УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПЕРЕСТАНОВКИ ПУАНКАРЕ – БЕРТРАНА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 17.01.2014)

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ – гладкая замкнутая ориентированная кривая, а функция $\varphi(\zeta,\tau): L\times L \to \mathbb{C}$ достаточное число раз дифференцируема. Для простоты будем считать, что $\varphi(\zeta,\tau)\in C^{\infty}(L\times L)$. Формула перестановки Пуанкаре – Бертрана

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)\,d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2\varphi(t,t) + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)\,d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}\,, \quad t\in L\,, \tag{1}$$

касается изменения порядка интегрирования в повторном сингулярном интеграле, где оба интеграла (внешний и внутренний) понимаются в смысле главного значения по Коши.

Повторный интеграл

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}\int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)\,d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}}, \quad t\in L\,, \quad m,n = 0,1,2,\ldots \quad , \tag{2}$$

существует в смысле конечной части по Адамару [1, с. 123–125] и является более общим по сравнению с интегралом, стоящим в левой части равенства (1). Цель этой работы – обобщить формулу (1) на повторный интеграл (2). Все интегралы, встречающиеся ниже, понимаются в смысле конечной части по Адамару. Предварительно установим следующую простую лемму.

Л е м м а. *При любых целых* $m \ge 0$, $n\ge 0$ *и при* $t\in L$, $\zeta \in L$ *имеем:*

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}(\zeta-\tau)^{n+1}} = 0\,. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выбрасывая из контура L части, попадающие в круги $|z-t|<\rho$ и $|z-\zeta|<\rho$ соответственно с центрами в точках t и ζ, достаточно малого радиуса ρ и заменяя выброшенные части дугами окружностей, видим, что интеграл (3) равен произведению πi на сумму вычетов подынтегральной функции в точках t и ζ. При $t\ne\zeta$ имеем:

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}(\zeta-\tau)^{n+1}} = \pi i\left[\operatorname{res}_{\tau=t}\frac{1}{(\tau-t)^{m+1}(\zeta-\tau)^{n+1}} + \operatorname{res}_{\tau=\zeta}\frac{1}{(\tau-t)^{m+1}(\zeta-\tau)^{n+1}}\right] =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi i}{m!}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^m (\tau-\zeta)^{-n-1}\Big|_{\tau=t} + \frac{\pi i}{n!}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^n(\tau-\zeta)^{-m-1}\Big|_{\tau=\zeta} =$$

$$= \frac{\pi i}{m!}\frac{(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-m)}{(t-\zeta)^{n+m+1}} + \frac{\pi i}{n!}\frac{(-m-1)(-m-2)\cdots(-m-n)}{(t-\zeta)^{m+n+1}} =$$

$$= \frac{\pi i(m+n)!}{m!n!}\left[\frac{(-1)^m}{(t-\zeta)^{n+m+1}} + \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+m+1}(t-\zeta)^{m+n+1}}\right] = 0\,.$$

Если же $\tau=\zeta$, то

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+n+2}} = \pi i \cdot \operatorname{res}_{\tau=t} \frac{1}{(\tau-t)^{m+n+2}} = \frac{\pi i}{(m+n+1)!}\left(\frac{d}{d\tau}\right)(1) = 0 .$$

Лемма доказана.

Будем использовать следующие равенства:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = m! \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad t \in L . \tag{4}$$

Первое из них принадлежит Р. С. Исаханову, Ю. М. Крикунову [2, с. 43], а второе является следствием установленных в работе [3] обобщенных формул Сохоцкого

$$\Phi\left(t^{\pm}\right) = \pm \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{m!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-z)^{m+1}}, \quad t \in L ,$$

для интеграла

$$\Phi(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad z \notin L.$$

Переходя непосредственно к обобщению формулы (1), запишем сначала ее для частной производной $\dfrac{\partial^n \varphi(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^n}$:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\partial^n \varphi(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2 \frac{\partial^n \varphi(\zeta,t)}{\partial \zeta^n}\Bigg|_{\zeta=t} + \int_L d\zeta \int_L \frac{\partial^n \varphi(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^n}\frac{d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}.$$

В силу (4) это равенство можно переписать в следующем виде:

$$n!\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\pi^2 \frac{\partial^n (\zeta,t)}{\partial \zeta^n}\Big|_{\zeta=t} + n!\int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}}. \tag{5}$$

Действуя на это равенство оператором $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^m$, получим:

$$m!n!\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}\int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}} =$$
$$= -\pi^2 \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\frac{\partial^n \varphi(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^n}\Big|_{\zeta=t}\right] + n!\left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}}. \tag{6}$$

Осталось показать, что в последнем слагаемом равенства (6) можно дифференцировать под знаком повторного интеграла. С этой целью разложим $\varphi(\zeta,\tau)$ по степеням разности $\tau-\zeta$:

$$\varphi(\zeta,\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \varphi(\zeta,\tau)}{\partial \tau^k}\Big|_{\tau=\zeta} \cdot (\tau-\zeta)^k + (\zeta-\tau)^{n+1} r(\zeta,\tau), \tag{7}$$

где $r(\zeta,\tau) \in C^{\infty}(L,L)$. Тогда получим

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} =$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_L \frac{\partial^K \varphi(\zeta,\tau)}{\partial \tau^k}\Big|_{\tau=\zeta} d\zeta \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1-k}} + \int_L \frac{r(\zeta,\tau)}{\tau-t}d\tau\right]. \tag{8}$$

В силу леммы в последнем равенстве все внутренние интегралы под знаком суммы равны нулю. Значит, и вся сумма равна нулю, и мы имеем

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} = \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta,\tau)}{\tau-t}d\tau =$$
$$= \int_L d\zeta \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L \frac{r(\zeta,\tau)}{\tau-t}d\tau = m!\int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta,\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}.$$

Подставим сюда вместо $r(\zeta,\tau)$ выражение из (7) и, опять воспользовавшись леммой, получим

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)\, d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} = -m!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_L \frac{\partial^k \varphi(\zeta,\tau)}{\partial\tau^k}\Big|_{\tau=\zeta} d\zeta \int_L \frac{d\tau}{(\zeta-\tau)^{n+1}(\tau-t)^{m+1}} +$$
$$+m!\int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\tau}{(\zeta-\tau)^{n+1}(\tau-t)^{m+1}} = m!\int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}(\zeta-\tau)^{n+1}}.$$

Подставив это в правую часть равенства (6) и разделив на $m!n!$, получим окончательно

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\frac{\pi^2}{m!n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n \varphi(\zeta,\tau)\Big|_{\zeta=t}\right] + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)\, d\tau}{(\tau-t)^{m+1}(\zeta-\tau)^{n+1}},\quad t\in L. \quad (9)$$

Это и есть искомое обобщение формулы (1). При $m = n = 0$ формула (9) переходит в формулу (1). В случае, когда $\varphi(\zeta,\tau) \equiv \varphi(\zeta)$, т. е. не зависит от τ, интеграл в правой части равенства (9) исчезает (в силу леммы), и мы имеем равенство

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\frac{\pi^2}{m!n!}\varphi^{(m+n)}(t), \quad t\in L,$$

обобщающее известное свойство инволютивности сингулярного интегрального оператора, имеющее место при $m = n = 0$.

Литература

1. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М., 1966.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1973.
3. *Зверович Э. И.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 24–28.

E. I. ZVEROVICH

GENERALIZATION OF THE COMMUTATION POINCARÉ – BERTRAND FORMULA

Summary

The autor generalizes the formula

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2\varphi(t,t) + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}, \quad t\in L,$$

for the integral $\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}\int_L \frac{\varphi(\zeta,\tau)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}}$ that it is understood in the meaning of the Hadamart finite part.