ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-398-407

Поступила в редакцию 29.10.2020
Received 29.10.2020

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ГЛАВНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГРАФА И ЕГО ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ

Аннотация. Понятие (κ,τ)-регулярного множества вершин впервые появилось в 2004 г. Оказалось, что существование многих классических комбинаторных структур в графе, таких как совершенные паросочетания, гамильтоновы циклы, эффективные доминирующие множества и др., может быть охарактеризовано с помощью (κ,τ)-регулярных множеств, определение которых эквивалентно нахождению этих классических комбинаторных структур. В свою очередь определение (κ,τ)-регулярных множеств тесно связано со свойствами главного спектра графа. В статье обобщаются известные свойства (κ,κ)-регулярных множеств графа на произвольные (κ,τ)-регулярные множества графов с акцентом на связь их с классическими комбинаторными структурами. Также приводится алгоритм распознавания гамильтоновости графа, который становится полиномиальным в некоторых классах графов, например в классе графов с фиксированным цикломатическим числом.

Ключевые слова: совершенное паросочетание, гамильтонов цикл, эффективное доминирующее множество, матрица смежности, (κ,τ)-регулярное множество, главный спектр графа

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Главные собственные значения графа и его гамильтоновость / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 398–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-398-407

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

MAIN EIGENVALUES OF A GRAPH AND ITS HAMILTONICITY

Abstract. The concept of (κ,τ)-regular vertex set appeared in 2004. It was proved that the existence of many classical combinatorial structures in a graph like perfect matchings, Hamiltonian cycles, effective dominating sets, etc., can be characterized by (κ,τ)-regular sets the definition whereof is equivalent to the determination of these classical combinatorial structures. On the other hand, the determination of (κ,τ)-regular sets is closely related to the properties of the main spectrum of a graph. This paper generalizes the well-known properties of (κ,κ)-regular sets of a graph to arbitrary (κ,τ)-regular sets of graphs with an emphasis on their connection with classical combinatorial structures. We also present a recognition algorithm for the Hamiltonicity of the graph that becomes polynomial in some classes of graphs, for example, in the class of graphs with a fixed cyclomatic number.

Keywords: perfect matching, Hamiltonian cycle, effective dominating set, adjacency matrix, (κ,τ)-regular set, main spectrum of a graph

For citation. Benediktovich V. I. Main eigenvalues of a graph and its Hamiltonicity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 398–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-398-407

Пусть G – простой неориентированный связный граф порядка n и размера m с множеством вершин $V(G)=\{v_1,...,v_n\}$ и множеством ребер $E(G)$. *Матрицей смежности* графа $A(G)=(a_{ij})$ графа G называется квадратная матрица порядка n, такая, что:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } v_i v_j \in E(G),\\ 0, \text{ если } v_i v_j \notin E(G).\end{cases}$$

Известно, что компонента $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k – это *число маршрутов длины* k из вершины v_i в вершину v_j. Если обозначить через j $(n \times 1)$-вектор-столбец, все компоненты которого равны 1, то i-я компонента вектора $A^k j$ – это *число маршрутов длины* k *из вершины* v_i. Обозначим через $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ собственные значения матрицы смежности $A(G)$, взятые вместе со своими кратно-

© Бенедиктович В. И., 2020

стями. Множество этих собственных значений будем называть *спектром* графа G и обозначать через $Sp(G)$. Для каждого собственного значения $\lambda \in Sp(G)$ обозначим соответствующее ему *собственное пространство* через $\mathcal{E}_G(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda E - A)x = 0\}$. Граф G называется *вырожденным с дефектом* η, если $\dim \mathcal{E}_G(0) = \dim \ker\big(A(G)\big) = \eta$. Различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, каждое из которых имеет соответствующий собственный вектор, не ортогональный вектору j, называются, как и соответствующие им собственные векторы, *главными*. При этом множество $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ образует *главный спектр* графа G. Остальные различные собственные значения $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, ..., \lambda_s$, $s \le n$, называются *неглавными*. Заметим, что по теореме Фробениуса – Перрона [1] любой граф G содержит главное собственное значение, равное его *индексу*.

Многочлен

$$M(G,x) =: \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i) = x^p - c_0 x^{p-1} - c_1 x^{p-2} - ... - c_{p-2} x - c_{p-1}, \quad (1)$$

корнями которого являются все главные собственные значения графа G, называется *главным характеристическим многочленом* графа G. Нетрудно показать, что все его коэффициенты являются целыми числами [2].

Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ можно разложить в прямую сумму: $\mathbb{R}^n = Main(G) \oplus \big(Main(G)\big)^{\perp}$, где векторное пространство $Main(G)$ натянуто на ортонормированную систему из p главных собственных векторов, относящихся к соответствующим главным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, а векторное пространство $\big(Main(G)\big)^{\perp}$ натянуто на ортонормированную систему из остальных $(n - p)$ собственных векторов, ортогональных j. При этом оба векторных пространства $Main(G)$ и $\big(Main(G)\big)^{\perp}$ являются A-инвариантными [3].

Матрица $W = (j \; Aj \; A^2 j \; ... \; A^{p-1} j)$ размера $(n \times p)$ называется *матрицей маршрутов* графа G. Можно показать, что векторное пространство $ColSpW =: \langle j, Aj, A^2 j, ..., A^{p-1} j \rangle$, натянутое на столбцы матрицы маршрутов, совпадает с пространством $Main(G)$ [3]. Кроме того, добавление новых столбцов вида $A^i j$, $i \in \mathbb{N}$, к матрице маршрутов не увеличивает ее ранг в силу известного равенства [3]:

$$A^p j = W \begin{pmatrix} c_{p-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Важную роль в нахождении главного спектра графа G играет следующая матрица:

$$C =: \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

поскольку она обладает следующими свойствами [3]:

1) определяет матрицу маршрутов, т. е. матрица W является матрицей маршрутов тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AW = WC$;

2) спектр $Sp(C)$ матрицы C совпадает с главным спектром графа G.

Кроме матрицы смежности будем также рассматривать *беззнаковую матрицу Лапласа* (*беззнаковый лапласиан*) графа G: $Q(G) =: D(G) + A(G)$, где $D(G)$ – диагональная матрица, состоящая из диагональных элементов, равных степеням d_v вершин графа G. Матрица $Q(G)$ является симметрической и положительно полуопределенной.

Подразбиением графа G порядка n и размера m называется граф G^* порядка $(n+m)$ и размера $2m$, который получается из графа G заменой каждого ребра $e = vu$ простой цепью длины 2, т. е. добавлением новой вершины w_e и заменой ребра $e = vu$ двумя новыми ребрами vw_e и uw_e. *Реберный граф* $L(G)$ графа G – это граф, вершинами которого являются ребра графа G, при этом они смежны, если существует в точности одна вершина, инцидентная соответствующим ребрам графа G. *Цикломатическое число* связного графа – это число ребер, которое нужно удалить из графа, чтобы получить дерево, т. е. число, равное $\gamma(G) = m - n + 1$. Для каждой вершины $v \in V(G)$ ее *окружением* называется множество $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ ее *соседей*. Через $G[K]$ будем обозначать граф, *порожденный* подмножеством вершин $K \subset V(G)$. Подмножество вершин $S \subset V(G)$ называется (κ,τ)-*регулярным*, если граф $G[S]$ является κ-регулярным графом, а для любой вершины $v \in V(G) \setminus S$ число ее соседей в S равно τ, т. е. $|N_G(v) \cap S| = \tau$. Вектор x_S, у которого i-я компонента равна 1, если $v_i \in S$, и равна 0, если $v_i \notin S$, называется *характеристическим вектором* множества S. Справедливо

У т в е р ж д е н и е 1 [3]. *Если* x_S – *характеристический вектор* (κ,τ)-*регулярного множества* S *графа* G *с матрицей смежности* $A = A(G)$, *то справедливо равенство*:

$$\left(A - (\kappa - \tau)E\right)x_S = \tau j. \tag{4}$$

Верно и обратное утверждение: *всякое* (0,1)-*решение системы* (4) *определяет некоторое* (κ,τ)-*регулярное множество* S *графа* G [4].

Л е м м а 1. *Пусть* G – *произвольный граф порядка* n *и размера* m, G^* – *его подразбиение,* $Q(G)$ – *беззнаковый лапласиан графа* G. *Тогда справедливо равенство*

$$\chi_{A(G^*)}(\lambda) = \lambda^{m-n} \cdot \chi_{Q(G)}(\lambda^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B_{n\times m} = (b_{ij})_{n\times m}$ – *матрица инцидентности* графа G:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Тогда беззнаковый лапласиан графа G равен $Q(G) = BB^T$, а матрица смежности подразбиения G^* графа G равна $A(G^*) = \begin{pmatrix} O_{m\times m} & B^T_{m\times n} \\ B_{n\times m} & O_{n\times n} \end{pmatrix}$. Поэтому, используя известное равенство Шура, имеем

$$\chi_{A(G^*)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E_m & -B^T \\ -B & \lambda E_m \end{vmatrix} = \lambda^{m-n}\left|\lambda^2 - BB^T\right| = \lambda^{m-n} \cdot \chi_{Q(G)}(\lambda^2).$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Если* 0 – *главное собственное значение беззнакового лапласиана* $Q(G)$ *графа* G, *то* 0 *является главным собственным значением матрицы смежности* $A(G^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущей лемме 0 является собственным значением матрицы смежности $A(G^*)$. Пусть существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что $Q(G)x = BB^T x = 0$ и $(x, j_n) \neq 0$. Тогда, очевидно, $B^T x = 0$. Положим $y = \begin{pmatrix} 0_m \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$. Поэтому имеем

$$A(G^*)y = \begin{pmatrix} O_m & B^T_{m\times n} \\ B_{n\times m} & O_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_m \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T x \\ 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m \\ 0_n \end{pmatrix},$$

причем $(y, j_{m+n}) = (x, j_n) \neq 0$, т. е. 0 – главное собственное значение матрицы смежности $A(G^*)$. Лемма 2 доказана.

Известно утверждение из [3].

Л е м м а 3 [3]. *Если* 0 – *главное собственное значение подразбиения* G^* *графа* G, *то граф* G *не гамильтонов.*

Из лемм 1–3 непосредственно вытекает справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 1. *Если* 0 – *главное собственное значение беззнакового лапласиана* $Q(G)$ *графа G, то граф G не гамильтонов.*

Пусть $L(G)$ обозначает реберный граф графа G. Далее нам понадобится еще одно утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2 [4]. *Граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда его реберный граф содержит* (2,4)-*регулярное множество S*, *индуцирующее связный подграф.*

Т е о р е м а 2. *Если* (–2) – *главное собственное значение реберного графа* $L(G)$ *графа G, то граф G не гамильтонов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что граф G гамильтонов. Тогда по предыдущему утверждению его реберный граф $L(G)$ содержит (2,4)-регулярное множество S, для характеристического вектора которого x_S в силу утверждения 1 справедливо равенство

$$A\big(L(G)\big)x_S = 4j - 2x_S,$$

что, в силу известного равенства $A\big(L(G)\big) = (B^T B) - 2E$, равносильно

$$(B^T B)x_S = \big(A\big(L(G)\big) + 2E\big)x_S = 4j.$$

Поэтому если собственный вектор v относится к собственному значению (–2) матрицы смежности $A\big(L(G)\big)$, то v является собственным вектором, относящимся к собственному значению 0 матрицы $B^T B$. А значит, имеем цепочку равенств

$$0 = \Big((B^T B)v\Big)^T x_S = v^T (B^T B)x_S = 4v^T j = 4(v, j),$$

откуда получаем, что $(v, j) = 0$. Значит, v – неглавный собственный вектор, а (–2) – неглавное собственное значение, противоречие. Теорема 2 доказана.

Далее докажем обобщение теорем 1 и 2. Для этого мы установим справедливость некоторых утверждений для (κ,τ)-регулярных множеств, обобщающих соответствующие утверждения из [3], справедливых для (κ,κ)-регулярных множеств.

Т е о р е м а 3. *Пусть граф G с матрицей смежности A имеет* (κ,τ)-*регулярное множество S, тогда для его характеристического вектора* x_S *имеет место разложение*

$$x_S = g + q, \tag{5}$$

где $g = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i A^i j$ *и* $q \in \big(Main(G)\big)^{\perp}$, *причем*

$$Aq = (\kappa - \tau)q;$$

$$\alpha_{p-1}c_{p-1} - \alpha_0(\kappa - \tau) = \tau, \quad \alpha_i - \alpha_{i+1}(\kappa - \tau) + \alpha_{p-1}c_{p-2-i} = 0, \;\; i = \overline{0, p-2}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, поскольку $\mathbb{R}^n = ColSp(W) \oplus \big(ColSp(W)\big)^{\perp}$ и $ColSp(W) = Main(G)$, то разложение (5), где $q \in \big(Main(G)\big)^{\perp}$, очевидно. Откуда получаем

$$Ax_S = A\left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i A^i j\right) + Aq, \tag{7}$$

причем в силу A-инвариантности подпространств $Main(G)$ и $\big(Main(G)\big)^{\perp}$ первое слагаемое (7) лежит в пространстве $Main(G)$, а второе – в $\big(Main(G)\big)^{\perp}$. С другой стороны, в силу равенства (4) имеем

$$Ax_S = (\kappa - \tau)x_S + \tau j = (\kappa - \tau)\left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i A^i j + q\right) + \tau j = \big(\alpha_0(\kappa - \tau) + \tau\big)j + (\kappa - \tau)\left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i A^i j\right) + (\kappa - \tau)q, \tag{8}$$

где сумма первых двух слагаемых лежит в пространстве $Main(G)$, а третье – в $\big(Main(G)\big)^{\perp}$. Поэтому, в силу единственности разложения вектора в прямую сумму двух векторов, из (7) и (8), в частности, получаем $Aq = (\kappa - \tau)q$.

Обозначим $F = A-(\kappa-\tau)E$. Тогда последнее равенство можно записать в виде $Fq = 0$. Следовательно, имеем цепочку равенств

$$F(x_S - q) = Fx_S - Fq = Fx_S = Ax_S - (\kappa-\tau)x_S = \tau j.$$

С другой стороны, в силу равенства (2) $A^p j = c_{p-1} j + \ldots + c_0 A^{p-1} j$, поэтому имеем

$$F(x_S - q) = F\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i A^i j\right) = \sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i A^{i+1} j - (\kappa-\tau)\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i A^i j =$$

$$= \sum_{i=0}^{p-2}\big(\alpha_i - (\kappa-\tau)\alpha_{i+1}\big)A^{i+1} j - (\kappa-\tau)\alpha_0 j + \alpha_{p-1}A^P =$$

$$= (\alpha_{p-1}c_{p-1} - \alpha_0(\kappa-\tau))j + \sum_{i=0}^{p-2}\big(\alpha_i - (\kappa-\tau)\alpha_{i+1} + \alpha_{p-1}c_{p-2-i}\big)A^{i+1} j,$$

откуда, в силу линейной независимости векторов $j, Aj, A^2 j, \ldots, A^{p-1} j$, получаем равенства (6). Теорема 3 доказана.

Решая систему уравнений (6), нетрудно получить, в частности, равенство

$$-\tau = \alpha_{p-1} M\big(G, (\kappa-\tau)\big),$$

которое позволяет сформулировать следующее обобщение теорем 1 и 2.

Т е о р е м а 4. *Если граф G с матрицей смежности A имеет* (κ,τ)*-регулярное множество S, где* $\tau > 0$*, тогда* $(\kappa-\tau)$ *не может быть его главным собственным значением.*

Отметим, что это утверждение может быть доказано другим способом [5]. А именно, пусть λ – произвольное главное собственное значение матрицы смежности A с соответствующим главным собственным вектором u:

$$Au = \lambda u, \quad u^T j \neq 0.$$

Тогда $\lambda u^T = u^T A$, и поскольку (см. (4)) $Ax_S = (\kappa-\tau)x_S + \tau j$, то имеем цепочку равенств

$$\lambda u^T x_S = u^T A x_S = u^T\big((\kappa-\tau)x_S + \tau j\big) = (\kappa-\tau)u^T x_S + \tau u^T j,$$

откуда

$$\big(\lambda - (\kappa-\tau)\big)u^T x_S = \tau u^T j \neq 0,$$

поэтому

$$\lambda \neq (\kappa-\tau), \quad u^T x_S \neq 0.$$

Более того, можно получить явный вид главного собственного значения λ, связанный с его главным собственным вектором u. Так, из последнего равенства следует:

$$(\lambda-\kappa)u^T x_S = \tau(u^T j - u^T x_S) = \tau u^T(j - x_S) = \tau u^T x_{\overline{S}},$$

откуда

$$\lambda = \tau\frac{u^T x_{\overline{S}}}{u^T x_S} + \kappa = \tau\frac{u^T j}{u^T x_S} + (\kappa-\tau).$$

Хорошо известны следующие утверждения.

У т в е р ж д е н и е 3 [4]. *Граф $G \neq K_2$ имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда его реберный граф $L(G)$ содержит* (0,2)*-регулярное множество S.*

Напомним, что подмножество $S \subset V(G)$ называется *доминирующим*, если любая вершина $v \in V(G)\setminus S$ имеет, по крайней мере, одного соседа из множества S. Доминирующее множество вершин называется *эффективным*, если любая вершина $v \in V(G)\setminus S$ имеет в точности одного соседа из множества S.

Утверждение 4 [4]. *Подмножество вершин* $S \subset V(G)$ *графа G является эффективным доминирующим множеством тогда и только тогда, когда S является* (0,1)-*регулярным множеством графа G*.

Следствие 1. *Если* (–2) – *главное собственное значение реберного графа* $L(G)$ *графа* $G \neq K_2$*, то он не имеет совершенного паросочетания.*

Следствие 2. *Если* (–1) – *главное собственное значение графа G, то он не имеет эффективного доминирующего множества вершин.*

Кроме решения системы уравнений (6) разложение вектора g из равенства (5) по базису $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$ пространства $Main(G)$ можно найти также в матричном виде.

Как уже было показано при доказательстве теоремы 3, если граф G имеет (κ,τ)-регулярное множество, то справедливы два равенства:

i $(A-(\kappa-\tau)E)g = \tau j$;

ii $(A-(\kappa-\tau)E)q = 0$.

Будем различать два случая: 1) $(\kappa-\tau) \notin Sp(G)$ и 2) $(\kappa-\tau) \in Sp(G)$.

В случае 1) из ii следует, что $q = 0$, а значит, $x_S = g$. Поэтому в силу невырожденности матрицы $\left(A-(\kappa-\tau)E\right)$ из i следует $g = x_S = \tau\left(A-(\kappa-\tau)E\right)^{-1} j$, т. е. x_S является *единственным* решением системы $\left(A-(\kappa-\tau)E\right)x = \tau j$.

В случае 2) рассмотрим линейное преобразование пространства $Main(G)$:

$$\varphi : Main(G) \to Main(G),$$
$$x \mapsto \left((\kappa-\tau)E - A\right)x,$$

матрица которого в его базисе $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$, как нетрудно видеть, имеет вид

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} (\kappa-\tau) & 0 & \cdots & 0 & 0 & -c_{p-1} \\ -1 & (\kappa-\tau) & \cdots & 0 & 0 & -c_{p-2} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & -c_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & (\kappa-\tau) & -c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & (\kappa-\tau)-c_0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $M_\varphi = (\kappa-\tau)E - C$, где C – матрица (3), поэтому матрица M_φ вырождена тогда и только тогда, когда (κ – τ) – собственное значение матрицы C, что равносильно, (κ – τ) – главное собственное значение графа G. Поэтому в силу теоремы 4 и существования (κ,τ)-регулярного множества в графе G матрица M_φ обратима. Заметим также, что минор матрицы M_φ, стоящий в первых (p – 1) столбцах и последних (p – 1) строках $M_{23...p}^{12...p-1} = (-1)^{p-1} \neq 0$, поэтому $\operatorname{rank}(M_\varphi) \geq p-1$.

Очевидно, равенство i в базисе $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$ эквивалентно равенству

$$M_\varphi \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \end{pmatrix} = -\tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\tau e_1,$$

откуда получаем

$$g = W \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \end{pmatrix} = -\tau W M_\varphi^{-1} e_1.$$

Заметим, что

$$\det M_{\varphi} = \det\big((\kappa-\tau)E - C\big) = M\big(G,(\kappa-\tau)\big),$$

поэтому

$$M_{\varphi}^{-1} = \frac{1}{M\big(G,(\kappa-\tau)\big)} M_{\varphi}^{*},$$

где M_{φ}^{*} – *присоединенная матрица* для M_{φ}. А значит, чтобы вычислить произведение $M_{\varphi}^{-1}e_1$, достаточно найти только алгебраические дополнения для элементов первой строки матрицы M_{φ}. Нетрудно убедиться индукцией по p, что

$$M_{\varphi}^{*}e_1 = \begin{pmatrix} (\kappa-\tau)^{p-1} - c_0(\kappa-\tau)^{p-2} - \ldots - c_{p-2} \\ (\kappa-\tau)^{p-2} - c_0(\kappa-\tau)^{p-3} - \ldots - c_{p-3} \\ \vdots \\ (\kappa-\tau) - c_0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \overline{\alpha}.$$

Заметим, что вектор $\overline{\alpha}$ можно также получить, непосредственно решая систему уравнений (6). Поэтому окончательно получаем:

$$g = -\frac{\tau}{M\big(G,(\kappa-\tau)\big)} W\overline{\alpha},$$

где вектор $g_1 =: W\overline{\alpha}$, по аналогии с [3], назовем *дискриминирующим*, а вектор $g = -\frac{\tau}{M\big(G,(\kappa-\tau)\big)} W\overline{\alpha}$ – $(\kappa-\tau)$-*параметрическим вектором* графа G [5].

З а м е ч а н и е. В случае, когда $\kappa = \tau$ имеем $M(G,0) = -c_{p-1}$, и, значит,

$$\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} -c_{p-2} \\ -c_{p-3} \\ \vdots \\ -c_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\varphi}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c_{p-2}}{c_{p-1}} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{c_{p-3}}{c_{p-1}} & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c_0}{c_{p-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \frac{-1}{c_{p-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, вектор

$$g = -\frac{\tau}{c_{p-1}}\Big(c_{p-2}j + c_{p-3}Aj + \ldots + c_0A^{p-2}j - A^{p-1}j\Big) = -\frac{\tau}{c_{p-1}} g_1,$$

где вектор g_1 – это дискриминирующий вектор, полученный в [3].

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. *Для дискриминирующего вектора g_1 произвольного графа G с матрицей смежности A справедливо равенство $\big(A-(\kappa-\tau)E\big)g_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $(\kappa-\tau)$ является его главным собственным значением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждения очевидна, поскольку $g_1 \neq 0$.

Для доказательства достаточности предположим, что главный собственный вектор $u \in Main(G)$, соответствующий собственному значению (κ – τ), в базисе $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$ пространства $Main(G)$ имеет координатный столбец

$$\overline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix},$$

т. е. $u = W\overline{\beta}$. Тогда равенство $Au = (\kappa - \tau)u$ в базисе $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$ эквивалентно $M_\varphi \overline{\beta} = 0$, что эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} (\kappa-\tau)\beta_1 - c_{p-1}\beta_p = 0; \\ -\beta_1 + (\kappa-\tau)\beta_2 - c_{p-2}\beta_p = 0; \\ -\beta_2 + (\kappa-\tau)\beta_3 - c_{p-3}\beta_p = 0; \\ \qquad \cdots \\ -\beta_{p-1} + \big((\kappa-\tau) - c_0\big)\beta_p = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что компонента $\beta_p \neq 0$, иначе из (9), двигаясь снизу вверх, получим, что все компоненты $\beta_i = 0, \quad i = \overline{1, p}$, что противоречит определению собственного вектора u. Поэтому можно считать, $\beta_p = 1$, тогда из системы (9), снова двигаясь снизу вверх, последовательно находим остальные компоненты $\beta_i = 0, \quad i = \overline{1, p-1}$, которые, оказывается, совпадают с компонентами вектора $\overline{\alpha}$. Таким образом, получаем, что $u = \beta_p g_1$, т. е. $\ker M_\varphi = \langle g_1 \rangle$. Значит, $M_\varphi g_1 = 0$, что эквивалентно $\big(A - (\kappa-\tau)E\big)g_1 = 0$. Теорема 5 доказана.

Основываясь на доказанных утверждениях, далее представим ***алгоритм распознавания гамильтоновости графа***. Прежде всего, можно считать, что цикломатическое число связного графа G удовлетворяет неравенству $\gamma(G) \geq 1$. Сформулируем еще утверждение, которое будет использоваться при реализации алгоритма.

У т в е р ж д е н и е 5 [4]. *Пусть G – граф с* (κ,τ)*-регулярным множеством $S \subset V(G)$ и g – частное решение линейной системы уравнений*

$$\big(A - (\kappa-\tau)E\big)x = \tau j,$$

кроме того, (κ – τ) *является собственным вектором кратности t. Тогда характеристический вектор x_S множества S определяется равенством*

$$x_S = g + \sum_{j=1}^{t} \delta_{i_j} q_j,$$

где $\delta_{i_j} \in \{-g_{i_j}, 1 - g_{i_j}\}$, $j = \overline{1, t}$, а векторы $\langle q_1, q_2, ..., q_t \rangle = \mathcal{E}_G(\kappa-\tau)$, причем матрица $V = (q_1\ q_2 \ldots q_t)$, столбцы которой составлены из этих векторов, содержит единичную матрицу порядка t, стоящую в строках с номерами из множества индексов $I = \{i_1, i_2, ..., i_t\}$.

Алгоритм распознавания гамильтоновости графа.

Вход: матрица инцидентности размера $n \times m$ графа G порядка n и размера m.

Выход: ответ: является ли граф G гамильтоновым или нет; если граф G гамильтонов, выдается гамильтонов цикл в G.

Шаг 1. Найти матрицу смежности $A = A\big(L(G)\big)$ реберного графа $L(G)$ графа G по формуле

$$A\big(L(G)\big) = (B^T B) - 2E,$$

а также определить наименьшее натуральное число $p \geq 2$, при котором векторы $j, Aj, ..., A^{p-1}j, A^p j$ являются линейно зависимыми.

Шаг 2. Найти коэффициенты $1, c_0, c_1, ..., c_{p-2}, c_{p-1}$ характеристического многочлена

$$M\left(L(G), x\right) =: \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i) = x^p - c_0 x^{p-1} - c_1 x^{p-2} - ... - c_{p-2} x - c_{p-1}$$

графа $L(G)$ из решения однородной системы уравнений $W_{p+1} x = 0$, где матрица W_{p+1} размера $n \times (p+1)$ получается из матрицы маршрутов $W = (j \ Aj \ A^2 j \ ... \ A^{p-1} j)$ добавлением еще одного столбца $A^p j$.

Шаг 3. Вычислить дискриминирующий вектор $g_1 =: W\overline{\alpha}$, где

$$\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} (-2)^{p-1} - c_0(-2)^{p-2} - ... - c_{p-2} \\ (-2)^{p-2} - c_0(-2)^{p-3} - ... - c_{p-3} \\ \vdots \\ (-2) - c_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Если $(A + 2E)g_1 = 0$, то по теореме 5 число (–2) является главным собственным значением реберного графа $L(G)$, а значит, согласно теореме 2 граф G негамильтонов.

Если $(A + 2E)g_1 \neq 0$, то возможны 2 случая: 1) (–2) не является собственным значением реберного графа $L(G)$; 2) (–2) является собственным значением реберного графа $L(G)$ кратности t.

В случае 1) проверить, является ли вектор $g = \dfrac{2}{M\left(L(G), (-2)\right)} g_1$ (0,1)-вектором с n ненулевыми компонентами: если является, то граф G гамильтонов и (0,1)-вектор g – характеристический вектор гамильтонова цикла, иначе – негамильтонов.

В случае 2) перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Решить методом Гаусса систему уравнений $(A + 2E)x = 0$ и найти фундаментальную систему решений $q_1, q_2, ..., q_t$, соответствующих наборам $e_1, e_2, ..., e_t$, которые принимают свободные неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_t}$ с индексами из некоторого множества $I = \{i_1, i_2, ..., i_t\}$, где $t = \dim\ker(A + 2E)$ – дефект матрицы $(A + 2E)$. Положить множество $\Lambda =: \left\{(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t}) \mid \delta_{i_j} \in \{-g_{i_j}, 1 - g_{i_j}\}, i_j \in I\right\}$ и для каждого набора $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t})$ из множества Λ проверить, является ли вектор $g + \sum_{j=1}^{t} \delta_{i_j} q_j$ (0,1)-вектором с n ненулевыми компонентами: если существует такой набор $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t})$, то граф G гамильтонов и (0,1)-вектор g – характеристический вектор гамильтонова цикла, иначе – негамильтонов.

Конец алгоритма.

Оценим вычислительную сложность предложенного алгоритма. Шаг 1 включает умножение матриц и поэтому требует $O(m^4)$ времени. На шаге 2 можно применить метод исключения Гаусса и поэтому он требует $O(m^3)$ времени. На шаге 3 выполняется алгоритм умножения матриц, на которое затрачивается $O(m^2)$ времени. Такое же время будет затрачено на выполнение шага 4. Шаг 5 требует в общем случае экспоненциальное время $O(2^t m^3)$. Однако в классах графов с ограниченной кратностью собственного значения (–2) его реберного графа на этом шаге будет затрачено полиномиальное время. Хорошо известно [6], что кратность $m\left(-2, L(G)\right)$ собственного значения (–2) его реберного графа G равна

$$m\left(-2, L(G)\right) = \begin{cases} \gamma(G), & \text{если граф } G \text{ двудольный;} \\ \gamma(G) - 1, & \text{если граф } G \text{ не двудольный.} \end{cases}$$

Поэтому, например, в классе графов с фиксированным цикломатическим числом $\gamma(G)$ шаг 5 будет выполняться за полиномиальное время.

Таким образом, хотя проблема распознавания гамильтоновости графа является, как известно, NP-трудной, в некоторых классах графов (например, в классе графов с фиксированным цикломатическим числом) она становится полиномиально разрешимой.

Благодарности. Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф20УКА–005).

Acknowledgements. This work was funded by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the State Program for Fundamental Research "Convergence" and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф20УКА–005).

Список использованных источников

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Физматлит, 2010. – 560 с.

2. Cvetković, D. A table of connected graphs on six vertices / D. Cvetković, M. Petrić // Discrete Math. – 1984. – Vol. 50. – P. 37–49. https://doi.org/10.1016/0012-365x(84)90033-5

3. Sciriha, I. Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian graphs / I. Sciriha, D. M. Cardoso // J. Combin. Math. Combin. Comput. – 2012. – Vol. 80. – P. 127–150.

4. Cardoso, D. M. An overview of (κ,τ)-regular sets and their applications / D. M. Cardoso // Discrete Appl. Math. – 2019. – Vol. 269. – P. 2–10. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.12.020

5. Cardoso, D. M. Main eigenvalues and (κ,τ)-regular sets / D. M. Cardoso, I. Sciriha, C. Zerafa // Linear Algebra Appl. – 2010. – Vol. 432, № 9. – P. 2399–2408. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.039

6. Cvetković, D. Spectral Generalizations of Line Graphs / D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić. – Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/cbo9780511751752

References

1. Gantmacher F. R. *The Theory of Matrices.* Fizmatlit Publ., 2010. 560 p. (in Russian).

2. Cvetković D., Petrić M. A table of connected graphs on six vertices. *Discrete Mathematics*, 1984, vol. 50, pp. 37–49. https://doi.org/10.1016/0012-365x(84)90033-5

3. Sciriha I., Cardoso D. M. Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 2012, vol. 80, pp. 127–150.

4. Cardoso D. M. An overview of (κ,τ)-regular sets and their applications. *Discrete Applied Mathematics,* 2019, vol. 269, pp. 2–10. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.12.020

5. Cardoso D. M., Sciriha I., Zerafa C. Main eigenvalues and (κ,τ)-regular sets. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 432, no. 9, pp. 2399–2408. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.039

6. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S. *Spectral Generalizations of Line Graphs*. Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/cbo9780511751752

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by