УДК 517.987.4+519.6

В. Б. МАЛЮТИН

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛАМИ ПО СПИНОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ И ИНТЕГРАЛАМИ ПО АНТИКОММУТИРУЮЩИМ ПЕРЕМЕННЫМ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 28.03.2013)

Введение. Интегралы и суммы по спиновым переменным активно используются в статистической физике, в частности, для представления статистической суммы и корреляционных функций решеточных моделей [1–3]. Спиновые переменные принимают два значения ±1. К функциям от спиновых переменных не удается применить методы анализа функций от вещественных переменных, например, методы интегрирования функций. Для преодоления указанных трудностей можно использовать другое представление интеграла по спиновым переменным. В работах [4, 5] интеграл по спиновым переменным записывается в виде среднего значения по точкам, в которых траектории имеют разрыв. Это представление позволяет для решения задачи использовать методы анализа функций от вещественных переменных. Еще один способ решения задач статистической физики – это использование связи между статистической физикой и теорией поля [6–10]. Давно было замечено, что модели статистической физики можно интерпретировать в терминах теории фермионных полей. Если представить модель статистической физики в терминах теории поля, то могут быть применены разнообразные техники теории поля, такие как теория возмущений, вариационные методы, функциональные методы и т. д. Для решения задач статистической физики, записанных на языке теории поля, могут быть использованы методы анализа функций от антикоммутирующих (грассмановых) переменных, в частности, методы интегрирования по антикоммутирующим переменным [11].

Несмотря на известный факт наличия фермионной структуры в моделях статистической физики, в настоящий момент задача представления интегралов или сумм по спиновым переменным в виде интегралов по антикоммутирующим переменным решена только для некоторых классов моделей. В некоторых работах для описания моделей статистической физики не используются спиновые переменные, а сразу записываются выражения в виде интегралов по антикоммутирующим переменным.

В настоящей работе рассматривается соотношение между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным для класса функционалов, имеющих вид полиномов. Также приводится вычисление интегралов по антикоммутирующим и спиновым переменным с помощью формул для гауссовых интегралов.

1. Соотношение между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным. Рассматриваемые в работе интегралы определяются следующим образом. Интеграл по спиновым переменным, определенный на функциях, заданных на отрезке $[0, t]$, принимающих значения ±1 и удовлетворяющих циклическим граничным условиям $x(t) = x(0)$, определяется равенством

$$\int F(x(\bullet))d\nu(x) = \lim_{\max\limits_{j} \Delta t_j \to 0} \sum_{x_1=\pm1} \dots \sum_{x_n=\pm1} F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\cdot)\right) \prod_{j=1}^{n} S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j), \tag{1}$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[0,t]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

Здесь $x_j = x(t_j)$; $x_0 = x_n$; $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$; $\chi_{]t_{j-1},t_j]}(s)$ – характеристическая функция интервала $]t_{j-1},t_j]$; $S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j)$ – переходная функция, обладающая свойствами:

$$\sum_{x_j=\pm 1} \lim_{\Delta t_j \to 0} S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) f(x_j) = f(x_{j-1}),$$

$$\sum_{x_j=\pm 1} S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) S(\Delta t_{j+1}, x_j, x_{j+1}) = S(\Delta t_j + \Delta t_{j+1}, x_{j-1}, x_{j+1}).$$

Для функционала $F(x(t_1),...,x(t_k))$, зависящего от конечного числа точек $0 \le t_1 < ... < t_k \le t$, интеграл по спиновым переменным записывается в виде кратной суммы по спиновым переменным

$$\sum_{x_0=\pm 1} ... \sum_{x_k=\pm 1} F(x_1,...,x_k) \prod_{j=1}^{k} S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j),\ x_0 = x_k,\ \Delta t_1 = t_1 - t_k + t.$$

Интеграл по антикоммутирующим переменным на множестве полиномов, зависящих от u_j, u_j^*, $1 \le j \le n$, определяется по следующим правилам интегрирования [6, 11]:

$$\int u du = 1,\ \int du = 0,\ \int u^* du^* = 1,\ \int du^* = 0, \tag{2}$$
$$\int f(u_1,...,u_n) u_{n+1} du_1 ... du_{n+1} = \int f(u_1,...,u_n) du_1 ... du_n.$$

Функциональный интеграл по антикоммутирующим переменным, определенный на функциях $u(\tau)$, $u^*(\tau)$, заданных на отрезке [0, t] и удовлетворяющих граничным условиям $u(t) = -u(0)$, $u^*(t) = -u^*(0)$, определяется равенством

$$\int F(u(\cdot), u^*(\cdot)) d\mu(u,u^*) = \lim_{\max\limits_j \Delta t_j \to 0} \int ... \int F\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\cdot), \sum_{j=1}^{n} u_j^* \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\cdot) \right) \times$$
$$\times \exp\left(\sum_{j=1}^{n} u_j u_j^* \right) \exp\left(b \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1} \right) du_1 du_1^* ... du_n du_n^*, \tag{3}$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[0,t]$ точками $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$. Здесь $u_j = u(t_j)$; $u_j^* = u^*(t_j)$; $u_0 = -u_n$, $u_0^* = -u_n^*$.

В данной работе рассматриваются функционалы вида $F(x(t_1),...,x(t_k))$. В силу свойств спиновых переменных функционал указанного вида всегда можно представить в виде полинома $P(x(t_1),...,x(t_k))$, зависящего от $x(t_1),...,x(t_k)$. Соотношение между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным рассмотрим для функций полиномиального вида.

У т в е р ж д е н и е. Пусть интеграл по спиновым переменным, заданный на функциях с циклическими граничными условиями $x(t) = x(0)$, определяется равенством (1) и переходной функцией $S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) = \frac{1}{2}(\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j) x_{j-1} x_j)$, $\Delta t_j = \frac{t}{n}$.

Пусть функциональный интеграл по антикоммутирующим переменным, заданный на функциях с граничными условиями $u(t) = -u(0)$, $u^*(t) = -u^*(0)$, определяется равенством (3), где $b = \exp\left((A_2 - A_1) \frac{t}{n} \right)$.

Тогда справедливо равенство

$$\int P\big(x(t_1),...,x(t_k)\big) d\nu(x) = \exp(A_1 t) \int TP\big(u(t_1) + u^*(t_1),...,u(t_\text{k}) + u^*(t_\text{k})\big) d\mu(u,u^*), \tag{4}$$

где символ T – знак хронологического упорядочения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как интегралы обладают свойством линейности, то достаточно доказать утверждение для функционалов вида $\prod_{j=1}^{l} x(s_j)$, где $1 \le l \le k$, $s_j = t_{r_j}$, $1 \le r_1 \le r_2 \le ... \le r_l \le k$.

По определению интеграла

$$\int\prod_{j=1}^{l}x(s_j)d\nu(x)=\lim_{\max\limits_j \Delta t_j\to 0}\sum_{x_1=\pm1}\dots\sum_{x_n=\pm1}\prod_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}x_j\chi_{]t_{j-1},t_j]}(s_i)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\exp(A_1\Delta t_j)+\exp(A_2\Delta t_j)x_{j-1}x_j\right).$$

Выражение под знаком предела можно записать в виде

$$\sum_{x_1=\pm1}\dots\sum_{x_n=\pm1}\prod_{j=1}^{l}x_{q_j}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\exp(A_1\Delta t_j)+\exp(A_2\Delta t_j)x_{j-1}x_j\right),\tag{5}$$

где $t_{q_j-1}<s_j\le t_{q_j}$.

В выражении (5) поставим каждому множителю x_j в соответствие вершину с номером j и одной линией, выходящей из этой вершины.

Так как $\sum\limits_{x_k=\pm1}F(x_1,...,x_{k-1})x_k=0$, то ненулевой вклад дадут только траектории с двумя линиями в каждой вершине, т. е. траектории, дающие ненулевой вклад, не могут начинаться или заканчиваться в вершине и, следовательно, являются замкнутыми.

Так как в выражении (5) степень каждого множителя x_j меньше либо равна трем, то каждая вершина содержит не более трех линий и, следовательно, траектории не имеют пересечений, так как в случае пересечений минимальное число линий в вершине равно четырем.

Таким образом, выражение (5) равно сумме по всем непересекающимся замкнутым траекториям, которые соединяют все линии, выходящие из вершин. Слагаемые в сумме равны $\exp(A_1t)\exp\left((A_2-A_1)\frac{pt}{n}\right)$, где $2p$ равно количеству линий траектории, соответствующих x_j, взятым из выражения $\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2}(\exp(A_1\Delta t_j)+\exp(A_2\Delta t_j)x_{j-1}x_j)$.

Рассмотрим выражение

$$\exp(A_1t)\int\prod_{j=1}^{l}(u_{q_j}+u^*_{q_j})\exp\left(\sum_{j=1}^{n}u_ju^*_j\right)\exp\left(\exp\left((A_2-A_1)\frac{t}{n}\right)\sum_{j=0}^{n-1}u^*_ju_{j+1}\right)du_1du^*_1\dots du_ndu^*_n\tag{6}$$

В выражении (6) поставим каждому множителю u_j в соответствие вершину с номером j и одной линией, выходящей из этой вершины, каждому множителю u^*_j – в соответствие вершину с номером j и одной линией, входящей в эту вершину.

Так как

$$\int f(u_1,u_1^*,...,u_n,u_n^*)u_{n+1}du_1du_1^*\dots du_{n+1}du_{n+1}^*=\int f(u_1,u_1^*,...,u_n,u_n^*)u^*_{n+1}du_1du_1^*\dots du_{n+1}du_{n+1}^*=0,$$

то ненулевой вклад дадут только траектории с одной входящей и одной выходящей линией в каждой вершине, т. е. траектории, дающие ненулевой вклад, являются замкнутыми.

Так как $u_j^2=u_j^{*2}=0$, то каждая вершина содержит не более одной входящей и одной выходящей линии и, следовательно, траектории не имеют пересечений.

Значит, выражение (6) равно сумме по всем непересекающимся замкнутым траекториям, которые соединяют все линии, выходящие из вершин. Слагаемые в сумме равны $\exp(A_1t)\exp\left((A_2-A_1)\frac{pt}{n}\right)$, где p равно количеству линий траектории, соответствующих u_j, взятым из выражения $\exp\left(\exp\left((A_2-A_1)\frac{t}{n}\right)\sum\limits_{j=0}^{n-1}u^*_ju_{j+1}\right)$.

Таким образом, выражения (5) и (6) записываются в виде сумм с одинаковыми областями суммирования и слагаемые, соответствующие одинаковым траекториям, равны между собой. Следовательно, выражения (5) и (6) равны между собой.

Так как интегралы $\int\prod\limits_{j=1}^{l}x(s_j)d\nu(x)$ существуют [12], то существуют пределы при $\max\limits_j\Delta t_j\to0$ выражений (5) и (6) и значения пределов равны. Следовательно, справедливо равенство (4) и утверждение доказано.

2. Вычисление интегралов по антикоммутирующим переменным от полиномов. Как упоминалось выше, для вычисления интегралов по антикоммутирующим переменным можно использовать методы, которые не удавалось применить к интегралам по спиновым переменным. В данном разделе рассматривается применение формул для гауссовых интегралов к вычислению интегралов по антикоммутирующим и спиновым переменным.

Показатель экспонент в равенстве (3) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} u_j u_j^* + b\sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^{-1} v_i v_j,$$

где

$$v_j = u_j,\ 1 \le j \le n,\ v_j = u_{j-n}^*,\ n+1 \le j \le 2n,\quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C_1^{-1} \\ -(C_1^{-1})^T & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right) \\ -\exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как пфаффиан $\mathrm{Pf}(C^{-1})$ матрицы C^{-1} равен $\left(\exp\left((A_2 - A_1)t\right)+1\right)(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$, то интеграл

$$\int F(u_1, u_1^*, \dots, u_n, u_n^*)\exp\left(\sum_{j=1}^{n} u_j u_j^*\right)\exp\left(b\sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right) du_1 du_1^* \dots du_n du_n^*$$

можно переписать в виде

$$\frac{\exp\left((A_2 - A_1)t\right)+1}{\mathrm{Pf}(C^{-1})}\int F(v_1, v_2, \dots, v_{2n})\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^{-1} v_i v_j\right) dv_1 \dots dv_{2n}.$$

Матрица C, обратная к матрице C^{-1}, имеет вид $C = \begin{pmatrix} 0 & -C_1^T \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица C_1, обратная к матрице C_1^{-1}, имеет вид

$$C_1 = \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\begin{pmatrix} 1 & -e^{(A_2-A_1)\frac{(n-1)t}{n}} & -e^{(A_2-A_1)\frac{(n-2)t}{n}} & \dots & -e^{(A_2-A_1)\frac{2t}{n}} & -e^{(A_2-A_1)\frac{t}{n}} \\ e^{(A_2-A_1)\frac{t}{n}} & 1 & -e^{(A_2-A_1)\frac{(n-1)t}{n}} & \dots & -e^{(A_2-A_1)\frac{3t}{n}} & -e^{(A_2-A_1)\frac{2t}{n}} \\ e^{(A_2-A_1)\frac{2t}{n}} & e^{(A_2-A_1)\frac{t}{n}} & 1 & \dots & -e^{(A_2-A_1)\frac{4t}{n}} & -e^{(A_2-A_1)\frac{3t}{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{(A_2-A_1)\frac{(n-2)t}{n}} & e^{(A_2-A_1)\frac{(n-3)t}{n}} & e^{(A_2-A_1)\frac{(n-4)t}{n}} & \dots & 1 & -e^{(A_2-A_1)\frac{(n-1)t}{n}} \\ e^{(A_2-A_1)\frac{(n-1)t}{n}} & e^{(A_2-A_1)\frac{(n-2)t}{n}} & e^{(A_2-A_1)\frac{(n-3)t}{n}} & \dots & e^{(A_2-A_1)\frac{t}{n}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Через элементы матрицы C выражаются моменты второго порядка, а именно справедливо равенство [13, 14]

$$\frac{1}{\mathrm{Pf}(C^{-1})}\int v_i v_j \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^{-1} v_i v_j\right) dv_1 \dots dv_{2n} = -C_{ij}.$$

Если перейти к переменным u_j, u_j^*, то равенства примут вид

$$\frac{1}{\mathrm{Pf}(C^{-1})}\int u_i u_j \exp\left(\sum_{j=1}^{n} u_j u_j^*\right)\exp\left(b\sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right)du_1\ldots du_n du_1^*\ldots du_n^* = 0,$$
$$\frac{1}{\mathrm{Pf}(C^{-1})}\int u_i^* u_j^* \exp\left(\sum_{j=1}^{n} u_j u_j^*\right)\exp\left(b\sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right)du_1\ldots du_n du_1^*\ldots du_n^* = 0, \qquad (7)$$
$$\frac{1}{\mathrm{Pf}(C^{-1})}\int u_i u_j^* \exp\left(\sum_{j=1}^{n} u_j u_j^*\right)\exp\left(b\sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right)du_1\ldots du_n du_1^*\ldots du_n^* =$$
$$= -C(i,n+j) = C_1^T(i,j) = C_1(j,i) = \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\begin{cases} e^{(A_2-A_1)\frac{(j-i)t}{n}}, & i \le j \\ -e^{(A_2-A_1)\frac{(n+j-i)t}{n}}, & i > j \end{cases}.$$

Если перейти к функциям $u_j = u(t_j)$, $u_j^* = u^*(t_j)$, то равенства примут вид

$$\frac{1}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\int u(t_1)u(t_2)d\mu(u,u^*) = 0,\ \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\int u^*(t_1)u^*(t_2)d\mu(u,u^*) = 0,$$
$$\frac{1}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\int u(t_1)u^*(t_2)d\mu(u,u^*) = \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\begin{cases} e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1)}, & t_1 \le t_2 \\ -e^{(A_2-A_1)(t+t_2-t_1)}, & t_1 > t_2 \end{cases}. \qquad (8)$$

Обозначим $v(\tau) = u(\tau),\ 0 \le \tau \le t,\ v(t+\tau) = u^*(\tau),\ 0 \le \tau \le t,\ \int F(v(\cdot))d\mu(v) = \int F(u(\cdot),u^*(\cdot))d\mu(u,u^*)$. Тогда моменты, имеющие порядок выше второго, записываются с помощью формул (8) и формул для гауссовых интегралов по грассмановым (антикоммутирущим) величинам [13, 14]

$$\frac{1}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\int v(t_1)v(t_2)\cdots v(t_{2k})d\mu(v) = 2^{-k}\sum(-1)^p \frac{\int v(t_{j_1})v(t_{j_2})d\mu(v)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\cdots\frac{\int v(t_{j_{2k-1}})v(t_{j_{2k}})d\mu(v)}{e^{(A_2-A_1)t}+1},$$

где суммирование производится по всем перестановкам $(j_1, j_2,..., j_{2k})$ чисел $(1,2,...,2k)$; p – четность перестановки $(j_1, j_2,..., j_{2k})$.

Приведем примеры вычисления интегралов, определяемых равенством (3), где $b = \exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right)$. Во всех случаях $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$.

Пример 1.

$$\int u(t_1)u^*(t_2)u(t_3)u^*(t_4)d\mu(u,u^*) = (e^{(A_2-A_1)t}+1)\times$$
$$\times\left(\frac{\int u(t_1)u^*(t_2)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u(t_3)u^*(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1} + \frac{\int u(t_1)u^*(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u^*(t_2)u(t_3)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right) =$$
$$= (e^{(A_2-A_1)t}+1)\left(\frac{e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1} - \frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{-e^{(A_2-A_1)(t+t_2-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right) =$$
$$= \frac{e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1+t_4-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1} + \frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_1+t+t_2-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1} = e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1+t_4-t_3)}.$$

Пример 2.

$$\int u^*(t_1)u(t_2)u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u,u^*)) = (e^{(A_2-A_1)t}+1)\times$$
$$\times\left(\frac{\int u^*(t_1)u(t_2)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1} + \frac{\int u^*(t_1)u(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u(t_2)u^*(t_3)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right) =$$
$$= (e^{(A_2-A_1)t}+1)\left(\frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_3-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1} + \frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right) =$$
$$= \frac{e^{(A_2-A_1)(2t+t_1-t_2+t_3-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1} + \frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_4+t_3-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1} = e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_2+t_3-t_4)}.$$

П р и м е р 3.

$$\int u(t_1)u(t_2)u^*(t_3)u^*(t_4)d\mu(u,u^*)=(e^{(A_2-A_1)t}+1)\times$$

$$\times\left(-\frac{\int u(t_1)u^*(t_3)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u(t_2)u^*(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}+\frac{\int u(t_1)u^*(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u(t_2)u^*(t_3)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right)=$$

$$=(e^{(A_2-A_1)t}+1)\left(-\frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}+\frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right)=0.$$

П р и м е р 4.

$$\int u(t_1)u^*(t_2)u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u,u^*)=(e^{(A_2-A_1)t}+1)\times$$

$$\times\left(\frac{\int u(t_1)u^*(t_2)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}-\frac{\int u(t_1)u^*(t_3)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{\int u^*(t_2)u(t_4)d\mu(u,u^*)}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right)=$$

$$=(e^{(A_2-A_1)t}+1)\left(\frac{e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_3-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}-\frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_2-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t}+1}\right)=0.$$

Приведем пример вычисления интеграла по спиновым переменным, определяемого равенством (1) и переходной функцией $S(\Delta t_j,x_{j-1},x_j)=\frac{1}{2}(\exp(A_1\Delta t_j)+\exp(A_2\Delta t_j)x_{j-1}x_j)$, $\Delta t_j=\frac{t}{n}$, с помощью соотношения (4) и формул для интегралов по антикоммутирующим переменным. Пусть $t_1\le t_2\le t_3\le t_4$.

$$\int x(t_1)\cdot\ldots\cdot x(t_4)d\nu(x)=\exp(A_1t)\int(u(t_1)+u^*(t_1))\cdot\ldots\cdot(u(t_4)+u^*(t_4))d\mu(u,u^*)=$$

$$=\exp(A_1t)\left(\int u(t_1)u^*(t_2)u(t_3)u^*(t_4)d\mu(u,u^*)+\int u^*(t_1)u(t_2)u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u,u^*)\right)=$$

$$=\exp(A_1t)(e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1+t_4-t_3)}+e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_2+t_3-t_4)}).$$

Литература

1. *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., 1976.
2. *Джимбо М., Мива Т.* Алгебраический анализ точно решаемых моделей. Ижевск, 2000.
3. *Fradkin E. S., Shteingradt D. M.* // Nuovo Cimento. 1978. Vol. 47A, N 1. P. 115–138.
4. *Малютин В. Б.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 45–55.
5. *Малютин В. Б.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 18–25.
6. *Plechko V. N.* // Physica A. 1988. Vol. 152. P. 51–97.
7. *Samuel S.* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, N 12. P. 2806–2814.
8. *Samuel S.* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, N 12. P. 2815–2819.
9. *Samuel S.* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, N 12. P. 2820–2833.
10. *Samuel S.* // Nuclear Physics. 1991. Vol. B350. P. 729–744.
11. *Владимиров В. С., Волович И. В.* // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 60, № 2. С. 169–198.
12. *Малютин В. Б.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 16–19.
13. *Roepstorff G.* Path integral approach to quantum physics. An introduction. Springer-Verlag, 1996.
14. *Малютин В. Б.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1995. № 1. С. 16–23.

V. B. MALYUTIN

RELATION BETWEEN THE INTEGRALS WITH RESPECT TO SPIN VARIABLES AND THE INTEGRALS WITH RESPECT TO ANTICOMMUTING VARIABLES

Summary

The representation of a special class of integrals with respect to spin variables by means of integrals with respect to anticommuting variables is obtained. Evaluation of integrals with respect to anticommuting and spin variables by means of the formulas for Gaussian integrals with respect to anticommuting variables is presented.