ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 539.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-350-360

Поступила в редакцию 11.06.2020
Received 11.06.2020

А. В. Ивашкевич[1], Я. А. Войнова[2], Е. М. Овсиюк[3], В. В. Кисель[4], В. М. Редьков[1]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Минское суворовское военное училище, Минск, Беларусь
[3]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь
[4]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 3/2: МОДЕЛИ ПАУЛИ – ФИРЦА И ФРАДКИНА, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

Аннотация. В рамках общего формализма Гельфанда – Яглома исследуется теория Фрадкина для частицы со спином 3/2 в присутствии внешних полей. С помощью стандартных требований релятивистской инвариантности, *P*-симметрии, существования функции Лагранжа для развиваемой модели сначала выведен набор спинорных уравнений при отсутствии внешних полей. Волновая функция эквивалента набору из биспинора и вектор-биспинора. Показывается, что в свободном случае теория Фрадкина может быть приведена к теории Паули – Фирца. При учете внешних электромагнитных полей теория Фрадкина может быть приведена к минимальной форме уравнения для основного биспинора. Полученное уравнение содержит дополнительный член взаимодействия через тензор $F_{\alpha\beta}$ электромагнитного поля, при этом появляется параметр в уравнении Фрадкина, соотносимый с некоторой дополнительной к заряду характеристикой частицы. Теория обобщается, для того чтобы учесть псевдориманову структуру пространства-времени. В общековариантном случае появляется дополнительный член взаимодействия через тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$. При нулевом электрическом заряде частицы теория Фрадкина остается корректной и описывает майорановскую частицу со спином 3/2, неминимально взаимодействующую со структурой пространства-времени через тензор Риччи. Чтобы прояснить физический смысл дополнительного параметра Фрадкина, отличающего ее от модели Паули – Фирца, исследуем нерелятивистское приближение в обеих моделях во внешнем однородном магнитном поле, два различающихся спектра энергии найдены в явном виде. Структура нерелятивистского уравнения позволяет рассматривать дополнительный параметр как поляризуемость.

Ключевые слова: спин 3/2, обобщенные волновые уравнения, Паули – Фирц, Фрадкин, электромагнитные поля, риманово пространство-время, неминимальное взаимодействие, нерелятивистское приближение, точные решения

Для цитирования. Частица со спином 3/2: модели Паули – Фирца и Фрадкина, взаимодействие с внешними полями / А. В. Ивашкевич [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 350–360. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-350-360

Alina V. Ivashkevich[1], Yanina A. Voynova[2], Elena M. Ovsiyuk[3], Vasily V. Kisel[4], Viktor M. Red'kov[1]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Minsk Suvorov Military School, Minsk, Belarus
[3]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus
[4]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

SPIN 3/2 PARTICLE: PUALI – FIERZ AND FRADKIN MODELS, INTERACTION WITH EXTERNAL FIELDS

Abstract. In the frame of the general Gel'fand – Yaglom formalism, the Fradkin theory for a spin 3/2 particle in presence of external fields is investigated. Applying the standard requirements of relativistic invariance, *P*-symmetry, existence of a Lagrangian for the model, we derive a set of spinor equations, first in absence of external fields. The wave function consists of a bispinor and a vector-bispinor. It is shown that in absence of external fields the Fradkin model is reduced to the Pauli – Fierz theory. Taking into account the presence of external electromagnetic fields, the Fradkin theory can be turned to the minimal form of the equation for the main bispinor. This equation contains an additional interaction term governed by the electromagnetic tensor $F_{\alpha\beta}$. Meanwhile, there appears a parameter in the Fradkin equation related to any characteristic of the particle additional to its charge. The theory is generalized for taking into account the pseudo-Riemannian space-time geometry. In this case, the Fradkin equation contains an additional interaction term, governed by the Ricci tensor $R_{\alpha\beta}$. If the electric charge of the particle is zero, the Fradkin model remains correct and describes a neutral spin 3/2 particle of the Majorana type interacting nonminimally with the geometrical background through the Ricci tensor. To clarify the meaning of the additional physical characteristics underlying the Fradkin model in contrast to the Pauli – Fierz one we have considered nonrelativistic approximation for both theories in presence of an external uniform magnetic field, and found respective energy spectra. The structure of the ninrelativistic Fradkin equation permits to consider such an additional parameter as polarizability.

Key words: spin 3/2, generalized wave equations, Pauli – Fierz, Fradkin, electromagnetic fields, Riemannian space-time, nonminimal interaction, exact solutions

For citation. Ivashkevich A. V., Voynova Ya. A., Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spin 3/2 particle: Puali – Fierz and Fradkin models, interaction with external fields. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 350–360 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-350-360

Введение. В рамках теории релятивистских волновых уравнений, помимо простейших и широко известных уравнений для частиц со спинами 0, 1/2, 1, 3/2, 2, могут быть предложены и более сложные уравнения. Такие обобщенные уравнения основываются на использовании расширенных наборов представлений группы Лоренца. Например, известны уравнения для частиц с несколькими массовыми параметрами ($M_1, M_2, ...$), с несколькими спинами (S = 0–1; 1/2–3/2), с дополнительными электромагнитными характеристиками: аномальным магнитным моментом (S = 1/2, 1, 2), электрическим квадрупольным моментом (S = 1), поляризуемостью (S = 0, 1), со структурой Дарвина – Кокса (S = 0) и др. (см. в [1–18]). Такие дополнительные характеристики проявляют себя физически в присутствии внешних полей, например электромагнитных и гравитационных.

В рамках такой обобщенной теории релятивистских волновых уравнений первого порядка $(\Gamma_\mu \partial_\mu + M)\Phi = 0$ рассмотрим предложенную Фрадкиным [8] теорию частицы со спином 3/2. В настоящее время не совсем понятно, какую именно дополнительную физическую характеристику позволяет описывать модель Фрадкина.

Базис Гельфанда – Яглома. Модель Фрадкина основывается на 20-компонентной волновой функции Ψ частицы, преобразующейся как следующий набор неприводимых представлений группы Лоренца (пронумерованных цифрами 1,...,6):

$$(1/2,0) \sim 1, \quad (0,1/2) \sim 2, \quad (1,1/2) \sim 5, \quad (1/2,1) \sim 6, \quad (1/2,0)' \sim 3, \quad (0,1/2)' \sim 4.$$

Схема зацепления для этих представлений следующая [16, 17]:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 4 & - & 3 & & \\ & & | & & | & & \\ 5 & - & 1 & - & 2 & - & 6 \\ | & & & & & & | \\ 3 & & - & - & - & & 4. \end{array}$$

В соответствии с общей теорией, сначала следует определить явный вид матрицы Γ_4, ее спиновые блоки могут иметь общую структуру (используется символ прямого произведения матриц):

$$C^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \begin{vmatrix} c_{12} & c_{14} & i\sqrt{3}c_{15} \\ c_{32} & c_{34} & i\sqrt{3}c_{35} \\ i\sqrt{3}c_{62} & i\sqrt{3}c_{64} & c_{65} \end{vmatrix} \otimes \gamma_4, \quad C^{\left(\frac{3}{2}\right)} = 2c_{65} I_2 \otimes \gamma_4 .$$

Из требований единственности спина и массы следует упрощающее спиновые блоки ограничение $c_{65} = 1/2$:

$$C^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \beta^{\left(\frac{1}{2}\right)} \otimes \gamma_4, \quad C^{\left(\frac{3}{2}\right)} = I_2 \otimes \gamma_4 .$$

Минимальный полином для матрицы

$$\beta^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \begin{vmatrix} c_{12} & c_{14} & i\sqrt{3}c_{15} \\ c_{32} & c_{34} & i\sqrt{3}c_{35} \\ i\sqrt{3}c_{62} & i\sqrt{3}c_{64} & 1/2 \end{vmatrix}$$

может быть двух видов:

$$\left[\beta^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^2 = 0, \quad \left[\beta^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^3 = 0.$$

Первый вариант соответствует простой и хорошо известной модели Паули – Фирца [3, 4]. Дальше будем рассматривать второй вариант. Получив явный вид минимального полинома, находим ограничения на коэффициенты c_{kn}:

$$c_{12}+c_{34}=-1/2, \quad c_{12}c_{34}-c_{32}c_{14}+3(c_{15}c_{62}+c_{35}c_{64})=1/4,$$
$$(c_{12}c_{34}-c_{32}c_{14})+6(c_{62}c_{34}c_{15}+c_{64}c_{35}c_{12}-c_{32}c_{64}c_{15}-c_{14}c_{35}c_{62})=0.$$

Теперь следует учесть требование существования лагранжевой формулировки модели. Матрица инвариантной билинейной формы может иметь структуру (где $a,\ b=\pm 1$)

$$\eta^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\otimes\gamma_4, \quad \eta^{\left(\frac{3}{2}\right)}=I_2\otimes\gamma_4.$$

Соответственно находим дополнительные ограничения: c_{12}, c_{34} должны быть вещественными, остальные коэффициенты должны подчиняться условиям $c_{62}=ac_{15}^*$, $c_{64}=bc_{35}^*$, $c_{32}=abc_{14}^*$. Таким образом, спиновый блок $\beta^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ имеет структуру

$$\beta^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\begin{vmatrix} c_{12} & c_{14} & i\sqrt{3}c_{15} \\ abc_{14}^* & c_{34} & i\sqrt{3}c_{35} \\ i\sqrt{3}ac_{15}^* & i\sqrt{3}bc_{35}^* & 1/2 \end{vmatrix},$$

при этом коэффициенты должны подчиняться условиям

$$c_{12}+c_{34}=-1/2, \quad c_{12}c_{34}-abc_{14}c_{14}^*+3\left(ac_{15}c_{15}^*+bc_{35}c_{35}^*\right)=1/4,$$
$$\left(c_{12}c_{34}-abc_{14}c_{14}^*\right)+6\left(ac_{15}^*c_{34}c_{15}+bc_{35}^*c_{35}c_{12}-ac_{14}^*c_{35}^*c_{15}-ac_{14}c_{35}c_{15}^*\right)=0.$$

Спин-векторные уравнения. Далее используем спинорные обозначения для матриц Паули:

$$(\sigma^4)_{\dot{a}b}=\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}, \quad (\sigma^1)_{\dot{a}b}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (\sigma^2)_{\dot{a}b}=\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad (\sigma^3)_{\dot{a}b}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

и более короткие обозначения для коэффициентов:

$$\lambda_1=c_{12}, \quad \lambda_2=c_{14}, \quad \lambda_3=-i\sqrt{2}c_{15}, \quad \lambda_4=c_{32},$$
$$\lambda_5=c_{34}, \quad \lambda_6=-i\sqrt{2}c_{35}, \quad \lambda_7=i\sqrt{2}c_{62}, \quad \lambda_8=i\sqrt{2}c_{64}.$$

После необходимых вычислений выводим следующую 2-спинорную форму системы уравнений, описывающей частицу со спином 3/2 в подходе Фрадкина:

$$\lambda_1\partial^{\dot{a}b}\psi_b+\lambda_2\partial^{\dot{a}b}\psi'_b+\lambda_3\partial^b_{\dot{c}}\psi_b^{(\dot{a}\dot{c})}+M\psi^{\dot{a}}=0, \tag{1}$$

$$\lambda_1\partial_{a\dot{b}}\psi^{\dot{b}}+\lambda_2\partial_{a\dot{b}}\psi'^{\dot{b}}+\lambda_3\partial^c_{\dot{b}}\psi^{\dot{b}}_{(ac)}+M\psi_a=0, \tag{2}$$

$$\lambda_4\partial^{\dot{a}b}\psi_b+\lambda_5\partial^{\dot{a}b}\psi'_b+\lambda_6\partial^b_{\dot{c}}\psi_b^{(\dot{a}\dot{c})}+M\psi'^{\dot{a}}=0, \tag{3}$$

$$\lambda_4\partial_{a\dot{b}}\psi^{\dot{b}}+\lambda_5\partial_{a\dot{b}}\psi'^{\dot{b}}+\lambda_6\partial^c_{\dot{b}}\psi^{\dot{b}}_{(ac)}+M\psi'_a=0, \tag{4}$$

$$\frac{\lambda_7}{2}\left(\partial^{\dot{c}}_a\psi_b+\partial^{\dot{c}}_b\psi_a\right)+\frac{\lambda_8}{2}\left(\partial^{\dot{c}}_a\psi'_b+\partial^{\dot{c}}_b\psi'_a\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_{\dot{n}a}\psi_b^{(\dot{n}\dot{c})}+\partial_{\dot{n}b}\psi_a^{(\dot{n}\dot{c})}\right)+M\psi^{\dot{c}}_{(ab)}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\lambda_7}{2}\left(\partial^{\dot{a}}_c\psi^{\dot{b}}+\partial^{\dot{b}}_c\psi^{\dot{a}}\right)+\frac{\lambda_8}{2}\left(\partial^{\dot{a}}_c\psi'^{\dot{b}}+\partial^{\dot{b}}_c\psi'^{\dot{a}}\right)+\frac{1}{2}\left(\partial^{n\dot{a}}\psi^{\dot{b}}_{(nc)}+\partial^{n\dot{b}}\psi^{\dot{a}}_{(nc)}\right)+M\psi_c^{(\dot{a}\dot{b})}=0, \tag{6}$$

где $\partial_{a\dot{b}}=\frac{1}{i}\partial_\mu\sigma^\mu_{a\dot{b}}$. Коэффициенты λ_i подчинены условиям

$$\lambda_1+\lambda_5=-\frac{1}{2},\quad \lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_4+\frac{3}{2}(\lambda_3\lambda_7+\lambda_6\lambda_8)=\frac{1}{4},$$

$$\lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_4=3\big[(\lambda_2\lambda_6-\lambda_3\lambda_5)\lambda_7+(\lambda_3\lambda_4-\lambda_1\lambda_6)\lambda_8\big],$$

$$\lambda_1^*=\lambda_1,\quad \lambda_5^*=\lambda_5,\quad \lambda_7^*=c_1\lambda_3,\quad \lambda_8^*=c_2\lambda_6,\quad \lambda_4=c_1c_2\lambda_2^*,\quad c_1=\pm 1,\quad c_2=\pm 1.$$

Ниже будем исследовать вариант $c_1 = +1$, $c_2 = +1$. Входящие в уравнения (1)–(6) спиноры могут быть представлены в спин-векторной форме следующим образом:

$$\psi_c^{(\dot a\dot b)}=\frac{1}{2}\Big(\sigma_c^{\mu\dot a}\psi_\mu^{\dot b}+\sigma_c^{\mu\dot b}\psi_\mu^{\dot a}\Big),\quad \psi_{(ab)}^{\dot c}=\frac{1}{2}\Big(\sigma_a^{\mu\dot c}\psi_{\mu b}+\sigma_b^{\mu\dot c}\psi_{\mu a}\Big),$$

$$\psi_a=\sigma_{a\dot b}^{\mu}\psi_\mu^{\dot b},\quad \psi^{\dot a}=\sigma^{\mu\dot a b}\psi_{\mu b},\quad \psi'_a=\psi_{0a},\quad \psi'^{\dot a}=\psi_0^{\dot a}.$$

С учетом этого, уравнения могут быть приведены к вектор-биспинорной форме:

$$\psi_\mu=\begin{vmatrix}\psi_\mu^{\dot a}\\ \psi_{\mu b}\end{vmatrix},\quad \psi_0=\begin{vmatrix}\psi_0^{\dot a}\\ \psi_{0b}\end{vmatrix},\quad \gamma_\mu=\frac{1}{i}\begin{vmatrix}0 & \sigma^{\mu\dot a b}\\ \sigma_{a\dot b}^{\mu} & 0\end{vmatrix};$$

$$\lambda_1\hat\partial\gamma_\mu\psi_\mu-i\lambda_2\hat\partial\psi_0+\frac{\lambda_3}{2}\Big\{\hat\partial\gamma_\mu\psi_\mu-4\partial_\mu\psi_\mu\Big\}+M\gamma_\mu\psi_\mu=0,$$

$$i\lambda_4\hat\partial(\gamma_\mu\psi_\mu)+\lambda_5\hat\partial\psi_0-2i\lambda_6\left\{(\partial_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat\partial(\gamma_\mu\psi_\mu)\right\}+M\psi_0=0,$$

$$\lambda_7\left\{\partial_\lambda\gamma_\mu\psi_\mu-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat\partial\gamma_\mu\psi_\mu\right\}-i\lambda_8\left\{\partial_\lambda\psi_0-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat\partial\psi_0\right\}+$$

$$+\frac{1}{8}\Big\{3\gamma_\lambda\hat\partial\gamma_\mu\psi_\mu-4\partial_\lambda\gamma_\mu\psi_\mu+8\hat\partial\psi_\lambda-4\gamma_\lambda\partial_\mu\psi_\mu\Big\}+M\left\{\psi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\psi_\mu\right\}=0. \tag{7}$$

Следует отметить, что, сворачивая последнее уравнение с γ_λ, получим 4 тождества 0 = 0. Это означает, что в действительности система (7) содержит только 20 нетривиальных уравнений, а не 24. Система (7) может быть преобразована к другой (но эквивалентной) форме, где уравнения уже содержат члены $M\psi_0$ и $M\psi_\lambda$:

$$i\lambda_4\hat\partial(\gamma_\mu\psi_\mu)+\lambda_5\hat\partial\psi_0-2i\lambda_6\left\{(\partial_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat\partial(\gamma_\mu\psi_\mu)\right\}+M\psi_0=0,$$

$$\left(\lambda_7-\frac{1}{2}\right)\partial_\lambda(\gamma_\mu\psi_\mu)+\frac{1}{4}\left(\lambda_1+\frac{\lambda_3}{2}-\lambda_7+\frac{3}{2}\right)\gamma_\lambda\hat\partial(\gamma_\mu\psi_\mu)-$$

$$-i\lambda_8\partial_\lambda\psi_0+\frac{i}{4}\big(\lambda_8-\lambda_2\big)\gamma_\lambda\hat\partial\psi_0+\hat\partial\psi_\lambda-\frac{1}{2}\big(1+\lambda_3\big)\gamma_\lambda\big(\partial_\mu\psi_\mu\big)+M\psi_\lambda=0.$$

Соотнесение уравнений Фрадкина и Паули – Фирца. Рассмотрим связь между уравнениями Фрадкина и Паули – Фирца. Сначала умножим первое уравнение в (7) на λ_7, второе уравнение – на $(-i\lambda_8)$, и результаты сложим. Это дает

$$\left(-\frac{1}{2}\hat\partial+M\right)\big[\lambda_7(\gamma_\mu\psi_\mu)-i\lambda_8\psi_0\big]+$$

$$+\hat\partial\big[(\lambda_4\lambda_8-\lambda_5\lambda_7)(\gamma_\mu\psi_\mu)-i(\lambda_2\lambda_7-\lambda_1\lambda_8)\psi_0\big]-2(\lambda_3\lambda_7+\lambda_6\lambda_8)\left[(\partial_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat\partial(\gamma_\mu\psi_\mu)\right]=0.$$

Аналогично, умножая первое уравнение в (7) на $(\lambda_4\lambda_8-\lambda_5\lambda_7)$, а второе – на $[-i(\lambda_2\lambda_7-\lambda_1\lambda_8)]$, после суммирования результатов получим

$$M\left[(\lambda_4\lambda_8-\lambda_5\lambda_7)(\gamma_\mu\psi_\mu)-i(\lambda_2\lambda_7-\lambda_1\lambda_8)\psi_0\right]=$$

$$=\lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_4\left\{\frac{2}{3}\left[(\partial_\mu\psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{\partial}(\gamma_\mu\psi_\mu)\right]+\hat{\partial}\left[\lambda_7(\gamma_\mu\psi_\mu)-i\lambda_8\psi_0\right]\right\}.$$

Затем после комбинирования двух последних уравнений для новой волновой функции

$$\Phi_\lambda=\left[\psi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\psi_\mu\right]+\frac{1}{4}\gamma_\lambda\left[\lambda_7\gamma_\mu\psi_\mu-i\lambda_8\psi_0\right] \tag{8}$$

выводим следующие уравнения:

$$-\frac{1}{2}\hat{\partial}\gamma_\mu\Phi_\mu-\frac{1}{3}\partial_\lambda\left[\Phi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\Phi_\mu\right]+M\gamma_\mu\Phi_\mu=0,$$

$$\left[\partial_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}\right]\gamma_\mu\Phi_\mu+M\left[\Phi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\Phi_\mu\right]+\frac{1}{8}\left[8\hat{\partial}\Phi_\lambda+3\gamma_\lambda\hat{\partial}\gamma_\mu\Phi_\mu-4\partial_\lambda\gamma_\mu\Phi_\mu-4\gamma_\lambda\partial_\mu\Phi_\mu\right]=0.$$

Они могут быть объединены в одно эквивалентное уравнение

$$\frac{1}{8}\left[8\hat{\partial}\Phi_\lambda+\frac{1}{6}\gamma_\lambda\hat{\partial}\gamma_\mu\Phi_\mu+4\partial_\lambda\gamma_\mu\Phi_\mu-\frac{14}{3}\gamma_\lambda\partial_\mu\Phi_\mu\right]+M\Phi_\lambda=0,$$

которое совпадает с минимальным уравнением Паули – Фирца для частицы со спином 3/2. Это означает, что в отсутствие внешних полей теория Фрадкина эквивалентна теории Паули – Фирца.

Учет внешних электромагнитных полей. В этом разделе исходим из вектор-биспинорных уравнений (7), но с удлиненными производными $D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu$:

$$\lambda_1\hat{D}\gamma_\mu\psi_\mu-\lambda_2\hat{D}\psi_0-2\lambda_3\left[D_\mu\psi_\mu-\frac{1}{4}\hat{D}\gamma_\mu\psi_\mu\right]+M\gamma_\mu\psi_\mu=0,$$

$$i\lambda_4\hat{D}\gamma_\mu\psi_\mu+\lambda_5\hat{D}\psi_0-2i\lambda_6\left[D_\mu\psi_\mu-\frac{1}{4}\hat{D}\gamma_\mu\psi_\mu\right]+M\psi_0=0,$$

$$\left[D_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{D}\right]\left[\lambda_7\gamma_\mu\psi_\mu-i\lambda_8\psi_0\right]+$$

$$+\frac{1}{8}\left[8\hat{D}\psi_\lambda+3\gamma_\lambda\hat{D}\gamma_\mu\psi_\mu-4D_\lambda\gamma_\mu\psi_\mu-4\gamma_\lambda D_\mu\psi_\mu\right]+M\left(\psi_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\psi_\mu\right)=0.$$

Ниже будем учитывать тождества

$$D_\mu\gamma_\mu\, D_\nu\gamma_\nu=D_\mu D_\mu-\frac{ie}{4}F_{[\mu\nu]}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu),\quad \hat{D}=D_\mu\gamma_\mu,\quad D_\mu\hat{D}=\hat{D}D_\mu+\gamma_\nu(-ieF_{[\mu\nu]}).$$

Выполняя вычисления по схеме, примененной в предыдущем разделе, для вектор-биспинора (8) выводим следующее уравнение:

$$\frac{1}{8}\left[8\hat{D}\Phi_\lambda+\frac{1}{6}\gamma_\lambda\hat{D}\gamma_\rho\Phi_\rho+4D_\lambda\gamma_\rho\Phi_\rho-\frac{14}{3}\gamma_\lambda D_\rho\Phi_\rho\right]+M\Phi_\lambda-$$

$$-\frac{(\lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_4)}{3M}\gamma_\lambda\gamma_\nu ieF_{[\nu\mu]}\left(\Phi_\mu+\frac{1}{4}\gamma_\mu\gamma_\rho\Phi_\rho\right)=0.$$

В отличие от уравнения Паули – Фирца, оно содержит дополнительный член взаимодействия, пропорционального параметру $(\lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_4)/3M$.

Модель Паули – Фирца, нерелятивистский предел. Важным для прояснения физической интерпретации дополнительного параметра в теории Фрадкина является явный вид уравнения в нерелятивистском приближении. Далее, опуская детали вывода нерелятивистских уравнений в минимальной теории Паули – Фирца и расширенной теории Фрадкина, сравним поведение этих двух частиц во внешнем однородном магнитном поле. В частности, это позволит показать, что известная в литературе точка зрения, что модель Фрадкина позволяет описывать аномальный магнитный момент частицы со спином 3/2, не является верной.

В этом разделе рассмотрим исходную модель Паули – Фирца. Уравнение паулиевского типа для частицы со спином 3/2 в магнитном поле имеет в базисе Петраша следующий вид:

$$D_4\Psi = \frac{1}{2M}\vec{D}^2\Psi + \frac{e}{3M}\left(F_{[23]}S_1 + F_{[31]}S_2 + F_{[12]}S_3\right)\Psi, \tag{9}$$

где оператор спина определен равенствами

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -3i & 0 & 0 \\ i & 0 & 2i & 0 \\ 0 & -2i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 3i & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{S}_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Легко убеждаемся в выполнении нужных коммутационных соотношений:

$$\hat{S}_1\hat{S}_2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -3i & 0 & -6i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -2i \\ 2i & 0 & i & 0 \\ 0 & 6i & 0 & 3i \end{vmatrix}, \quad \hat{S}_2\hat{S}_1 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 3i & 0 & -6i & 0 \\ 0 & i & 0 & -2i \\ 2i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 6i & 0 & -3i \end{vmatrix}, \quad \hat{S}_1\hat{S}_1 - \hat{S}_2\hat{S}_1 = i\hat{S}_3.$$

Используются обозначения:

$$\vec{D}^2 = D_k D_k, \quad D_4 = \partial_4 - ieA_4, \quad D_k = \partial_k - ieA_k, \quad x_4 = it.$$

Однородное магнитное поле определено потенциалом

$$A_1 = \frac{1}{2}By, \quad A_2 = -\frac{1}{2}Bx, \quad A_3 = A_4 = 0, \quad B > 0, \quad F_{[12]} = (\partial_x A_2 - \partial_y A_1) = -B.$$

Уравнение Паули (9) примет вид

$$\partial_4\Psi = \frac{1}{2M}\left[\left(\partial_x + \frac{ie}{2}By\right)^2 + \left(\partial_y - \frac{ie}{2}Bx\right)^2 + \partial_z^2\right]\Psi - \frac{eB}{3M}S_3\Psi = 0.$$

Откуда следует

$$i\frac{d\Psi}{dt} = \left[-\frac{1}{2M}\Delta - \frac{eB}{2M}L_3 + \frac{1}{2M}\frac{e^2B^2}{4}(x^2+y^2) + \frac{eB}{3M}\hat{S}_3\right]\Psi,$$

где $\hat{L}_3 = -i(x\partial_y - y\partial_x)$. Преобразуем уравнение к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $L_3 = -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. Для стационарных состояний $\Psi = e^{-i\varepsilon t}\Phi$ получим уравнение

$$\varepsilon\Phi = \left\{-\frac{1}{2M}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) - \frac{eB}{2M}L_3 + \frac{1}{2M}\frac{e^2B^2}{4}r^2 + \frac{eB}{3M}S_3\right\}\Phi.$$

Используя подстановку $\Phi(r,z,\varphi) = e^{im\varphi}e^{ip_3z}R(r)$, приходим к уравнению

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + emB - p_z^2 - \frac{e^2B^2r^2}{4}\right\}R = \left(-2M\varepsilon + \frac{2}{3}eBS_3\right)R.$$

Матрица спина диагональна и имеет 4 собственных значения

$$S_3 = -\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2}, \quad +\frac{3}{2};$$

соответственно имеем 4 однотипных уравнения:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{e^2B^2r^2}{4}\right\}R = \left(-2M\varepsilon + eB\left(-m + \frac{2}{3}S_3\right) + p_z^2\right)R,$$

которые можно представить в виде

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{e^2B^2r^2}{4} - \varepsilon_0\right\}R = 0,$$

где введен параметр

$$\varepsilon_0 = -2M\varepsilon + eB\left(-m + \frac{2}{3}S_3\right) + p_z^2.$$

Переходим к переменной $x = Br^2$, уравнение преобразуется в следующее:

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{4x} - \frac{e^2x}{16} - \frac{\varepsilon_0}{4B}\right)R = 0.$$

Ищем решения в виде $R = x^A e^{-Cx} f(x)$, получаем

$$\left\{x\frac{d^2f}{dx^2} + \left[2A - 2Cx + 1\right]\frac{df}{dx} + \left[\frac{A(A-1) - \frac{m^2}{4} + A}{x} + \left(C^2 - \frac{e^2}{16}\right)x - \left(2AC + C + \frac{\varepsilon_0}{4B}\right)\right]\right\}f = 0.$$

Выбираем параметры: $C = |e|/4, \quad A = |m|/2$, тогда уравнение для f упростится:

$$\left\{x\frac{d^2}{dx^2} + \left(|m| + 1 - \frac{|e|}{2}x\right)\frac{d}{dx} - \frac{1}{4}\left[|e|\left(|m|+1\right) + \frac{\varepsilon_0}{B}\right]\right\}f = 0.$$

Перейдем к переменной y:

$$\frac{|e|}{2}x = y, \quad \left\{y\frac{d^2}{dy^2} + \left(|m| + 1 - y\right)\frac{d}{dy} - \frac{1}{2|e|}\left[|e|\left(|m|+1\right) + \frac{\varepsilon_0}{B}\right]\right\}f = 0.$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение $yF'' + (\gamma - y)F' - \alpha F = 0$ с параметрами

$$\gamma = |m| + 1, \quad \alpha = \frac{1}{2|e|}\left(|e|\left(|m|+1\right) + \frac{\varepsilon_0}{B}\right)f = 0.$$

Условие обрыва ряда до полинома $\alpha = -n, \quad n = 0, 1, 2, ...$ дает правило квантования энергии:

$$\varepsilon_0 = -|e|\left[2n + |m| + 1\right]B,$$

откуда следует

$$\varepsilon - \frac{p_z^2}{2M} = \frac{1}{2M}\left[|e|B\left(2n + |m| + 1\right) + eB\left(\frac{2}{3}S_3 - m\right)\right]. \tag{10}$$

Эта формула описывает 4 серии уровней, в зависимости от значения S_3. На построенных решениях диагонализируются 4 оператора с квантовыми числами ε, p_z, m, S_3; магнитное квантовое число принимает значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.

Модель Фрадкина, нерелятивистский предел. Уравнение паулиевского типа для частицы Фрадкина во внешнем магнитном поле имеет вид

$$\left(\partial_4-\frac{1}{2M}\vec{D}^2\right)\Psi-\frac{e}{3M}\left(F_{12}S_3+F_{31}S_2+F_{23}S_1\right)\Psi+\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\times$$

$$\times\left\{F_{23}F_{23}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1&0&-1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&-1&0&-1\end{vmatrix}+F_{31}F_{31}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\end{vmatrix}-2F_{12}F_{12}\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+iF_{12}F_{31}\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}+F_{12}F_{23}\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&2&0\\0&-2&0&-1\\0&0&-1&0\end{vmatrix}+iF_{31}F_{23}\begin{vmatrix}1&0&-2&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&2&0&-1\end{vmatrix}\right\}\Psi=0. \quad (11)$$

Величина Λ обозначает дополнительный параметр, входящий в исходное релятивистское уравнение Фрадкина. Он связан с некоторой дополнительной к заряду электромагнитной характеристикой частицы. Структура нерелятивистского уравнения позволяет рассматривать его как поляризуемость. Спиновые матрицы S_i определены выше.

Рассмотрим это уравнение в однородном магнитном поле, ориентированном вдоль оси x_3:

$$D_k=\partial_k-ieA_k,\quad A_1=-\frac{1}{2}By,\quad A_2=\frac{1}{2}Bx,\quad B>0,\quad F_{[12]}=-B.$$

Уравнение Паули в заданном магнитном поле имеет следующий вид:

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}\vec{D}^2\right)\Psi-\frac{eB}{3M}S_3\Psi-\frac{8}{M}\left(\frac{e\Lambda B}{3M}\right)^2\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}\Psi=0,$$

или

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}\vec{D}^2\right)\Psi-\frac{eB}{3M}S_3\Psi+\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda B}{3M}\right)^2\left(S_3^2-\frac{9}{4}\right)\Psi=0. \quad (12)$$

Переменные разделяются прежней подстановкой $\Phi=e^{im\varphi}e^{ip_zz}R(r)$, таким образом получим уравнение

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+2M\varepsilon+\frac{2eB}{3}S_3-8\left(\frac{eB\Lambda}{3M}\right)^2\left(S_3^2-\frac{9}{4}\right)-p_z^2+eBm-\frac{m^2}{r^2}-\frac{e^2B^2r^2}{4}\right\}\Psi=0.$$

Дальше анализ совпадает со сделанным в предыдущем разделе. Приведем конечную формулу для энергий:

$$2M\varepsilon=eB(2n+|m|+1)+eB\left(m+\frac{2}{3}S_3\right)+8\left(\frac{eB\Lambda}{3M}\right)^2\left(S_3^2-\frac{9}{4}\right)+p_z^2. \quad (13)$$

Уравнение Фрадкина в римановом пространстве-времени. Обобщим теорию Фрадкина, чтобы учесть риманову структуру пространства-времени. Вместо *ict*-метрики пространства Минковского будем использовать метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$ с сигнатурой $(+,-,-,-)$. Соответственно используем несколько другие матрицы Дирака и добавляем множитель i перед массовым параметром M:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{vmatrix}, \quad M \to iM.$$

Удлиненные производные обобщаются так:

$$D_\alpha(x) = \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x), \quad \hat{D} = \gamma^\alpha(x) D_\alpha(x),$$

где $\Gamma_\alpha(x)$ – биспинорная связность, локальные матрицы Дирака определяются через тетрады $\gamma^\alpha(x) = \gamma^a e^\alpha_{(a)}(x)$. Следует учитывать коммутационные соотношения [15]

$$\hat{D}(x) = \gamma^\rho(x) D_\beta = D_\beta \gamma^\rho(x), D^2 = D^\alpha D_\alpha, \quad D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha = ieF_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sigma^{\nu\rho}(x) R_{\nu\rho\alpha\beta}(x),$$

$$D_\mu \hat{D} - \hat{D} D_\mu = \left(ieF_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}\right), \quad \Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\rho\sigma}(x) R_{\rho\sigma\mu\nu}(x), \quad \hat{D}\hat{D} = D^2 + \Sigma(x),$$

$$\Sigma(x) = \left[ieF_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sigma^{\nu\rho}(x) R_{\nu\rho\alpha\beta}(x)\right]\sigma^{\alpha\beta}(x), \quad \sigma^{\nu\rho}(x) = \frac{\gamma^\nu(x)\gamma^\rho(x) - \gamma^\rho(x)\gamma^\nu(x)}{4},$$

где использован тензор кривизны Римана. Ковариантный тензор Леви-Чивита и матрица $\gamma^5(x)$ определены равенствами [15]

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = \varepsilon^{abcd} e^\alpha_{(a)}(x) e^\beta_{(b)}(x) e^\rho_{(c)}(x) e^\sigma_{(d)}(x),$$

$$\gamma^5(x) = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}(x)\, \gamma^\alpha(x)\gamma^\beta(x)\gamma^\rho(x)\gamma^\sigma(x) = \gamma^5.$$

Тензор Леви-Чивита относительно тетрадных преобразований ведет себя согласно $\varepsilon'^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = -\det[L_{ai}(x)]\, \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x)$, а относительно тетрадного P-отражения является псевдоскаляром $\varepsilon^{(p)\alpha\beta\rho\sigma}(x) = (-1)\, \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x)$.

Для ковариантного вектор-биспинора

$$\Phi_\lambda(x) = \left[\psi_\lambda(x) - \frac{1}{4}\gamma_\lambda(x)\gamma^\mu(x)\psi_\mu\right] + \frac{1}{4}\gamma_\lambda\left[\lambda_7\gamma^\mu(x)\psi_\mu(x) - i\lambda_8\psi_0(x)\right]$$

получаем уравнение

$$\frac{i}{8}\left(8\hat{D}\Phi^\alpha + \frac{1}{6}\gamma^\alpha\hat{D}\gamma^\rho\Phi_\rho + 4D^\alpha\gamma^\rho\Phi_\rho - \frac{14}{3}\gamma^\alpha D^\rho\Phi_\rho\right) - M\Phi^\alpha -$$
$$-\frac{(\lambda_1\lambda_5 - \lambda_2\lambda_4)}{3M}\gamma^\alpha\gamma^\nu\left[ieF_{\nu\mu}(x) + \Sigma_{\nu\mu}(x)\right]\left[\Phi^\mu + \frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma^\rho\Phi_\rho\right] = 0. \tag{14}$$

Учитывая свойства симметрии тензора кривизны и правило умножения для трех матриц Дирака, член из второго слагаемого приводим к форме

$$\gamma^\nu\left(ieF_{\nu\mu} + \Sigma_{\nu\mu}\right) = \gamma^\nu\left(ieF_{\nu\mu} - \frac{1}{2}R_{\nu\mu}\right),$$

где $R_{\nu\mu}$ – тензор Риччи. Следовательно, уравнение (14) записывается так:

$$i\left(\hat{D}\Phi^\alpha + \frac{1}{48}\gamma^\alpha\hat{D}\gamma^\rho\Phi_\rho + \frac{1}{2}D^\alpha\gamma^\rho\Phi_\rho - \frac{7}{12}\gamma^\alpha D^\rho\Phi_\rho\right) - M\Phi^\alpha -$$
$$-\frac{(\lambda_1\lambda_5 - \lambda_2\lambda_4)}{3M}\gamma^\alpha\left(ieF_{\nu\mu} - \frac{1}{2}R_{\nu\mu}\right)\gamma^\nu\left(\Phi^\mu + \frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma^\rho\Phi_\rho\right) = 0.$$

Это уравнение Фрадкина в минимальной форме, пригодное в произвольном псевдоримановом пространстве-времени.

Если электрический заряд частицы равен нулю, последнее уравнение становится проще: член с электромагнитным тензором $F_{\mu\nu}$ исчезает, удлиненная производная задается равенством

$D_\rho = \nabla_\rho + \Gamma_\rho(x)$. Следует заметить, что в любом майорановском базисе [2, 15] относительно операции комплексного сопряжения выполняются свойства $(\gamma^\alpha)^* = -\gamma^\alpha$, $(\Gamma_\alpha)^* = +\Gamma_\alpha$. Поэтому выведенное уравнение не будет смешивать вещественную и мнимую части волновой функции; это значит, что теория Фрадкина сохраняет свою применимость и для майорановских частиц со спином 3/2.

Список использованных источников

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. R. Soc. London. Ser. A – Math. Phys. Sci. – 1936. – Vol. 155, № 886. – P. 447–459. https://doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Majorana, E. Teoria simmetrica dell'elettrone e dell positrone / E. Majorana // Nuovo Cimento. – 1937. – Vol. 14, № 4. – P. 171–186. https://doi.org/10.1007/bf02961314

3. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.

4. Pauli, W. Überrelativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.

5. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. S. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64. https://doi.org/10.1103/physrev.60.61

6. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, № 2/3. – P. 200–216. https://doi.org/10.1103/revmodphys.17.200

7. Гельфанд, И. М. Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

8. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.

9. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. Акад. наук СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.

10. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитными и мезонными полями / В. Я. Файнберг // Тр. ФИАН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

11. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

12. Богуш, А. А. Уравнение для частицы со спином 3/2, обладающей аномальным магнитным моментом / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

13. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Изв. вузов. Физика. – 1985. – № 1. – С. 91–95.

14. Плетюхов, В. А. О взаимосвязи между различными формулировками теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. Акад. навук БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1985. – № 5. – С. 90–95.

15. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 486 с.

16. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.

17. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems. / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

18. Fradkin equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields / V. V. Kisel [et al.] // Ukr. J. Phys. – 2019. – Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117. https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1112

References

1. Dirac P. A. M. Relativistic wave equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A – Mathematical and Physical Sciences*, 1936, vol. 155, no. 886, pp. 447–459. https://doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Majorana E. Teoria simmetrica dell'elettrone e dell positrone. *Nuovo Cimento*, 1937, vol. 14, no. 4, pp. 171–186. https://doi.org/10.1007/bf02961314

3. Fierz M. Über die relativistische theorie Kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 3–37.

4. Pauli W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 297–300.

5. Rarita W., Schwinger J. S. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 1941, vol. 60, no. 1, pp. 61–64. https://doi.org/10.1103/physrev.60.61

6. Bhabha H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles. *Reviews of Modern Physics*, 1945, vol. 17, no. 2–3, pp. 200–216. https://doi.org/10.1103/revmodphys.17.200

7. Gelfand I. M., Yaglom A. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group. *Zhurnal Eksperimentalnoy I Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1948, vol. 18, no. 8, pp. 703–733 (in Russian).

8. Fradkin E. S. To the theory of particles with higher spins. *Zhurnal Eksperimentalnoy I Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1950, vol. 20, no. 1, pp. 27–38 (in Russian).

9. Fedorov F. I. Generalized relativistic wave equations. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, 1952, vol. 82, no. 1, pp. 37–40 (in Russian).

10. Feinberg V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields. *Trudy Fizicheskogo instituta im. P. N. Lebedeva Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR*, 1955, vol. 6, pp. 269–332 (in Russian).

11. Petras M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2. *Czechoslovak Journal of Physics,* 1955, vol. 5, no. 3, pp. 418–419.

12. Bogush A. A., Kisel V. V. Equation for a 3/2 particle with anomalous magnetic moment. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika = Russian Physics Journal*, 1984, vol. 1, pp. 23–27 (in Russian).

13. Pletyukhov V. A., Strazhev V. I. To the theory of particles of spin 3/2. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika = Russian Physics Journal*, 1985, vol. 28, no. 1, pp. 91–95 (in Russian).

14. Pletyukhov V. A., Strazhev V. I. On the relationship between various formulations of particle theory with spin 3/2. *Vestsi Akademii navuk Belarusi BSSR. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics series*, 1985, vol. 5, pp. 90–95 (in Russian).

15. Red'kov V. M. *Particle fields in the Riemann space and the Lorents group.* Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2009. 486 p. (in Russian).

16. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic wave equations and internal degrees of freedom*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2015. 328 p. (in Russian).

17. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Ya. A., Balan V., Red'kov V. M. *Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems*. New York, Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.

18. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Ivashkevich A. V., Red'kov V. M. Fradkin equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields. *Ukraine Journal of Physics*, 2019, vol. 64, no. 12, pp. 1112–1117. https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1112

Информация об авторах

Ивашкевич Алина Валентиновна – магистрант, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Войнова Янина Александровна – кандидат физико-математических наук, преподаватель, Минское суворовское военное училище (ул. М. Богдановича, 29, 220029, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: voinovayanina@mail.ru

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Кисель Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasiliy_bspu@ mail.ru

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Alina V. Ivashkevich – Master Student, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Yanina A. Voynova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Teacher, Minsk Suvorov Military School (29, M. Bogdanovich Str., 220029, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: voinyuschka@mail.ru

Elena M. Ovsiyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Vasily V. Kisel – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Physics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasiliy_bspu@ mail.ru

Viktor M. Red'kov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center «Fundamental Interactions and Astrophysics», B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by