ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 513+681.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-408-410

Поступила в редакцию 19.02.2019
Received 19.02.2019

В. Г. Найденко

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ТОПОЛОГИЯ ЧАСТИЧНОЙ ВЫПУКЛОСТИ

Аннотация. Подтверждена гипотеза Финка – Вуда о том, что если множество направляющих гиперплоскостей частичной выпуклости O′ является замыканием некоторого множества O, то множество X является замкнутым направленным полупространством частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O′ тогда и только тогда, когда X – замкнутое направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O.

Ключевые слова: выпуклость, обобщенная выпуклость, частичная выпуклость, топология, гипотеза Финка – Вуда

Для цитирования. Найденко, В. Г. Топология частичной выпуклости / В. Г. Найденко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 408–410. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-408-410

Vladimir G. Naidenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

TOPOLOGY OF DIRECTIONAL CONVEXITY

Abstract. Herein, we have proven a Fink – Wood conjecture that if O′ is the closure of some orientation set O, then a set is a directed O-halfspace if and only if it is a directed O′-halfspace.

Keywords: convexity, generalized convexity, restricted-orientation convexity, problem to recognize convexity, computational complexity

For citation. Naidenko V. G. Topology of directional convexity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 408–410 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-408-410

Введение. Важным аспектом в исследовании частично выпуклых множеств [1] является изучение их топологических свойств. Е. Финк и Д. Вуд сформулировали следующую гипотезу (см.: Conjecture 7.3 [2, с 89]): если множество направляющих гиперплоскостей частичной выпуклости O′ является замыканием некоторого множества O, то множество X является замкнутым направленным полупространством частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O′ тогда и только тогда, когда X – замкнутое направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O. Здесь мы приведем положительное решение этой проблемы Финка – Вуда. Дадим необходимые определения [3].

Определения. Пусть в n-мерном линейном пространстве R^n задано фиксированное множество единичных векторов (направлений) $O \subseteq S^{n-1}$, где S^{n-1} – единичная сфера. Прямая, параллельная какому-нибудь вектору из O, называется O-прямой. Напомним, что множество $X \subseteq R^n$ называется частично выпуклым (O-выпуклым), если пересечение X с произвольной O-прямой связно или пусто. Кроме того, замкнутое частично выпуклое множество X называется полупространством частичной выпуклости, если пересечение X с произвольной O-прямой оказывается прямой, лучом или пустым множеством. Полупространство X частичной выпуклости называется направленным, если для любых двух параллельных O-прямых I_1 и I_2 выполняются три условия:

1) если пересечение $r_1 = I_1 \cap X$ непустое, то r_1 является лучом;

2) если пересечение $r_2 = I_2 \cap X$ непустое, то r_2 является лучом;

3) лучи r_1 и r_2 имеют одинаковое направление, т. е. r_1 можно получить из r_2 параллельным переносом и наоборот.

Ориентацией O_X направленного полупространства X частичной выпуклости назовем множество векторов $O_X \subseteq O$ такое, что вектор e из O принадлежит O_X тогда и только тогда, когда для любой точки $a \in X$ луч $\{a + \alpha e \mid \alpha \geq 0\}$ целиком содержится в X.

Отметим, что частичная выпуклость является обобщением понятия классической выпуклости, так как все классически выпуклые множества являются O-выпуклыми. Кроме того, если $O = S^{n-1}$, то O-выпуклость совпадает с классической выпуклостью.

В работе [2] предложен другой способ задания системы O-прямых. Пусть в R^n задано фиксированное множество гиперплоскостей О, проходящих через начало координат $\mathbf{0}$ и называемых направляющими гиперплоскостями. Прямая, параллельная или совпадающая с прямой, образованной пересечением каких-нибудь $n - 1$ направляющих гиперплоскостей, называется O-прямой.

Будем говорить, что множество направлений O соответствует множеству направляющих гиперплоскостей О, если порождаемые ими системы O-прямых совпадают, т. е. они образуют одну и ту же частичную выпуклость.

Основные результаты. Заметим, что ориентация O_X тесно связана с рецессивным (характеристическим) конусом полупространства X. Напомним, что рецессивным (характеристическим) конусом множества X называется множество $\mathbf{0}^+X$, состоящее из векторов $h \in R^n$ таких, что $x + \gamma h \in X$ для всех $x \in X$ и всех действительных чисел $\gamma \geq 0$. Через $CH[O_X]$ обозначим выпуклую коническую оболочку множества O_X, т. е. наименьший выпуклый конус, содержащий O_X. Через $\overline{A}$ обозначим замыкание произвольного множества $A \subseteq R^n$. Нетрудно убедиться, что $O_X = O \cap \mathbf{0}^+ X$. Тогда имеет место

Л е м м а. Для любой точки a направленного полупространства X частичной выпуклости множество $a + \overline{CH[O_X]}$ целиком содержится в X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что рецессивный конус любого замкнутого множества является замкнутым и выпуклым [4, 5]. Тогда справедливо включение $\overline{CH[O_X]} \subseteq \mathbf{0}^+ X$. Отметим, что для любой точки $a \in X$ выполняется утверждение $a + \mathbf{0}^+ X \subseteq X$. Следовательно, $a + \overline{CH[O_X]} \subseteq X$. Лемма доказана.

Итак, справедлива следующая теорема, подтверждающая гипотезу Финка – Вуда.

Т е о р е м а. Если множество направляющих гиперплоскостей частичной выпуклости О′ является замыканием некоторого множества О, то множество X является замкнутым направленным полупространством частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей О′ тогда и только тогда, когда X – замкнутое направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей О.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Удобно перейти от задания частичной выпуклости с помощью направляющих гиперплоскостей О к соответствующему ему заданию с помощью множества направлений (единичных векторов) O. Нетрудно видеть, что множество направляющих гиперплоскостей О′ соответствует множеству направлений O', где O' – замыкание множества O. Из леммы вытекает, что замкнутое множество X будет являться направленным полупространством частичной выпуклости с множеством направлений O' тогда и только тогда, когда X – направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направлений O. Теорема доказана.

Заключение. Приведено положительное решение гипотезы Финка – Вуда о замкнутых направленных полупространствах частичной выпуклости.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция 2020».

Acknowledgements. This work was funded by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of “Convergence” State Program for Fundamental Research.

Список использованных источников

1. Rawlins, G. Ortho-convexity and its generalizations / G. Rawlins, D. Wood // Computational Morphology / ed. G. T. Toussaint. – Amsterdam: North-Holland, 1988. – P. 137–152. https://doi.org/10.1016/b978-0-444-70467-2.50015-1

2. Fink, E. Restricted-Orientation Convexity. Series: Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series / E. Fink, D. Wood. – Berlin; New York: Springer-Verlag, 2004. – 120 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18849-7

3. Найденко, В. Г. Частичная выпуклость / В. Г. Найденко // Мат. заметки. – 2004. – Т. 75, вып. 2. – С. 222–235.

4. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 469 с.

5. Гороховик, В. В. Критерий глобальной эпилипшицевости множеств / В. В. Гороховик, С. Я. Гороховик // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1995. – № 1. – С. 118–120.

References

1. Rawlins G., Wood D. Ortho-convexity and its generalizations. Toussaint G. T. (ed.) *Computational Morphology*. Amsterdam, North-Holland, 1988, pp. 137–152. https://doi.org/10.1016/b978-0-444-70467-2.50015-1

2. Fink E., Wood D. *Restricted-Orientation Convexity. Series: Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2004. 120 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18849-7

3. Naidenko V. G. Partial convexity. *Mathematical Notes*, 2004, vol. 75, no. 1–2, pp. 202–212. https://doi.org/10.1023/b:matn.0000015036.94515.c0

4. Rockafellar R. T. *Convex Analysis*. Princeton (New Jersey), Princeton University Press, 1970. 467 p.

5. Gorokhovik V. V., Gorokhovik S. Ya. Criterion of global epiLipschitzness of sets. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1995, no. 1, pp. 118–120 (in Russian).

Информация об авторе

Найденко Владимир Григорьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: naidenko@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir G. Naidenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naidenko@im.bas-net.by