}_i - (n-2)k,$$

а значит, из справедливости аналога гипотезы Брауэра для беззнакового лапласиана графа $\overline{G} \in F$ при выбранном k можно продолжить оценку суммы первых k членов спектра беззнакового лапласиана $Q(G)$:

$$\sum_{i=1}^{l} q_i \le 2e(G) + \sum_{i=1}^{k} \overline{q}_i - k(n-2) \le 2e(G) + e(\overline{G}) + \binom{k+1}{2} -$$
$$-(n-2)k = e(G) + \binom{n}{2} + \binom{k+1}{2} - k(n-2),$$

поскольку, очевидно, $e(G) + e(\overline{G}) = \binom{n}{2}$. Но легко проверить, что при $k \le \frac{n}{3}$ справедливо неравенство

$$\binom{n}{2} + \binom{k+1}{2} - k(n-2) \le \binom{l+1}{2},$$

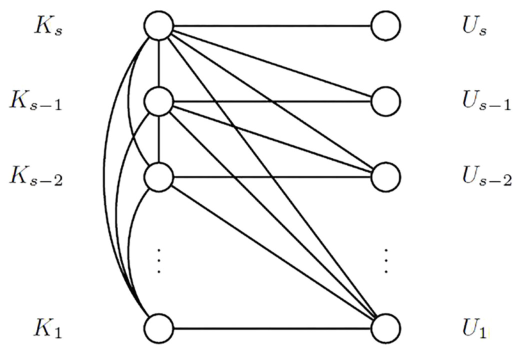
тем самым теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е. *Утверждение теоремы* 1 *справедливо для класса кографов.*

Рассмотрим далее два важных подкласса кографов: *пороговые графы* и *анти-регулярные графы*. Формальное определение порогового графа следующее.

Граф G называется *пороговым*, если существует такая (*нормированная пороговая*) взвешенная функция $f : V(G) \to \mathbb{R}$, что $\forall u,\ v \in V(G)$ выполняется условие $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $f(u) + f(v) \ge 1$.

Хорошо известно следующее полное структурное описание пороговых графов.



Общая структура порогового графа. Линии между ячейками U_i и K_j указывают, что каждая вершина из U_i смежна с каждой вершиной из K_j

The typical structure of a threshold graph. The lines between the cells U_i and K_j indicate that each vertex in U_i is adjacent to each vertex of K_j

Утверждение ([5]). *Граф G является связным пороговым графом тогда и только тогда, когда G = (K,U) – расщепляемый граф, где K – полный граф с разбиением на непустые клики* $K_1,....,K_t$ *(кодупликатные классы) и U – независимое множество вершин с разбиением на независимые множества вершин* $U_1,....,U_t$ *(дупликатные классы), причем для любой вершины* $v \in K_s$, $1 \le s \le t$ *выполняется условие* (см. рисунок)

$$N(v) = U_1 \cup ... \cup U_s.$$

Вершины полного графа K называют *универсальными*, а вершины независимого множества U – *изолированными*. Если положить $m_i = |K_i|$, $l_i = |U_i|$, $1 \le i \le t$, то данный *вложенный расщепляемый граф* обозначается через

$$G = NSG(m_1,...,m_t; l_1,...,l_t).$$

Если $m_1 = ... = m_t = l_1 = ... = l_t = 1$, то пороговый граф называется *анти-регулярным* графом *четного порядка n* = 2*t*. Если $m_1 = ... = m_t = l_2 = ... = l_t = 1$, $l_1 = 2$, то пороговый граф называется *анти-регулярным* графом *нечетного порядка n* = 2*t* + 1.

Основываясь на давно известном факте, установленном К. Фаном еще в 1949 г., в [6] было сформулировано в графовых терминах следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Лемма 2 ([6]). *Пусть G – граф порядка n и* $G_1,...,G_t$ *– его попарно непересекающиеся по ребрам подграфы порядков* $n_i = |V(G_i)|$, *причем* $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t} E(G_i)$. *Тогда для любого целого числа* $1 \le k \le n$ *справедливо неравенство*

$$S_k^+(G) \le \sum_{i=1}^{t} S_k^+(G_i),$$

где $S_k^+(G_i) = S_{n_i}^+(G_i)$, *если* $k > n_i$.

Используя данную лемму 2, докажем справедливость следующих утверждений.

Теорема 2. *Пусть G – пороговый граф, число универсальных вершин которого равно M. Тогда для любого целого числа* $k \ge 2M - 1$ *справедлив аналог гипотезы Брауэра для беззнакового лапласиана графа G.*

Доказательство теоремы 2. Напомним, что спектр беззнакового лапласиана звезды $K_{1,m}$ имеет вид $(m+1, 1^{m-1}, 0)$. Обозначим число вершин клик $K_1,....,K_t$ через $m_1,....,m_t$, а число вершин независимых множеств $U_1,....,U_t$ – через $l_1,....,l_t$ соответственно. Тогда число изолированных вершин равно $L = \sum_{i=1}^{t} l_i$, а число универсальных вершин равно $M = \sum_{i=1}^{t} m_i$. Заметим, что пороговый граф G можно представить в виде дизъюнктного объединения следующих M звезд:

$$G=\left(K_{1,l_1}+K_{1,l_1+1}+\ldots+K_{1,l_1+m_1-1}\right)+\left(K_{1,l_1+l_2+m_1}+K_{1,l_1+l_2+m_1+1}+\ldots+K_{1,l_1+l_2+m_1+m_2-1}\right)+\ldots+$$
$$+\left(K_{1,L+M-m_t}+K_{1,L+M-m_t+1}+\ldots+K_{1,L+M-1}\right). \qquad (1)$$

Тогда согласно лемме 2 и в силу уже известного спектра беззнакового лапласиана звезд имеем:

$$S_k^+(G)\le\left((l_1+1)+\ldots+(l_1+m_1)\right)+\left((l_1+l_2+m_1+1)+\ldots+(l_1+l_2+m_1+m_2)\right)+\ldots+$$
$$+\left((L+M-m_t+1)+\ldots+(L+M)\right)+M(k-1)=m_1l_1+\binom{m_1+1}{2}+m_2(l_1+l_2+m_1)+\binom{m_2+1}{2}+\ldots+$$
$$+m_t(L+M-m_t)+\binom{m_t+1}{2}+M(k-1)=\left(m_1l_1+m_2(l_1+l_2)+\ldots+m_tL\right)+\left(m_1m_2+\ldots+m_t(M-m_t)\right)+$$
$$+\left(\binom{m_1-1}{2}+\binom{m_2-1}{2}+\ldots+\binom{m_t-1}{2}\right)+M+M(k-1)=e(G)+M+M(k-1)=e(G)+kM, \qquad (2)$$

поскольку

$$m_1l_1+m_2(l_1+l_2)+\ldots+m_tL=e[K,U],$$

а

$$\left(m_1m_2+\ldots+m_t(M-m_t)\right)+\left(\binom{m_1-1}{2}+\binom{m_2-1}{2}+\ldots+\binom{m_t-1}{2}\right)=e(K_M).$$

Кроме того, поскольку U – независимое множество, а $G[K]$ – клика, то $e[K,U]+e(K_M)=e(G)$.

Осталось заметить, что $kM\le\binom{k+1}{2}$ при $k\ge 2M-1$. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть G – анти-регулярный граф четного порядка n = 2M. Тогда для любого целого числа $k\ge\frac{4M-1}{3}=\frac{2n}{3}-\frac{1}{3}$ справедлив аналог гипотезы Брауэра для беззнакового лапласиана графа G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как и в предыдущей теореме, мы представляем анти-регулярный граф G в виде дизъюнктного объединения M звезд:

$$G=K_{1,1}+K_{1,3}+K_{1,5}+\ldots+K_{1,2M-1}. \qquad (3)$$

Рассмотрим сначала случай, когда k – нечетное число: $k=2l-1$. Тогда при аккуратном применении леммы 2 в неравенстве (2) вместо слагаемого $M(k-1)$ добавятся все имеющиеся единицы спектров первых $(l-1)$ звезд $K_{1,1},K_{1,3},\ldots,K_{1,2l-3}$ плюс $(k-1)$ единиц от каждой из оставшихся звезд в дизъюнктном представлении (3) анти-регулярного графа G, т. е. слагаемое

$$\left(0+2+4+\ldots+(2l-4)\right)+(k-1)\left(M-(l-1)\right)=l^2-3l+2+(2l-2)(M-l+1)=2M(l-1)-l^2+l.$$

Поэтому неравенство (2) в данном случае будет иметь вид

$$S_k^+(G)\le e(G)+M+2M(l-1)-l^2+l=e(G)-l^2+(2M+1)l-M. \qquad (4)$$

Следовательно, для справедливости аналога гипотезы Брауэра достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-l^2+(2M+1)l-M\le\binom{k+1}{2}=l(2l-1),$$

т. е. когда

$$l\ge\frac{M+1+\sqrt{M^2-M+1}}{3},$$

а значит, когда

$$k = 2l - 1 \geq \frac{2}{3}\left(M + \sqrt{M^2 - M + 1}\right) - \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда k – четное число: $k = 2l$. Тогда в неравенстве (2) вместо слагаемого $M(k-1)$ добавятся все единицы спектров l звезд $K_{1,1}, K_{1,3}, \ldots, K_{1,2l-1}$ плюс $(k-1)$ единиц от каждой из оставшихся звезд в дизъюнктном представлении (3) анти-регулярного графа G, т. е. слагаемое

$$\left(0 + 2 + 4 + \ldots + (2l-2)\right) + (k-1)(M-l) = l^2 - l + (2l-1)(M-l) = M(2l-1) - l^2.$$

Поэтому неравенство (2) в этом случае будет иметь вид

$$S_k^+(G) \leq e(G) + M + M(2l-1) - l^2 = e(G) - l^2 + 2lM. \tag{5}$$

Следовательно, для справедливости аналога гипотезы Брауэра достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-l^2 + 2lM \leq \binom{k+1}{2} = l(2l+1),$$

т. е. в случае, когда

$$l \geq \frac{2M-1}{3},$$

а значит, когда

$$k = 2l \geq \frac{2}{3}(2M-1).$$

Осталось заметить, что справедливы неравенства

$$\frac{2}{3}(2M-1) < \frac{2}{3}\left(M + \sqrt{M^2 - M + 1}\right) - \frac{1}{3} \leq \frac{4M}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2n}{3} - \frac{1}{3},$$

тем самым теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4. *Пусть G – анти-регулярный граф нечетного порядка $n = 2M + 1$. Тогда для любого целого числа $k \geq \frac{4M}{3} = \frac{2n}{3} - \frac{2}{3}$ справедлив аналог гипотезы Брауэра для беззнакового лапласиана графа G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично представим анти-регулярный граф G уже в виде дизъюнктного объединения M звезд:

$$G = K_{1,2} + K_{1,4} + K_{1,6} + \ldots + K_{1,2M}. \tag{6}$$

Рассмотрим сначала случай, когда k – нечетное число: $k = 2l - 1$. Тогда в неравенстве (2) вместо слагаемого $M(k-1)$ добавятся все единицы спектров $(l-1)$ звезд $K_{1,2}, K_{1,4}, \ldots, K_{1,2l-2}$ плюс $(k-1)$ единиц от каждой из оставшихся звезд в дизъюнктном представлении (6) анти-регулярного графа G, т. е. слагаемое

$$\left(1 + 3 + 5 + \ldots + (2l-3)\right) + (k-1)\left(M - (l-1)\right) = l^2 - 2l + 1 + (2l-2)(M-l+1) = 2M(l-1) - l^2 + 2l - 1.$$

Поэтому неравенство (2) будет иметь вид

$$S_k^+(G) \leq e(G) + M + 2M(l-1) - l^2 + 2l - 1 = e(G) - l^2 + (2M+2)l - M - 1. \tag{7}$$

Следовательно, для справедливости аналога гипотезы Брауэра достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-l^2+(2M+2)l-M-1\le\binom{k+1}{2}=l(2l-1),$$

т. е. в случае, когда

$$l\ge\frac{2M+3+\sqrt{4M^2-3}}{6},$$

а значит, когда

$$k=2l-1\ge\frac{2M+\sqrt{4M^2-3}}{3}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда k – четное число: $k = 2l$. Тогда в неравенстве (2) вместо слагаемого $M(k-1)$ добавятся все единицы спектров $(l-1)$ звезд $K_{1,2}, K_{1,4},..., K_{1,2l-2}$ плюс $(k-1)$ единиц от каждой из оставшихся звезд в дизъюнктном представлении (6) анти-регулярного графа G, т. е. слагаемое

$$\big(1+3+...+(2l-3)\big)+(k-1)(M-l+1)=l^2-2l+1+(2l-1)(M-l+1)=M(2l-1)-l^2+l.$$

Поэтому неравенство (2) в этом случае будет иметь вид

$$S_k^+(G)\le e(G)+M+M(2l-1)-l^2+l=e(G)-l^2+2lM+l. \qquad (8)$$

Следовательно, для справедливости аналога гипотезы Брауэра достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-l^2+2lM+l\le\binom{k+1}{2}=l(2l+1),$$

т. е. в случае, когда

$$l\ge\frac{2M}{3},$$

а значит, когда

$$k=2l\ge\frac{4M}{3}.$$

Осталось заметить, что справедливо строгое неравенство

$$\frac{2M+\sqrt{4M^2-3}}{3}<\frac{4M}{3}=\frac{2n}{3}-\frac{2}{3},$$

тем самым теорема 4 доказана.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф20УКА-005).

Acknowledgments. This work was funded by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Republic of Belarus within the framework of "Convergence" State Program for Fundamental Research and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф20УКА-005).

Список использованных источников

1. Hua Bai. Grone-Merris Conjecture / Hua Bai // Trans. Amer. Math. Soc. – 2011. – Vol. 363, № 8. – P. 4463–4474. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2011-05393-6

2. Grone, R. The Laplacian Spectrum of a Graph II / R. Grone, R. Merris // SIAM J. Discr. Math. – 1994. – Vol. 7, № 2. – P. 221–229. https://doi.org/10.1137/s0895480191222653

3. Brouwer, A. E. Spectra of Graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – New York: Springer, 2012. – 250 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6

4. Ashraf, F. On the sum of signless Laplacian eigenvalues of a graph / F. Ashraf, G. R. Omidi, B. Tayfeh-Rezaie // Linear Algebra Appl. – 2013. – Vol. 438, № 11. – P. 4539–4546. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.023

5. Chvátal, V. Set-packing and threshold graphs. Technical Report Rep., CORR 73–21 / V. Chvátal, P. L. Hammer; Comp. Sci. Dept. Univ. of Waterloo. – Ontario, 1973.

6. Jieshan Yang. On a conjecture for the signless Laplacian eigenvalues / Jieshan Yang, Lihua You // Linear Algebra Appl. – 2014. – Vol. 446. – P. 115–132. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.12.032

References

1. Bai H. Grone-Merris Conjecture. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2011, vol. 363, no. 8, pp. 4463–4474. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2011-05393-6

2. Grone R., Merris R. The Laplacian Spectrum of a Graph II. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1994, vol. 7, no. 2, pp. 221–229. https://doi.org/10.1137/s0895480191222653

3. Brouwer A. E., Haemers W. H. *Spectra of Graphs*. New York, Springer, 2012. 250 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6

4. Ashraf F., Omidi G. R., Tayfeh-Rezaie B. On the sum of signless Laplacian eigenvalues of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, vol. 438, no. 11, pp. 4539–4546. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.023

5. Chvátal V., Hammer P. L. *Set-packing and threshold graphs. Technical Report Rep., CORR 73–21.* Ontario, 1973.

6. Yang, J., You L. On a conjecture for the signless Laplacian eigenvalues. *Linear Algebra and its Applications*, 2014, vol. 446, pp. 115–132. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.12.032

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by