ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 539.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-335-349

Поступила в редакцию 11.06.2020
Received 11.06.2020

А. В. Ивашкевич[1], Я. А. Войнова[2], Е. М. Овсиюк[3], В. В. Кисель[4], В. М. Редьков[1]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Минское суворовское военное училище, Минск, Беларусь
[3]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь
[4]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 3/2: ТЕОРИЯ ПАУЛИ – ФИРЦА, НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Аннотация. Хорошо известно уравнение для частицы со спином 3/2, предложенное В. Э. Паули и М. Э. Фирцем и основанное на использовании 16-компонентной волновой функции с трансформационными свойствами вектор-биспинора. В настоящей работе исследован вопрос о нерелятивистском приближении в этой теории. Исходя из формализма уравнений 1-го порядка и представления системы уравнений Паули – Фирца в базисе Петраша с использованием метода обобщенных символов Кронекера и элементов полной матричной алгебры, а также применяя для разложения волновой функции на большие и малые составляющие метод проективных операторов, выведено уравнение паулиевского типа для 4-компонентной волновой функции, описывающей нерелятивистскую частицу со спином 3/2.

Ключевые слова: спин 3/2, теория Паули – Фирца, базис Петраша, проективные операторы, нерелятивистское приближение, взаимодействие с электромагнитными полями

Для цитирования. Частица со спином 3/2: теория Паули – Фирца, нерелятивистское приближение / А. В. Ивашкевич [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 335–349. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-335-349

Alina V. Ivashkevich[1], Yanina A. Voynova[2], Elena M. Ovsiyuk[3], Vasily V. Kisel[4], Viktor M. Red'kov[1]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Minsk Suvorov Military School, Minsk, Belarus
[3]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus
[4]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

SPIN 3/2 PARTICLE: PAULI – FIERZ THEORY, NON-RELATIVISTIC APPROXIMATION

Abstract. The relativistic wave equation is well-known for a spin 3/2 particle proposed by W. E. Pauli and M. E. Fierz and based on the 16-component wave function with the transformation properties of the vector-bispinor. In this paper, we investigated the nonrelativistic approximation in this theory. Starting with the first-order equation formalism and representation of Pauli – Fierz equation in the Petras basis, also applying the method of generalized Kronecker symbols and elements of the complete matrix algebras, and decomposing the wave function into large and small nonrelativistic constituents with the help of projective operators, we have derived a Pauli-like equation for the 4-component wave function describing the non-relativistic particle with a 3/2 spin.

Keywords: 3/2 spin, Pauli – Fierz theory, Petras basis, projective operators, nonrelativistic approximation, interaction with external field

For citation. Ivashkevich A. V., Voynova Ya. A., Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spin 3/2 particle: Puali – Fierz theory, non-relativistic approximation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 335–349 (in Russian).. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-335-349

Введение. В рамках теории релятивистских волновых уравнений, помимо простейших и широко известных для частиц со спинами 0, 1/2, 1, 3/2, 2, могут быть предложены и более сложные уравнения. Такие обобщения основываются на использовании расширенных наборов представлений группы Лоренца. Например, известны уравнения для частиц с несколькими массовыми параметрами, с несколькими спинами, с дополнительными электромагнитными характеристиками: аномальным магнитным моментом, электрическим квадрупольным моментом, поляризуемостью, со структурой Дарвина – Кокса и др. (см. в [1–18]). Эти дополнительные характеристики проявляют себя физически в присутствии внешних полей, например электромагнитных и гравитационных. В частности, в рамках такой обобщенной теории релятивистских волновых уравнений первого порядка $(\Gamma_\mu \partial_\mu + M)\Phi = 0$, Е. С. Фрадкиным [8, 18] была предложена обобщенная теория частицы со спином 3/2. В настоящее время не совсем понятно, какую именно дополнительную физическую характеристику позволяет описывать эта теория. Часто физическая интерпретация таких дополнительных характеристик оказывается проще при обращении к соответствующим нерелятивистским уравнениям. Поэтому в данной работе мы обращаемся к нерелятивистскому приближению в случае простейшего уравнения для частицы со спином 3/2, предложенного В. Э. Паули и М. Э. Фирцем [3, 4], которое основано на 16-компонентной волновой функции с трансформационными свойствами вектор-биспинора.

В настоящей работе систематически исследован вопрос о нерелятивистском приближении в этой теории. Исходим из формализма уравнений 1-го порядка и представления системы уравнений Паули – Фирца в базисе Петраша [11]. Используется метод обобщенных символов Кронекера и элементов полной матричной алгебры при разложении волновой функции на большие и малые (нерелятивистские) составляющие, применяется метод проективных операторов [12]. В результате выведено уравнение паулиевского типа для 4-компонентной волновой функции, описывающей нерелятивистскую частицу со спином 3/2.

Базис Петраша, проективные операторы. Исходим из известного представления системы уравнений 1-го порядка для частицы со спином 3/2 в базисе Петраша [11]:

$$\left[(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu + M\delta_{\alpha\beta}\right]\Psi_\beta = 0, \quad (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} = \gamma_\mu\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma_\alpha\delta_{\beta\mu} - \gamma_\beta\delta_{\alpha\mu}); \tag{1}$$

явный вид матриц Дирака γ_μ будет приведен ниже. В дальнейшем важную роль будет играть матрица Γ_4:

$$(\Gamma_4)_{\alpha\beta} = \gamma_4\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma_\alpha\delta_{\beta 4} - \gamma_\beta\delta_{\alpha 4}). \tag{2}$$

Для выполнения вычислений удобным оказывается использование аппарата элементов полной матричной алгебры [12], напомним определение этих величин:

$$(e^{A,B})_{CD} = \delta_C^A\delta_D^B, \quad e^{A,K}e^{L,B} = \delta_{KL}e^{A,B}. \tag{3}$$

Фактически $e^{A,B}$ – это матрица с единственным ненулевым элементом (равным 1) на пересечении строки A со столбцом B. Тогда матрицы Γ_μ можно записать в безындексном виде как

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\rho \otimes (e^{\rho,\mu} - e^{\mu,\rho}). \tag{4}$$

Будем искать минимальное уравнение для матрицы Γ_4:

$$\Gamma_4 = \gamma_4 \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\rho \otimes (e^{\rho,4} - e^{4,\rho}); \tag{5}$$

в (5) подразумевается суммирование по индексу ρ; в формуле (5) член при $\rho = 4$ вклада не дает:

$$\Gamma_4 = \gamma_4 \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_a \otimes (e^{a,4} - e^{4,a}), \quad a = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Вычисляем квадрат матрицы

$$\Gamma_4^2 = \left[\gamma_4 \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_a \otimes (e^{a,4} - e^{4,a})\right]\left[\gamma_4 \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_b \otimes (e^{b,4} - e^{4,b})\right] =$$

$$= I \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma^4\gamma_b \otimes (e^{b,4} - e^{4,b}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_a\gamma_4 \otimes (e^{a,4} - e^{4,a}) + \frac{1}{3}\gamma_a\gamma_b \otimes (e^{a,4} - e^{4,a})(e^{b,4} - e^{4,b}) =$$

$$= I \otimes I + 0 + \frac{1}{3}\gamma_a\gamma_b \otimes [-e^{a,b} - \delta_{ab}e^{4,4}] = I \otimes e^{a,a} - \frac{1}{3}\gamma_a\gamma_b \otimes e^{a,b}. \tag{7}$$

Действуя аналогично, находим

$$\Gamma_4^3 = \gamma_4 \otimes e^{b,b} - \frac{1}{3}\gamma_4\gamma_b\gamma_c \otimes e^{b,c}, \qquad \Gamma_4^4 = \Gamma_4^2. \tag{8}$$

Таким образом, нужное минимальное уравнение имеет вид

$$\Gamma_4^2(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \tag{9}$$

Учитывая уравнение (9), можно убедиться в существовании проективных операторов:

$$P_+ = +\frac{1}{2}\Gamma_4^2(\Gamma_4 + 1), P_+^2 = P_+; \quad P_- = -\frac{1}{2}\Gamma_4^2(\Gamma_4 - 1), P_-^2 = P_-; \quad P_+ + P_- = \Gamma_4^2; \tag{10}$$

$$P_0 = 1 - \Gamma_4^2, \quad P_0^2 = P_0, \quad P_+ + P_- + P_0 = 1. \tag{11}$$

Найдем явный вид этих трех операторов:

$$P_+ = \frac{1}{2}\left\{(1+\gamma_4) \otimes e^{a,a} - \frac{1}{3}(1+\gamma_4)\gamma_a\gamma_b \otimes e^{a,b}\right\}, \quad P_- = \frac{1}{2}\left\{(1-\gamma_4) \otimes e^{a,a} - \frac{1}{3}(1-\gamma_4)\gamma_a\gamma_b \otimes e^{a,b}\right\},$$

$$P_0 = I \otimes e^{4,4} + \frac{1}{3}\gamma_a\gamma_b \otimes e^{a,b}. \tag{12}$$

Они позволяют представить волновую функцию в виде суммы трех частей:

$$\Psi_+ = P_+\Psi, \quad \Psi_- = P_-\Psi, \quad \Psi_0 = P_0\Psi;$$

$$(P_+\Psi)_C = \frac{1}{2}\left\{(1+\gamma_4) \otimes \delta_{Ca}\delta_{aD} - \frac{1}{3}(1+\gamma_4)\gamma_a\gamma_b \otimes \delta_{Ca}\delta_{bD}\right\}\Psi_D =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(1+\gamma_4)\delta_{Ca}\Psi_a - \frac{1}{3}(1+\gamma_4)\gamma_c\gamma_b\delta_{Ca}\Psi_b\right\}, \quad C = 1,2,3,4 = c,4;$$

т. е.

$$(P_+\Psi)_c = \frac{1}{2}\left\{(1+\gamma_4)\Psi_c - \frac{1}{3}(1+\gamma_4)\gamma_c\gamma_b\Psi_b\right\}, \quad (P_+\Psi)_4 = 0. \tag{13}$$

Аналогично получаем

$$(P_-\Psi)_c = \frac{1}{2}\left\{(1-\gamma_4)\Psi_c - \frac{1}{3}(1-\gamma_4)\gamma_c\gamma_b\Psi_b\right\}, \quad (P_-\Psi)_4 = 0;$$

$$(P_0\Psi)_c = \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b, \qquad (P_0\Psi)_4 = \Psi_4. \tag{14}$$

Таким образом, для трех частей волновой функции находим следующие представления:

$$\Psi^{(+)} = \frac{1}{2}(1+\gamma_4)\begin{vmatrix} \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_c\Psi_c^{(+)} \equiv 0,$$

$$\Psi^{(-)} = \frac{1}{2}(1-\gamma_4)\begin{vmatrix} \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_c\Psi_c^{(-)} \equiv 0, \tag{15}$$

$$\Psi^{(0)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ \Psi_4 \end{vmatrix}, \quad \Psi_c^{(0)} - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k\Psi_k^{(0)} \equiv 0.$$

Теперь обращаемся к уравнению (1) (при этом дополнительно учитываем электромагнитное поле)

$$(\Gamma_\mu D_\mu + M)\Psi = 0, \quad \left\{ D_\mu \left[\gamma_\mu \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_\rho \otimes (e^{\rho,\mu} - e^{\mu,\rho}) \right] + M \right\} \Psi = 0.$$

В более детальном виде (пишем векторный индекс при волновой функции $\Psi = (\Psi_\nu)$) имеем

$$\gamma_\mu D_\mu \Psi_A + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_A D_\mu \Psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{3}} D_A \gamma_\nu \Psi_\nu + M\Psi_A = 0.$$

Разбиваем последнее уравнение на две группы:

$$A = k = 1,2,3, \quad \gamma_\mu D_\mu \Psi_k + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_k D_\mu \Psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{3}} D_k \gamma_\nu \Psi_\nu + M\Psi_k = 0; \tag{16}$$

$$A = 4, \quad \gamma_\mu D_\mu \Psi_4 + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_4 D_\mu \Psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{3}} D_4 \gamma_\nu \Psi_\nu + M\Psi_4 = 0. \tag{17}$$

Проводим (3+1)-расщепление в уравнении (16):

$$(\gamma_a D_a + \gamma_4 D_4)\Psi_k + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_k (D_a \Psi_a + D_4 \Psi_4) - \frac{1}{\sqrt{3}} D_k (\gamma_a \Psi_a + \gamma_4 \Psi_4) + M\Psi_k = 0.$$

Умножаем его на γ_k:

$$\gamma_k (\gamma_a D_a + \gamma_4 D_4)\Psi_k + \sqrt{3}(D_a \Psi_a + D_4 \Psi_4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_k D_k (\gamma_a \Psi_a + \gamma_4 \Psi_4) + M\gamma_k\Psi_k = 0,$$

а затем умножаем полученное на $\frac{1}{3}\gamma_c$:

$$\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k (\gamma_a D_a + \gamma_4 D_4)\Psi_k + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c (D_a \Psi_a + D_4 \Psi_4) -$$

$$- \frac{1}{3\sqrt{3}}\gamma_c\gamma_k D_k (\gamma_a \Psi_a + \gamma_4 \Psi_4) + M\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k\Psi_k = 0. \tag{18}$$

Теперь вычтем из (16) уравнение (18):

$$M\left(\Psi_c - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k\Psi_k \right) + (\gamma_a D_a + \gamma_4 D_4)\Psi_c - \frac{1}{\sqrt{3}} D_c (\gamma_a \Psi_a + \gamma_4 \Psi_4) -$$

$$- \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k (\gamma_a D_a + \gamma_4 D_4)\Psi_k + \frac{1}{3\sqrt{3}}\gamma_c\gamma_k D_k (\gamma_a \Psi_a - \gamma_4 \Psi_4) = 0. \tag{19}$$

Умножим это уравнение на $\frac{1}{2}(1+\gamma_4)$ (см. (15)), в результате получим уравнение, в которое входят три составляющие полной волновой функции $M\Psi_c^{(+)}$:

$$M\Psi_c^{(+)} + \gamma_a D_a \left[\Psi_c^{(-)} + \frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Psi_c^{(0)} \right] + D_4 \left[\Psi_c^{(+)} + \frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_c^{(0)} \right] -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}} D_c \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)(\gamma_a \Psi_a^{(0)}) + \frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_4^{(0)} \right] -$$

$$-\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k\gamma_a D_a\left[\Psi_k^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Psi_k^{(0)}\right]-\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k D_4\left[\Psi_k^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_k^{(0)}\right]+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\gamma_c\gamma_k D_k\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_4^{(0)}\right]=0. \quad (20)$$

С учетом тождеств $\gamma_c\gamma_k\gamma_a=\gamma_c(-\gamma_a\gamma_k+2\delta_{ka})$ и $\gamma_k\Psi_k^{(+)}=0,\ \gamma_k\Psi_k^{(-)}=0$ получаем

$$M\Psi_c^{(+)}+\gamma_a D_a\left[\Psi_c^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Psi_c^{(0)}\right]+D_4\left[\Psi_c^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_c^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_4^{(0)}\right]+\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_a\gamma_k D_a\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Psi_k^{(0)}-$$

$$-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\left[\Psi_k^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Psi_k^{(0)}\right]-\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k D_4\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_k^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\gamma_c\gamma_k D_k\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Psi_4^{(0)}\right]=0.$$

Учитывая равенство (см. (15))

$$D_4\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left\{\Psi_c^{(0)}-\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k\Psi_k^{(0)}\right\}\equiv 0,$$

приходим к уравнению

$$M\Psi_c^{(+)}+D_4\Psi_c^{(+)}+D_a\gamma_a\Psi_c^{(-)}+D_a\gamma_a\frac{1-\gamma_4}{2}\Psi_c^{(0)}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1+\gamma_4}{2}\Psi_4^{(0)}+\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_a D_a\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_k\Psi_k^{(0)}\right)-$$

$$-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\Psi_k^{(-)}-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\frac{1-\gamma_4}{2}\Psi_k^{(0)}+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1+\gamma_4}{2}\Psi_4^{(0)}=0.$$

Откуда после перегруппировки членов находим

$$M\Psi_c^{(+)}+D_4\Psi_c^{(+)}+D_a\gamma_a\Psi_c^{(-)}-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\Psi_k^{(-)}+$$

$$+D_a\gamma_a\frac{1-\gamma_4}{2}\Psi_c^{(0)}-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1+\gamma_4}{2}\Psi_4^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3}D_a\gamma_c\gamma_a\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_k\Psi_k^{(0)}\right)-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\frac{1-\gamma_4}{2}\Psi_k^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1+\gamma_4}{2}\Psi_4^{(0)}=0 \quad (21)$$

– это результат преобразования уравнения (19). Выделяем энергию покоя подстановкой $\Psi^{(q)}=e^{-Mx_4}\Phi^{(q)}$, в результате из (21) получим уравнение

$$D_4\Phi_c^{(+)}+D_a\gamma_a\Phi_c^{(-)}-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\Phi_k^{(-)}+D_a\gamma_a\frac{1-\gamma_4}{2}\Phi_c^{(0)}-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1+\gamma_4}{2}\Phi_4^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3}D_a\gamma_c\gamma_a\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_k\Phi_k^{(0)}\right)-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\frac{1-\gamma_4}{2}\Phi_k^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1+\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1+\gamma_4}{2}\Phi_4^{(0)}=0. \tag{22}$$

Теперь нужно умножить уравнение (19) на матрицу $\frac{1}{2}(1-\gamma_4)$. Выполнив аналогичные предыдущим вычисления, вместо (21) находим (похожее, но другое) уравнение

$$M\Psi_c^{(-)}-D_4\Psi_c^{(-)}+D_a\gamma_a\Psi_c^{+}-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\Psi_k^{(+)}+$$

$$+D_a\gamma_a\frac{1+\gamma_4}{2}\Psi_c^{(0)}-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1-\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1-\gamma_4}{2}\Psi_4^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3}D_a\gamma_c\gamma_a\frac{1-\gamma_4}{2}\left(\gamma_k\Psi_k^{(0)}\right)-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\frac{1+\gamma_4}{2}\Psi_k^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1-\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)}\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1-\gamma_4}{2}\Psi_4^{(0)}=0. \tag{23}$$

Выделяем энергию покоя подстановкой $\Psi^{(q)}=e^{-Mx_4}\Phi^{(q)}$, в результате получим

$$2M\Phi_c^{(-)}-D_4\Phi_c^{(-)}+D_a\gamma_a\Phi_c^{(+)}-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\Phi_k^{(+)}+$$

$$+D_a\gamma_a\frac{1+\gamma_4}{2}\Phi_c^{(0)}-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1-\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\frac{1-\gamma_4}{2}\Phi_4^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3}D_a\gamma_c\gamma_a\frac{1-\gamma_4}{2}\left(\gamma_k\Phi_k^{(0)}\right)-\frac{2}{3}\gamma_c D_k\frac{1+\gamma_4}{2}\Phi_k^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1-\gamma_4}{2}\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\frac{1-\gamma_4}{2}\Phi_4^{(0)}=0. \tag{24}$$

Согласно общей теории при проведении процедуры нерелятивистского приближения следует рассматривать компоненты $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(0)}$ как малые в сравнении с $\Phi^{(+)}$. Также следует пренебрегать нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя: $2M\Phi_c^{(-)}-D_4\Phi_c^{(-)}\approx 2M\Phi_c^{(-)}$, тогда из (24) получаем выражение малой компоненты через большую:

$$\Phi_c^{(-)}=-\frac{1}{2M}\left(D_a\gamma_a\Phi_c^{(+)}-\frac{2}{3}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}\right). \tag{25}$$

Обращаемся к уравнению (17), после приведения подобных оно дает

$$(\gamma_a D_a+\gamma_4 D_4)\Psi_4+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_4 D_a\Psi_a-\frac{1}{\sqrt{3}}D_4(\gamma_a\Psi_a+M\Psi_4)=0.$$

После дополнительного преобразования (учитываем тождество $\gamma_a\Psi_a=\gamma_a\Psi_a^{(0)}$) получаем

$$(\gamma_a D_a+\gamma_4 D_4)\Psi_4^{(0)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_4 D_a\left(\Psi_a^{(+)}+\Psi_a^{(-)}+\Psi_a^{(0)}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}D_4\gamma_a\Psi_a^{(0)}+M\Psi_4^{(0)}=0.$$

Выделяем энергию покоя подстановкой $\Psi^{(q)}=e^{-Mx_4}\Phi^{(q)}$, в результате получаем следующее уравнение (учитывая тождества $\gamma_4\Psi_a^{(+)}=\Psi_a^{(+)}$, $\gamma_4\Psi_a^{(-)}=-\Psi_a^{(-)}$):

$$\gamma_a D_a\Phi_4^{(0)}+(-M\gamma_4+\gamma_4 D_4)\Phi_4^{(0)}+\frac{1}{\sqrt{3}}D_a\left(\Phi_a^{(+)}-\Phi_a^{(-)}+\gamma_4\Phi_a^{(0)}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}(-M+D_4)\gamma_a\Phi_a^{(0)}+M\Phi_4^{(0)}=0.$$

Отбрасывая малые члены на фоне больших, находим

$$(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_a\Phi_a^{(0)} = -\frac{1}{M\sqrt{3}}D_a\Phi_a^{(+)}. \quad (26)$$

Таким образом, уже имеем три уравнения (22), (25), (26) соответственно со следующей структурой зацепления функций:

$$\Phi_c^{(+)}, \Phi_c^{(-)}, \Phi_c^{(0)}, \Phi_4^{(0)}; \qquad \Phi_c^{(-)}, \Phi_c^{(+)}; \qquad \Phi_c^{(0)}, \Phi_4^{(0)}, \Phi_c^{(+)}.$$

Остается получить еще одно нерелятивистское уравнение, связывающее компоненты $\Phi_c^{(0)}$, $\Phi_4^{(0)}$ с переменной $\Phi_a^{(+)}$, тогда в (22) можно будет исключить все малые компоненты, получив нужное нерелятивистское уравнение для большой компоненты $\Phi_a^{(+)}$.

Для этого обратимся к уравнению (26):

$$M\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k\Psi_k - \frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k(\gamma_a\Psi_a + \gamma_4\Psi_4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c(D_a\Psi_a + D_4\Psi_4) +$$
$$+\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k(\gamma_a D_a + \gamma_4 D_4)\Psi_k = 0,$$

которое можно переписать иначе:

$$M\Psi_c^{(0)} - \frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\left(\gamma_a\Psi_a^{(0)} + \gamma_4\Psi_4^{(0)}\right) +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c D_a\left(\Psi_a^{(+)} + \Psi_a^{(-)} + \Psi_a^{(0)}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c D_4\Psi_4^{(0)} +$$
$$+\frac{1}{3}D_a\gamma_c\gamma_k\gamma_a\left(\Psi_k^{(+)} + \Psi_k^{(-)} + \Psi_k^{(0)}\right) + D_4\gamma_4\Psi_c^{(0)} = 0.$$

Выделяем энергию покоя подстановкой $\Psi^{(q)} = e^{-Mx_4}\Phi^{(q)}$, в результате получаем следующее уравнение (при этом учитываем тождество $\frac{1}{3}\gamma_k\gamma_a\Psi_a^{(0)} = \Psi_k^{(0)}$):

$$M\Psi_c^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{3}}D_k\gamma_c\Psi_k^{(0)} - \frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_4\gamma_c\gamma_k\Psi_4^{(0)} +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c D_a\left(\Psi_a^{(+)} + \Psi_a^{(-)} + \Psi_a^{(0)}\right) - \frac{M}{\sqrt{3}}\gamma_c\Phi_4^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c D_4\Psi_4^{(0)} +$$
$$+\frac{1}{3}D_a\gamma_c\gamma_k\gamma_a\left(\Psi_k^{(+)} + \Psi_k^{(-)} + \Psi_k^{(0)}\right) - M\gamma_4\Psi_c^{(0)} + D_4\gamma_4\Psi_c^{(0)} = 0.$$

Совершаем в последнем уравнении нерелятивистское приближение, пренебрегая сначала очевидно малыми составляющими:

$$M\Psi_c^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{3}}D_k\gamma_c\Psi_k^{(0)} - \frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_4\gamma_c\gamma_k\Psi_4^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}D_k\gamma_c\Psi_k^{(+)} -$$
$$-\frac{M}{\sqrt{3}}\gamma_c\Phi_4^{(0)} + \frac{2}{3}D_k\gamma_c\Psi_k^{(+)} - M\gamma_4\Psi_c^{(0)} = 0.$$

Затем, пренебрегая малыми членами, находим нужное соотношение, позволяющее выразить $\Psi_c^{(0)}$ через большие составляющие:

$$(1-\gamma_4)\Psi_c^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c\Phi_4^{(0)} = -\frac{1}{M}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}D_k\gamma_c\Psi_k^{(+)} + \frac{2}{3}D_k\gamma_c\Psi_k^{(+)}\right). \quad (27)$$

Удобно умножить последнее уравнение на γ_c, что дает

$$(1+\gamma_4)\left(\gamma_c\Psi_c^{(0)}\right)-\sqrt{3}\Phi_4^{(0)}=-\frac{1}{M}\left(\sqrt{3}+2\right)D_k\Psi_k^{(+)}. \qquad (28)$$

Рядом выпишем уравнения (25) и (26):

$$\gamma_a\Phi_a^{(0)}=-\frac{1}{M}D_a\Phi_a^{(+)}-\sqrt{3}(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}, \qquad (29)$$

$$\Phi_c^{(-)}=-\frac{1}{2M}\left(D_a\gamma_a\Phi_c^{(+)}-\frac{2}{3}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}\right). \qquad (30)$$

Подставляя (29) в (28), получаем

$$\Phi_4^{(0)}=\frac{1}{M}D_a\Phi_a^{(+)}. \qquad (31)$$

Если учесть (31) в (27), то находим

$$(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)}=-\frac{1}{M}\frac{2}{3}D_a\gamma_c\Phi_a^{(+)}, \qquad \gamma_a\Phi_a^{(0)}=-\frac{1}{M}D_a\Phi_a^{(+)}. \qquad (32)$$

Теперь известны соотношения (30) и (32), позволяющие исключить из уравнения (22) все малые компоненты. После необходимых вычислений с учетом $D_aD_b-D_bD_a=ieF_{ab}$ найдем следующее уравнение для $\Phi_c^{(+)},\ c=1,2,3$:

$$\partial_4\Phi_c^{(+)}=\frac{1}{2M}D_aD_a\Phi_c^{(+)}-\frac{ie}{3M}\left\{\frac{3}{4}F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)}+F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}\right\}. \qquad (33)$$

Это нерелятивистское уравнение для частицы со спином 3/2. С учетом того, что c = 1, 2, 3, а биспинорные индексы при каждой компоненте подразумеваются, в (33) имеем 12 уравнений. В следующем разделе покажем, что фактически в (33) есть только 4 разных уравнения.

Анализ структуры уравнения Паули. В детальной форме уравнение (33) записывается так (далее круглые скобки при символе «+» опускаем):

$$D_4\Phi_c^+-\frac{1}{2M}D^2\Phi_c^++\frac{ie}{3M}\Big\{(3/2)\left[F_{12}\gamma_1\gamma_2+F_{31}\gamma_3\gamma_1+F_{23}\gamma_2\gamma_3\right]\Phi_c^++$$
$$+F_{12}\gamma_c\left[\gamma_1\Phi_2^+-\gamma_1\Phi_1^+\right]+F_{31}\gamma_c\left[\gamma_3\Phi_1^+-\gamma_1\Phi_3^+\right]+F_{23}\gamma_c\left[\gamma_2\Phi_3^+-\gamma_3\Phi_2^+\right]\Big\}=0. \qquad (34)$$

Поскольку c = 1, 2, 3, то в (34) имеем три уравнения:

$$D_4\Phi_1^+-\frac{1}{2M}D^2\Phi_1^++\frac{ie}{3M}\Big\{(3/2)\left[F_{12}\gamma_1\gamma_2+F_{31}\gamma_3\gamma_1+F_{23}\gamma_2\gamma_3\right]\Phi_1^++$$
$$+F_{12}\left[\Phi_2^+-\gamma_1\gamma_2\Phi_1^+\right]+F_{31}\left[-\gamma_3\gamma_1\Phi_1^+-\Phi_3^+\right]+F_{23}\left[\gamma_1\gamma_2\Phi_3^++\gamma_3\gamma_1\Phi_2^+\right]\Big\}=0; \qquad (35)$$

$$D_4\Phi_2^+-\frac{1}{2M}D^2\Phi_2^++\frac{ie}{3M}\Big\{(3/2)[F_{12}\gamma_1\gamma_2+F_{31}\gamma_3\gamma_1+F_{23}\gamma_2\gamma_3]\Phi_2^++$$
$$+F_{12}\left[-\gamma_1\gamma_2\Phi_2^+-\Phi_1^+\right]+F_{31}\left[\gamma_2\gamma_3\Phi_1^++\gamma_1\gamma_2\Phi_3^+\right]+F_{23}\left[\Phi_3^+-\gamma_2\gamma_3\Phi_2^+\right]\Big\}=0; \qquad (36)$$

$$D_4\Phi_3^+-\frac{1}{2M}D^2\Phi_3^++\frac{ie}{3M}\Big\{(3/2)[F_{12}\gamma_1\gamma_2+F_{31}\gamma_3\gamma_1+F_{23}\gamma_2\gamma_3]\Phi_3^++$$
$$+F_{12}\left[\gamma_3\gamma_1\Phi_2^++\gamma_2\gamma_3\Phi_1^+\right]+F_{31}\left[\Phi_1^+-\gamma_3\gamma_1\Phi_3^+\right]+F_{23}\left[\gamma_2\gamma_3\Phi_3^+-\Phi_2^+\right]\Big\}=0. \qquad (37)$$

Учтем формулу (15)

$$\Phi_k^+ = \frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left[\Phi_k - \frac{1}{3}\gamma_k(\gamma_a\Phi_a)\right],$$

которая дает три соотношения

$$\Phi_1^+ = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)[2\Phi_1 - \gamma_1\gamma_2\Phi_2 + \gamma_3\gamma_1\Phi_3], \quad \Phi_2^+ = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)[2\Phi_2 + \gamma_1\gamma_2\Phi_1 - \gamma_2\gamma_3\Phi_3],$$

$$\Phi_3^+ = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)[2\Phi_3 - \gamma_3\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\gamma_3\Phi_2]. \tag{38}$$

Ниже потребуется явный вид следующих матриц:

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix}, \quad \gamma_2\gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_3\gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

С учетом этих равенств находим (первый индекс – 4-спинорный, второй – 3-векторный)

$$\Phi_1^+ = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)\left(2\begin{vmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \\ \Phi_{41} \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} \Phi_{12} \\ -\Phi_{22} \\ \Phi_{32} \\ -\Phi_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{23} \\ -\Phi_{13} \\ \Phi_{43} \\ -\Phi_{33} \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)\begin{vmatrix} 2\Phi_{11} + i\Phi_{12} + \Phi_{23} \\ 2\Phi_{21} - i\Phi_{22} - \Phi_{13} \\ 2\Phi_{31} + i\Phi_{32} + \Phi_{43} \\ 2\Phi_{41} - i\Phi_{42} - \Phi_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2(\Phi_{11}+\Phi_{31}) + i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) + (\Phi_{23}+\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{21}+\Phi_{41}) - i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) - (\Phi_{13}+\Phi_{33}) \\ 2(\Phi_{11}+\Phi_{31}) + i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) + (\Phi_{23}+\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{21}+\Phi_{41}) - i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) - (\Phi_{13}+\Phi_{33}) \end{vmatrix};$$

$$\Phi_2^+ = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)\left(2\begin{vmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \\ \Phi_{42} \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} -\Phi_{12} \\ \Phi_{21} \\ -\Phi_{31} \\ \Phi_{41} \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} \Phi_{23} \\ \Phi_{13} \\ \Phi_{43} \\ \Phi_{33} \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)\begin{vmatrix} 2\Phi_{12} - i\Phi_{11} + i\Phi_{23} \\ 2\Phi_{22} + i\Phi_{21} + i\Phi_{13} \\ 2\Phi_{32} - i\Phi_{31} + i\Phi_{43} \\ 2\Phi_{42} + i\Phi_{41} + i\Phi_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2(\Phi_{12}+\Phi_{32}) - i(\Phi_{11}-\Phi_{23}+\Phi_{31}-\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{22}+\Phi_{42}) + i(\Phi_{21}+\Phi_{41}+\Phi_{13}+\Phi_{33}) \\ 2(\Phi_{12}+\Phi_{32}) - i(\Phi_{11}-\Phi_{23}+\Phi_{31}-\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{22}+\Phi_{42}) + i(\Phi_{21}+\Phi_{41}+\Phi_{13}+\Phi_{33}) \end{vmatrix};$$

$$\Phi_3^+ = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)\left(2\begin{vmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \\ \Phi_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Phi_{21} \\ -\Phi_{11} \\ \Phi_{41} \\ -\Phi_{31} \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} \Phi_{22} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{42} \\ \Phi_{32} \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)\begin{vmatrix} 2\Phi_{13} - i\Phi_{21} - i\Phi_{22} \\ 2\Phi_{23} + \Phi_{11} - i\Phi_{12} \\ 2\Phi_{33} - \Phi_{41} - i\Phi_{42} \\ 2\Phi_{43} + \Phi_{31} - i\Phi_{32} \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2(\Phi_{13}+\Phi_{33})-(\Phi_{21}+\Phi_{41})-i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) \\ 2(\Phi_{23}+\Phi_{43})+(\Phi_{11}+\Phi_{31})-i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) \\ 2(\Phi_{13}+\Phi_{33})-(\Phi_{21}+\Phi_{41})-i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) \\ 2(\Phi_{23}+\Phi_{43})+(\Phi_{11}+\Phi_{31})-i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) \end{vmatrix}.$$

Отмечаем совпадение строк в трех столбцах Φ_c^+ (первый биспинорный индекс нумерует строку матрицы; второй индекс задает значения c = 1, 2, 3, заключаем его в скобки)

$$\Phi^+_{1(1)}=\Phi^+_{3(1)}, \qquad \Phi^+_{2(1)}=\Phi^+_{4(1)},$$
$$\Phi^+_{1(2)}=\Phi^+_{3(2)}, \qquad \Phi^+_{2(2)}=\Phi^+_{4(2)}, \tag{39}$$
$$\Phi^+_{1(3)}=\Phi^+_{3(3)}, \qquad \Phi^+_{2(3)}=\Phi^+_{4(3)}.$$

Это означает, что у нерелятивистской волновой функции имеем уже не 12, а только 6 разных компонент. Убеждаемся, что для шести разных строк выполняются два тождества:

$$\Phi^+_{1(1)}-i\Phi^+_{1(2)}=$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(\Phi_{11}+\Phi_{31})+i(\Phi_{12}+\Phi_{32})+(\Phi_{23}+\Phi_{43})-2i(\Phi_{12}+\Phi_{32})-(\Phi_{11}-\Phi_{23})+(\Phi_{31}-\Phi_{43})\right]=$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(\Phi_{23}+\Phi_{43})+(\Phi_{11}+\Phi_{31})-i(\Phi_{12}+\Phi_{32})\right]=\Phi^+_{2(3)};$$
$$\Phi^+_{2(1)}+i\Phi^+_{2(2)}=$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(\Phi_{21}+\Phi_{41})-i(\Phi_{22}+\Phi_{42})-(\Phi_{13}+\Phi_{33})+2i(\Phi_{22}+\Phi_{42})-(\Phi_{21}+\Phi_{41})+(\Phi_{13}+\Phi_{33})\right]=$$
$$=\frac{1}{6}\left[-2(\Phi_{13}+\Phi_{33})+(\Phi_{21}+\Phi_{41})+i(\Phi_{22}+\Phi_{42})\right]=-\Phi^+_{1(3)};$$

которые можно записать так:

$$\Phi_1^+=\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\end{vmatrix}, \quad \Phi_2^+=\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{vmatrix}, \quad \Phi_3^+=\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(3)}\\ \Phi^+_{2(3)}\\ \Phi^+_{1(3)}\\ \Phi^+_{2(3)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-(\Phi^+_{2(1)}+i\Phi^+_{2(2)})\\ (\Phi^+_{1(1)}-i\Phi^+_{1(2)})\\ -(\Phi^+_{2(1)}+i\Phi^+_{2(2)})\\ (\Phi^+_{1(1)}-i\Phi^+_{1(2)})\end{vmatrix}. \tag{40}$$

Другими словами, это означает, что в нерелятивистской волновой функции Φ_c^+ мы имеем не 6, а только 4 независимые компоненты. Соберем их в следующий столбец:

$$\varphi=\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{vmatrix}. \tag{41}$$

Дальше, в согласии с (40)–(41), достаточно следить только за двумя независимыми уравнениями при c = 1, c = 2, т. е. за уравнениями (35) и (36). Уравнение (35) дает

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{3(1)}\\ \Phi^+_{4(1)}\end{vmatrix}+\frac{ie}{3M}\left\{\frac{3}{2}F_{12}\begin{vmatrix}-i\Phi^+_{1(1)}\\ i\Phi^+_{2(1)}\\ -i\Phi^+_{3(1)}\\ i\Phi^+_{4(1)}\end{vmatrix}+\frac{3}{2}F_{31}\begin{vmatrix}i\Phi^+_{2(1)}\\ -\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{4(1)}\\ -\Phi^+_{3(1)}\end{vmatrix}+\frac{3}{2}F_{23}\begin{vmatrix}-i\Phi^+_{2(1)}\\ -\Phi^+_{1(1)}\\ -i\Phi^+_{4(1)}\\ -i\Phi^+_{3(1)}\end{vmatrix}+\right.$$

$$
+F_{12}\left[\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(2)}\\ \Phi^{+}_{2(2)}\\ \Phi^{+}_{3(2)}\\ \Phi^{+}_{4(2)}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-i\Phi^{+}_{1(1)}\\ i\Phi^{+}_{2(1)}\\ -i\Phi^{+}_{3(1)}\\ i\Phi^{+}_{4(1)}\end{vmatrix}\right]+F_{31}\left[-\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(3)}\\ \Phi^{+}_{2(3)}\\ \Phi^{+}_{3(3)}\\ \Phi^{+}_{4(3)}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{2(1)}\\ -\Phi^{+}_{1(1)}\\ \Phi^{+}_{4(1)}\\ -\Phi^{+}_{3(1)}\end{vmatrix}\right]+F_{23}\left[\begin{vmatrix}-i\Phi^{+}_{1(3)}\\ i\Phi^{+}_{2(3)}\\ -i\Phi^{+}_{3(3)}\\ i\Phi^{+}_{4(3)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{2(2)}\\ -\Phi^{+}_{1(2)}\\ \Phi^{+}_{4(2)}\\ -\Phi^{+}_{3(2)}\end{vmatrix}\right]\Bigg\}=0,
$$

или

$$
\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(1)}\\ \Phi^{+}_{2(1)}\\ \Phi^{+}_{3(1)}\\ \Phi^{+}_{4(1)}\end{vmatrix}+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+\Phi^{+}_{1(2)}+i\Phi^{+}_{1(1)}\\ i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{2(1)}+\Phi^{+}_{2(2)}-i\Phi^{+}_{2(1)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{3(1)}+\Phi^{+}_{3(2)}+i\Phi^{+}_{3(1)}\\ i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{4(1)}+\Phi^{+}_{4(2)}-i\Phi^{+}_{4(1)}\end{vmatrix}+F_{31}\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\Phi^{+}_{2(1)}-\Phi^{+}_{1(3)}-\Phi^{+}_{2(1)}\\ -\frac{3}{2}\Phi^{+}_{1(1)}-\Phi^{+}_{2(3)}+\Phi^{+}_{1(1)}\\ \frac{3}{2}\Phi^{+}_{4(1)}-\Phi^{+}_{3(3)}-\Phi^{+}_{4(1)}\\ -\frac{3}{2}\Phi^{+}_{3(1)}-\Phi^{+}_{4(3)}+\Phi^{+}_{3(1)}\end{vmatrix}+\right.
$$

$$
\left.+F_{23}\begin{vmatrix}-i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{2(1)}-i\Phi^{+}_{1(3)}+\Phi^{+}_{2(2)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{2(3)}-\Phi^{+}_{1(2)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{4(1)}-i\Phi^{+}_{3(3)}+\Phi^{+}_{4(2)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{3(1)}+i\Phi^{+}_{4(3)}-\Phi^{+}_{3(2)}\end{vmatrix}\right\}=0. \tag{42}
$$

Замечаем, что ввиду соотношений (39), в (42) фактически имеем только два разных уравнения:

$$
\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(1)}\\ \Phi^{+}_{2(1)}\end{vmatrix}+
$$

$$
+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\frac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+\Phi^{+}_{1(2)}\\ i\frac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}+\Phi^{+}_{2(2)}\end{vmatrix}+F_{31}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}-\Phi^{+}_{1(3)}\\ -\frac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}-\Phi^{+}_{2(3)}\end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix}-i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{2(1)}-i\Phi^{+}_{1(3)}+\Phi^{+}_{2(2)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{2(3)}-\Phi^{+}_{1(2)}\end{vmatrix}\right\}=0.
$$

Откуда, учитывая тождества

$$
\Phi^{+}_{1(3)}=-\left(\Phi^{+}_{2(1)}+i\Phi^{+}_{2(2)}\right),\quad \Phi^{+}_{2(3)}=\Phi^{+}_{1(1)}-i\Phi^{+}_{1(2)},
$$

находим

$$
\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(1)}\\ \Phi^{+}_{2(1)}\end{vmatrix}+
$$

$$
+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\frac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+\Phi^{+}_{1(2)}\\ i\frac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}+\Phi^{+}_{2(2)}\end{vmatrix}+F_{31}\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\Phi^{+}_{2(1)}+i\Phi^{+}_{2(2)}\\ -\frac{3}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{1(2)}\end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix}-i\frac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}\\ -i\frac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}\end{vmatrix}\right\}=0. \tag{43}
$$

Аналогично рассматриваем уравнение (36), оно дает

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\left|\begin{matrix}\Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\\ \Phi^+_{3(2)}\\ \Phi^+_{4(2)}\end{matrix}\right|+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\left|\begin{matrix}-i\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}+i\Phi^+_{1(2)}-\Phi^+_{1(1)}\\ i\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}-i\Phi^+_{2(2)}-\Phi^+_{2(1)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^+_{3(2)}+i\Phi^+_{3(2)}-\Phi^+_{3(1)}\\ i\frac{3}{2}\Phi^+_{4(2)}-i\Phi^+_{4(2)}-\Phi^+_{4(1)}\end{matrix}\right|+F_{31}\left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}-i\Phi^+_{2(1)}-i\Phi^+_{1(3)}\\ -\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}-i\Phi^+_{1(1)}+i\Phi^+_{2(3)}\\ \frac{3}{2}\Phi^+_{4(2)}-i\Phi^+_{4(1)}-i\Phi^+_{3(3)}\\ -\frac{3}{2}\Phi^+_{3(2)}-i\Phi^+_{3(1)}+i\Phi^+_{4(3)}\end{matrix}\right|+\right.$$

$$\left.+F_{23}\left|\begin{matrix}-i\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}+\Phi^+_{1(3)}+i\Phi^+_{2(2)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}+\Phi^+_{2(3)}+i\Phi^+_{1(2)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^+_{4(2)}+\Phi^+_{3(3)}+i\Phi^+_{4(2)}\\ -i\frac{3}{2}\Phi^+_{3(2)}+\Phi^+_{4(3)}+i\Phi^+_{3(2)}\end{matrix}\right|\right\}=0. \qquad (44)$$

Ввиду соотношений (39), в (44) фактически имеем только два разных уравнения:

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\left|\begin{matrix}\Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{matrix}\right|+$$

$$+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\left|\begin{matrix}-i\frac{1}{2}\Phi^+_{1(2)}-\Phi^+_{1(1)}\\ i\frac{1}{2}\Phi^+_{2(2)}-\Phi^+_{2(1)}\end{matrix}\right|+F_{31}\left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}-i\Phi^+_{2(1)}-i\Phi^+_{1(3)}\\ -\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}-i\Phi^+_{1(1)}+i\Phi^+_{2(3)}\end{matrix}\right|+F_{23}\left|\begin{matrix}-i\frac{1}{2}\Phi^+_{2(2)}+\Phi^+_{1(3)}\\ -i\frac{1}{2}\Phi^+_{1(2)}+\Phi^+_{2(3)}\end{matrix}\right|\right\}=0.$$

Откуда, учитывая тождества

$$\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}-i\Phi^+_{2(1)}-i\Phi^+_{1(3)}=\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}-i\Phi^+_{2(1)}+i\left(\Phi^+_{2(1)}+i\Phi^+_{2(2)}\right)=\frac{1}{2}\Phi^+_{2(2)},$$

$$-\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}-i\Phi^+_{1(1)}+i\Phi^+_{2(3)}=-\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}-i\Phi^+_{1(1)}+i\left(\Phi^+_{1(1)}-i\Phi^+_{1(2)}\right)=-\frac{1}{2}\Phi^+_{1(2)},$$

$$-i\frac{1}{2}\Phi^+_{2(2)}+\Phi^+_{1(3)}=-\frac{i}{2}\Phi^+_{2(2)}-\left(\Phi^+_{2(1)}+i\Phi^+_{2(2)}\right)=-\Phi^+_{2(1)}-i\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)},$$

$$-\frac{i}{2}\Phi^+_{1(2)}+\Phi^+_{2(3)}=-\frac{i}{2}\Phi^+_{1(2)}+\left(\Phi^+_{1(1)}-i\Phi^+_{1(2)}\right)=-i\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}+\Phi^+_{1(1)},$$

находим

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\left|\begin{matrix}\Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{matrix}\right|+$$

$$+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\left|\begin{matrix}-\frac{i}{2}\Phi^+_{1(2)}-\Phi^+_{1(1)}\\ \frac{i}{2}\Phi^+_{2(2)}-\Phi^+_{2(1)}\end{matrix}\right|+F_{31}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\Phi^+_{2(2)}\\ -\frac{1}{2}\Phi^+_{1(2)}\end{matrix}\right|+F_{23}\left|\begin{matrix}-\Phi^+_{2(1)}-i\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}\\ \Phi^+_{1(1)}-\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}\end{matrix}\right|\right\}=0. \qquad (45)$$

Соберем уравнения (44) и (45) в одно 4-компонентное:

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{vmatrix}+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i/2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & i/2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -i/2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & i/2\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+F_{31}\begin{vmatrix}0 & 3/2 & 0 & i\\ -3/2 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & -1/2 & 0\end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix}0 & -i/2 & 0 & 0\\ -i/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -3i/2\\ 1 & 0 & -3i/2 & 0\end{vmatrix}\right\}\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{vmatrix}=0. \quad (46)$$

Введем три 4-мерные матрицы

$$S_1=-i\begin{vmatrix}0 & -i/2 & 0 & 0\\ -i/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -3i/2\\ 1 & 0 & -3i/2 & 0\end{vmatrix},\quad S_2=-i\begin{vmatrix}0 & 3/2 & 0 & i\\ -3/2 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & -1/2 & 0\end{vmatrix},$$

$$S_3=-i\begin{vmatrix}-i/2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & i/2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -i/2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & i/2\end{vmatrix}.$$

Убеждаемся, что выполняются коммутационные соотношения группы вращений

$$S_1S_2-S_2S_1=iS_3,\quad S_2S_3-S_3S_2=iS_1,\quad S_3S_1-S_1S_3=iS_2.$$

Уравнение (46) можно представить так:

$$\left\{D_4-\frac{1}{2M}D^2-\frac{e}{3M}(F_{23}S_1+F_{31}S_2+F_{12}S_3)\right\}\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{vmatrix}=0. \quad (47)$$

Легко найти преобразование, делающее матрицу третьей проекции спина диагональной. Оно задается соотношениями

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0 & i & 0\\ 0 & 1 & 0 & i\\ 1 & 0 & -i & 0\\ 0 & 1 & 0 & -i\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{vmatrix},\quad U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0 & i & 0\\ 0 & 1 & 0 & i\\ 1 & 0 & -i & 0\\ 0 & 1 & 0 & -i\end{vmatrix},\quad U^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0 & i & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -i & 0 & i & 0\\ 0 & -i & 0 & i\end{vmatrix}.$$

Легко находим явные выражения для компонент оператора спина S'_j в новом базисе:

$$S'_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix},\quad S'_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & -3 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{vmatrix},\quad S'_2=\frac{i}{2}\begin{vmatrix}0 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{vmatrix}.$$

Тогда уравнение (47) записывается следующим образом:

$$\left\{D_4 - \frac{1}{2M}D^2 - \frac{e}{3M}(\,F_{23}S'_1 + F_{31}S'_2 + F_{12}S'_3)\right\}\Phi = 0; \tag{48}$$

напоминаем, что $D_4 = \partial_4 + ieA_4,\ \ D_k = \partial_k + ieA_k$. Это нерелятивистское уравнение паулиевского вида для частицы со спином 3/2, Ф – четырехкомпонентная волновая функция.

Список использованных источников

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. R. Soc. London. Ser. A – Math. Phys. Sci. – 1936. – Vol. 155, № 886. – P. 447–459. https://doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Majorana, E. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone / E. Majorana // Nuovo Cimento. – 1937. – Vol. 14, № 4. – P. 171–186. https://doi.org/10.1007/bf02961314

3. Fierz, M. Über die relativistische theorie KraftefreierTeilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.

4. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.

5. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. S. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64. https://doi.org/10.1103/physrev.60.61

6. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, № 2/3. – P. 200–216. https://doi.org/10.1103/revmodphys.17.200

7. Гельфанд, И. М. Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

8. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.

9. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. Акад. наук СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.

10. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитными и мезонными полями / В. Я. Файнберг // Тр. ФИАН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

11. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

12. Богуш, А. А. Уравнение для частицы со спином 3/2, обладающей аномальным магнитным моментом / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

13. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Изв. вузов. Физика. – 1985. – № 1. – С. 91–95.

14. Плетюхов, В. А. О взаимосвязи между различными формулировками теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. Акад. навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – № 5. – С. 90–95.

15. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 486 с.

16. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.

17. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

18. Fradkin equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields / V. V. Kisel [et al.] // Ukr. J. Phys. – 2019. – Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117. https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1112

References

1. Dirac P. A. M. Relativistic wave equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A – Mathematical and Physical Sciences*, 1936, vol. 155, no. 886, pp. 447–459. https://doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Majorana E. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone. *Nuovo Cimento*, 1937, vol. 14, no. 4, pp. 171–186. https://doi.org/10.1007/bf02961314

3. Fierz M. Über die relativistische theorie KraftefreierTeilchen mit beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 3–37.

4. Pauli W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 297–300.

5. Rarita W., Schwinger J. S. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 1941, vol. 60, no. 1, pp. 61–64. https://doi.org/10.1103/physrev.60.61

6. Bhabha H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles. *Reviews of Modern Physics*, 1945, vol. 17, no. 2–3, pp. 200–216. https://doi.org/10.1103/revmodphys.17.200

7. Gelfand I. M., Yaglom A. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1948, vol. 18, no. 8, pp. 703–733 (in Russian).

8. Fradkin E. S. To the theory of particles with higher spins. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1950, vol. 20, no. 1, pp. 27–38 (in Russian).

9. Fedorov F. I. Generalized relativistic wave equations. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, 1952, vol. 82, no. 1, pp. 37–40 (in Russian).

10. Feinberg V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields. *Trudy Fizicheskogo instituta im. P. N. Lebedeva Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR*, 1955, vol. 6, pp. 269–332 (in Russian).

11. Petras M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2. *Czechoslovak Journal of Physics,* 1955, vol. 5, no. 3, pp. 418–419.

12. Bogush A. A. Equation for a 3/2 particle with anomalous magnetic moment. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika = Russian Physics Journal*, 1984, vol. 1, pp. 23–27 (in Russian).

13. Pletyukhov V. A., Strazhev V. I. To the theory of particles of spin 3/2. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika = Russian Physics Journal*, 1985, vol. 28, no. 1, pp. 91–95 (in Russian).

14. Pletyukhov V. A., Strazhev V. I. On the relationship between various formulations of particle theory with spin 3/2. *Vestsi Akademii navuk Belarusi BSSR. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics series*, 1985, vol. 5, pp. 90–95 (in Russian).

15. Red'kov V. M. *Particle fields in the Riemann space and the Lorents group.* Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2009. 486 p. (in Russian).

16. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic wave equations and internal degrees of freedom*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2015. 328 p. (in Russian).

17. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Ya. A., Balan V., Red'kov V. M. *Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems*. New York, Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.

18. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Ivashkevich A. V., Red'kov V. M. Fradkin equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields. *Ukraine Journal of Physics*, 2019, vol. 64, no. 12, pp. 1112–1117. https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1112

Информация об авторах

Ивашкевич Алина Валентиновна – магистрант, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Войнова Янина Александровна – кандидат физико-математических наук, преподаватель, Минское суворовское военное училище (ул. М. Богдановича, 29, 220029, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: voinovayanina@mail.ru

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Кисель Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasiliy_bspu@mail.ru

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Alina V. Ivashkevich – Master Student, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Yanina A. Voynova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Teacher, Minsk Suvorov Military School (29, M. Bogdanovich Str., 220029, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: voinyuschka@mail.ru

Elena M. Ovsiyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Vasily V. Kisel – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Physics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasiliy_bspu@ mail.ru

Viktor M. Red'kov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center «Fundamental Interactions and Astrophysics», B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by