

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 539.12.01

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-436-448>

Поступила в редакцию 07.07.2020

Received 07.07.2020

И. А. Шершень, Т. В. Шишкина

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРОЦЕССАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Аннотация. Рассмотрена проблема расчета вклада тормозного излучения с использованием современных методов регуляризации расходимостей. В частности, проведен расчет мягкофотонного излучения в наиболее общем виде с использованием метода размерной регуляризации инфракрасных расходимостей. Описан общий алгоритм расчета жесткого тормозного излучения. Показано, что можно разделить вклад жесткого тормозного излучения на конечную и расходящуюся части. Расходящаяся часть может быть факторизована с вкладом исходного процесса в борновском приближении. Показано, что при удачном выборе кинематических переменных возможен аналитический ковариантный расчет расходящейся части жесткого тормозного излучения. В частном случае приведен алгоритм определения кинематических ограничений на используемые инварианты. Проведен численный анализ вклада радиационных поправок для процессов рождения калибровочных бозонов в случае электрон-фотонных столкновений. Обнаружено, что вклад конечной части излучения тормозных фотонов при высоких энергиях столкновений достигает 20 % и обязательно должен учитываться в расчетах радиационных поправок. Полученные результаты можно применять в различного рода расчетах, в том числе и в ковариантном виде, производимых в контексте подтверждения теоретических предсказаний Стандартной модели или поиска проявлений альтернативных калибровочных моделей.

Ключевые слова: тормозное излучение, сечение взаимодействия, новая физика, Стандартная модель, размерная регуляризация, МЛК, линейные коллайдеры

Для цитирования. Шершень, И. А. Современные методы расчета тормозного излучения в процессах взаимодействия элементарных частиц / И. А. Шершень, Т. В. Шишкина // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 436–448. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-436-448>

Ivan A. Shershan, Tatiana V. Shishkina

Belarusian State University, Minsk, Belarus

MODERN METHODS OF CALCULATIONS OF BREMSSTRAHLUNG IN THE INTERACTION OF ELEMENTARY PARTICLES

Abstract. The problem of real bremsstrahlung calculation is considered using the modern methods of regularization of divergencies. In particular, we calculate soft photon bremsstrahlung in the most general form using the method of dimensional regularization of infrared divergences. The general calculation algorithm of hard photon bremsstrahlung is described. It is shown that the contribution of hard bremsstrahlung can be separated into the finite and divergent parts. The divergent part can be factorized with the contribution of the initial process in the Born approximation. It is shown that a good choice of kinematic variables makes an analytic covariant calculation of the divergent part of the hard bremsstrahlung possible. In a particular case, an algorithm for determining the kinematic constraints on the invariants is described. A numerical analysis of the radiative corrections for gauge bosons production processes in the case of electron-photon collisions is performed. It is discovered that the contribution of the finite part of bremsstrahlung at high collision energies reaches 20 per cent and must be taken into account in calculations of radiative corrections. The results obtained can be used in various calculations, including covariant ones, performed in the context of confirmation of the Standard Model theoretical predictions or searching for manifestations of alternative gauge models.

Keywords: bremsstrahlung, cross section, new physics, Standard Model, dimensional regularization, ILC, linear colliders

For citation. Shershan I. A., Shishkina T. V. Modern methods of calculations of bremsstrahlung in the interaction of elementary particles. *Vestsi Natsyianal' nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 436–448 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-436-448>

Введение. Точность измерений в современных экспериментах, а также высокая энергия взаимодействия элементарных частиц требуют для прецизионного анализа результатов учитывать вклад эффектов высшего порядка теории возмущений. Расчет радиационных поправок к сечениям процессов взаимодействия элементарных частиц является важной и трудоемкой задачей квантовой теории поля. Сложность расчетов связана не только с нетривиальностью используемого математического аппарата и высокими объемами вычислений, но и с множеством особенностей квантовой физики. Присутствие нефизических инфракрасных (ИК) и ультрафиолетовых (УФ) расходимостей требует применения специфических методов их параметризации и устранения. В целом присутствие расходимостей налагает существенные ограничения на возможность прямого численного анализа наблюдаемых величин, в том числе полных и дифференциальных сечений рассматриваемых процессов. В связи с этим оказывается важным аналитическое ковариантное описание процессов. При этом потеря точности в вычислениях легко может появляться за счет использования различного рода приближений и существенно влиять на общую картину процесса в рамках любых, применяемых в физике элементарных частиц, калибровочных моделей.

Вклад во внутренние радиационные поправки низшего порядка теории возмущений может быть разделен на две категории:

- 1) вклад виртуальных частиц, или однопетлевые поправки (В-вклад);
- 2) вклад реальных фотонов, или тормозное излучение (Р-вклад).

Вклад однопетлевых диаграмм содержит оба типа нефизических расходимостей. УФ-расходимости устраняются путем учета вклада контрчленов в соответствии с выбранной схемой перенормировки. Обычно выбор падает на наиболее физически корректную схему перенормировки на массовой поверхности (on-shell scheme) либо на более простую схему минимального сокращения (minimal subtraction scheme) [1]. ИК-расходимости устраняются путем учета Р-вклада. Современной методикой параметризации расходимостей является метод размерной регуляризации [2]. Сходимость интегралов при этом явно зависит от размерности пространства интегрирования. Если аналитически продолжить пространство до некоторой размерности n , то эту размерность можно использовать в качестве регуляризатора обоих типов расходимостей.

Проблемы, связанные с В-вкладом, существенно разрешены. Отчасти это связано с тем фактом, что расчет относительно прост из-за отсутствия ограничений на энергии виртуальных частиц. Вследствие этого возможно стандартизировать возникающие в расчетах интегралы [3], а также разработать программное обеспечение, позволяющее производить численные расчеты последних, и даже автоматизировано вычислять контрчлены [4].

Учет вклада реальных фотонов является более сложной проблемой, требующей исключительного подхода к каждому отдельному процессу и его кинематике. По этой причине подобного рода задачи сложно алгоритмизировать. Особенности кинематики таких процессов не позволяют полноценно и с легкостью производить их численный анализ, вследствие чего задача учета Р-вклада требует намного большего числа уникальных аналитических результатов. Важную роль в разработке действенных методов ковариантных аналитических расчетов Р-вклада различного рода процессов сыграли и белорусские ученые [5–6].

В данной работе получен ряд результатов, касающихся проблем, которые возникают при расчетах Р-вклада в различного рода процессах. В соответствии с наиболее распространенными методами приводится расчет вклада мягких фотонов на основе метода размерной регуляризации ИК-расходимостей, а также разбор алгоритма вычисления вклада жестких тормозных фотонов с выделением ИК-расходящейся части как в общем случае, так и для процессов на базе электрон-фотонных столкновений [7–12], которые будут иметь место на Международном линейном коллайдере (МЛК) [13–15] и важны для исследования отклонений от Стандартной модели.

Мягкое тормозное излучение. Наиболее простым способом учета вклада тормозного излучения для устранения ИК-расходимостей в расчетах процессов взаимодействия элементарных частиц является так называемое мягкофотонное приближение [16]. В том случае, когда конечные фотоны обладают достаточно низкой энергией, в пропагаторах амплитуд процессов можно пренебречь 4-импульсами фотонов, а квадрат матричного элемента тормозного процесса может быть представлен в следующем виде:

$$|\mathfrak{M}_{\text{мягк}}|^2 = \delta_{\text{мягк}} |\mathfrak{M}_{\text{борн}}|^2, \quad (1)$$

где множитель $\delta_{\text{мягк}}$ может быть записан как [17]

$$\delta_{\text{мягк}} = -\frac{\alpha}{2\pi^2} \left(\sum_i^m I_i + \sum_{i>j}^m A_{ij}^{\text{зар}} A_{ij}^{\text{соот}} I_{ij} \right), \quad (2)$$

где суммирование производится по индексам импульсов заряженных реальных частиц, а $A_{ij}^{\text{зар}}$, $\{A_{ij}^{\text{соот}}\}$ – коэффициенты зарядовой асимметрии и асимметрии состояния соответственно. Они равны:

1) +1, если частицы с импульсами p_i и p_j имеют одинаковые заряды {обе одновременно являются начальными (конечными) частицами};

2) –1, если имеют разные заряды {одна частица является начальной, а другая – конечной}.

Функции I_i и I_{ij} выражаются следующим образом:

$$I_i = m_i^2 I(p_i), \quad I_{ij} = x_{ij} I(p_i, p_j). \quad (3)$$

Величины $I(p_i)$ и $I(p_i, p_j)$ представляют собой следующие интегралы:

$$I(p_i) = \int_0^{\Delta E} \frac{dq}{(2\pi)^3 2q^0} \frac{1}{(p_i, q)^2}, \quad (4)$$

$$I(p_i, p_j) = \int_0^{\Delta E} \frac{dq}{(2\pi)^3 2q^0} \frac{1}{(p_i, q)(p_j, q)}. \quad (5)$$

Интеграл (5) вычисляется сложнее, поэтому опишем его подробнее. Отметим, что вычисление интеграла (4) проводится аналогичным образом.

Для упрощения вычислений произведем следующую замену:

$$p = \zeta p_i, \quad (6)$$

$$k = p_j. \quad (7)$$

Параметр ζ вводится таким образом, чтобы $(p - k)^2 = 0$, т. е. чтобы вектор $p - k$ являлся изотропным. Таким образом,

$$\zeta = \frac{x_{ij} + \sqrt{x_{ij}^2 - 4m_i^2 m_j^2}}{2m_i^2},$$

$$x_{ij} = 2p_i \cdot p_j,$$

а сам интеграл (5) примет следующий вид:

$$I(p_i, p_j) = \zeta \int_0^{\Delta E} \frac{dq}{(2\pi)^3 2q^0} \frac{1}{(pq)(kq)}. \quad (8)$$

Интегрирование проводится до некоторой конечной энергии $\Delta E \ll m_{i,j}$. С точки зрения экспериментальных измерений это означает, что имеется некоторая энергия фотона, ниже которой детектор не может его обнаружить. Процессы, проходящие таким образом, учитываются вместе с оригинальным, не тормозным процессом. Поэтому мягкофотонное излучение в эксперименте не отделимо от исходного, не тормозного процесса.

Достаточно подробное вычисление интеграла (5) производится в работе [17]. Однако современные расчеты требуют вычисления этого интеграла с использованием размерной регуляризации ИК-расходимости, возникающей в пределе $q^0 \rightarrow 0$.

Произведя аналитическое продолжение в выражении (8) от размерности 4 до размерности n и преобразовав к интегрированию по энергии и углам, получим следующее:

$$I(p_i, p_j) = \frac{2\zeta}{(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(n/2 - 1)} \int_0^1 \frac{dx}{\mu^{n-4}} \int_0^{\Delta E} (q^0)^{n-5} dq^0 \times \\ \times \int_0^\pi (\sin \theta)^{n-3} d\theta \frac{1}{[(u^0)^2 - |\vec{u}| \cos \theta]^2}. \quad (9)$$

Здесь x – параметр Фейнмана, μ – массовый параметр т’Хофта, необходимый для сохранения размерности $I(p_i, p_j)$, а

$$u = px + k(1 - x). \quad (10)$$

Проведя интегрирование по энергии тормозного фотона, получим

$$\frac{1}{\mu^{n-4}} \int_0^{\Delta E} (q^0)^{n-5} dq^0 = \frac{(\Delta E / \mu)^{n-4}}{n-4} = \frac{1}{n-4} \left[1 + (n-4) \ln \frac{\Delta E}{\mu} + \dots \right]. \quad (11)$$

Интегрирование по углам с учетом замены переменных $\xi = \cos \theta$ дает

$$\int_0^\pi \frac{(\sin \theta)^{n-3} d\theta}{[(u^0)^2 - |\vec{u}| \cos \theta]^2} = \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^{n/2-2} d\xi}{[(u^0)^2 - |\vec{u}| \xi]^2} = \\ = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{[(u^0)^2 - |\vec{u}| \xi]^2} \left[1 + \frac{1}{2}(n-4) \ln(1-\xi^2) + \dots \right]. \quad (12)$$

Сопоставив два последних выражения и отбросив все слагаемые, кроме линейных по $1/(n-4)$, получим

$$\frac{1}{\mu^{n-4}} \int_0^{\Delta E} (q^0)^{n-5} dq^0 \int_0^\pi \frac{(\sin \theta)^{n-3} d\theta}{[(u^0)^2 - |\vec{u}| \cos \theta]^2} = \\ = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{[(u^0)^2 - |\vec{u}| \xi]^2} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \frac{\Delta E}{\mu} + \frac{1}{2} \ln(1-\xi^2) \right] = \\ = \frac{2}{u^2} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \frac{2\Delta E}{\mu} \right] + \frac{1}{u^2} \frac{u^0}{|\vec{u}|} \ln \frac{u^0 - |\vec{u}|}{u^0 + |\vec{u}|}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (9) и разложив n вблизи значения $n = 4$, а также воспользовавшись выражениями

$$\lim_{n \rightarrow 4} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(n/2 - 1)} = \frac{1}{16\pi^2}, \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow 4} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(n/2 - 1)} \frac{1}{n-4} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \gamma_E - \frac{1}{2} \ln 4\pi \right], \quad (15)$$

получим в конечном итоге

$$I(p_i, p_j) = \zeta \frac{1}{2(2\pi)^2} [R_1 + R_2], \quad (16)$$

$$R_1 = \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \left[-\Delta^{\text{ИК}} + \ln \frac{4\Delta E^2}{\mu^2} \right], \quad (17)$$

$$R_2 = \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \frac{u^0}{|\vec{u}|} \ln \frac{u^0 - |\vec{u}|}{u^0 + |\vec{u}|}. \quad (18)$$

Здесь введен регуляризирующий параметр ИК-расходимости $\Delta^{\text{ИК}} \equiv 1/\bar{\varepsilon} = 2/(4-n) - \gamma_E + \ln 4\pi$, аналогичный с вводимым в схеме минимального сокращения, γ_E – постоянная Эйлера – Маскерони. Воспользовавшись очевидным соотношением

$$u^2 = k^2 + 2xk(p-k), \quad (19)$$

вытекающим из изотропности вектора $p-k$, интеграл (17) может быть легко вычислен:

$$R_1 = \int_0^1 \frac{dx}{k^2 + 2xk(p-k)} \left[-\Delta^{\text{ИК}} + \ln \frac{4\Delta E^2}{\mu^2} \right] = \frac{1}{p^2 - k^2} \ln \frac{p^2}{k^2} \left[-\Delta^{\text{ИК}} + \ln \frac{4\Delta E^2}{\mu^2} \right]. \quad (20)$$

Интеграл (18) полностью идентичен интегралу, вычисленному т’Хофтом и Велтманом. В наших обозначениях:

$$R_2 = \frac{2}{p^2 - k^2} \left[\frac{1}{4} \ln^2 \frac{u^0 - |\vec{u}|}{u^0 + |\vec{u}|} + \text{Li}_2 \left(1 + \frac{u^0 - |\vec{u}|}{v} \right) + \text{Li}_2 \left(1 + \frac{u^0 + |\vec{u}|}{v} \right) \right]_{u=k}^{u=p}. \quad (21)$$

В конечном итоге, перейдя к изначальным импульсам, функции I_i и I_{ij} будут иметь следующий вид:

$$I_i = \pi \left[-\Delta^{\text{IR}} + \log \frac{4\Delta E^2}{\mu^2} + \frac{p^0}{|\vec{p}|} \ln \frac{p^0 - |\vec{p}|}{p^0 + |\vec{p}|} \right], \quad (22)$$

$$I_{ij} = 2\pi \frac{\zeta^2 x_{ij}}{\zeta^2 m_i^2 - m_j^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\zeta^2 m_i^2}{m_j^2} \left(-\Delta^{\text{IR}} + \ln \frac{4\Delta E^2}{\mu^2} \right) + \left\{ \frac{1}{4} \ln^2 \frac{u^0 - |\vec{u}|}{u^0 + |\vec{u}|} + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{u^0 + |\vec{u}|}{v} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{u^0 - |\vec{u}|}{v} \right) \right\}_{u=p_j}^{u=p_i} \right], \quad (23)$$

где

$$\zeta = \frac{x_{ij} + \sqrt{x_{ij}^2 - 4m_i^2 m_j^2}}{2m_i^2}, \quad v = \frac{\zeta^2 m_i^2 - m_j^2}{2(\zeta p_i^0 - p_j^0)}, \quad x_{ij} = 2p_i \cdot p_j. \quad (24)$$

Излучение жестких фотонов. В том случае, если энергия фотонов достаточно высока, мягкофотонное приближение перестает работать и возникает необходимость в точном описании подобных тормозных процессов. Поскольку тормозной процесс качественно отличается от исходного, он должен описываться $N+3$ количеством переменных. Для тормозного процесса можно ввести переменные таким образом, чтобы при $q^0 \rightarrow 0$ N переменных совпадали с переменными, описывающими исходный процесс. В таком случае после интегрирования по дополнительным трем переменным возможно получить дифференциальное сечение, описываемое тем же набором переменных, что и сечение исходного процесса.

Из-за сложности проблемы интегрирование в общем случае производить затруднительно. Существуют два способа ее разрешения. Первым и наиболее распространенным методом решения является использование нековариантного набора переменных интегрирования (в выклад-

ках будем этот набор кинематических переменных, являющихся уникальными для тормозного процесса, обозначать как Ξ), выбираемого естественным путем. В качестве таких переменных обычно используются энергия тормозного фотона, зенитный и азимутальный углы 3-вектора импульса фотона в некоторой системе отсчета, имеющей физический смысл в пределе $q^0 \rightarrow 0$ (например, не являющейся л-системой безмассовой частицы). Подобная схема не подходит для аналитического интегрирования, однако, при удачном выборе кинематических переменных, достаточно эффективна для численных вычислений. Если же набор переменных Θ , описывающих исходный процесс, выбрать ковариантным образом, то это в значительной степени ограничивает выбор переменных Ξ -набора и часто приводит к нестабильности численных расчетов, поскольку геометрически фазовое пространство оказывается чрезвычайно сложным и сингулярности на границах кинематики усиливают свое влияние. Поэтому этот способ решения задачи вычисления P -вклада показывает свою эффективность лишь при удачном выборе *всех* кинематических переменных нековариантным образом и только на уровне полных сечений, что, естественно, сказывается на возможностях анализа экспериментальных данных. Особенно это касается современных экспериментальных установок, обладающих большой светимостью и позволяющих достигать большой статистики данных, и, соответственно, анализировать дифференциальные сечения процессов с высокой экспериментальной точностью.

Принципиально иным является полностью ковариантный подход описания процессов, во многом развитый российскими и белорусскими учеными [7–8]. В этом случае Ξ -фазовое пространство оказывается намного более сложным для численного анализа, однако в достаточной степени применимым для аналитических вычислений. Сложность возникающих в расчетах интегралов можно обойти путем использования обоснованных кинематикой и особенностями эксперимента приближений, а полученные результаты могут быть применены и на уровне дифференциальных сечений.

Так же, как и мягкофотонное излучение, излучение жестких фотонов содержит ИК-расходимость. Если ее параметризовать при помощи уже указанной выше «энергии обрезания» ΔE , то сумма вкладов

$$\sigma_{\text{мягк}} + \sigma_{\text{жест}} \quad (25)$$

будет ковариантной и не будет зависеть от энергии ΔE , т. е. от каких-либо особенностей эксперимента, а ИК-расходимость будет устранена в терминах размерной регуляризации. Отметим, что в таком случае оба вклада тормозного излучения следует вычислять в одной и той же системе отсчета (или системах отсчета, эквивалентных в пределе $q^0 \rightarrow 0$).

Естественно, что не все слагаемые в P -вкладе содержат ИК-расходимость. Фактически сама тензорная структура матричных элементов тормозных процессов позволяет вполне естественно разделить ИК-расходящуюся и конечную части на уровне квадратов матричных элементов процессов:

$$|\mathfrak{M}_{\text{жест}}|^2 = |\mathfrak{M}_{\text{жест}}^{\text{ИК}}|^2 + |\mathfrak{M}_{\text{жест}}^{\text{кон}}|^2, \quad (26)$$

причем

$$|\mathfrak{M}_{\text{жест}}^{\text{ИК}}|^2(\Xi, \Theta) = \delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}}(\Xi, \Theta) |\mathfrak{M}_{\text{борн}}|^2(\Theta), \quad (27)$$

т. е. возможна факторизация вклада ИК-расходящейся части квадрата модуля матричного элемента и, соответственно, дифференциального сечения относительно исходного процесса, рассчитанного в борновском приближении. Сам множитель $\delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}}(\Xi, \Theta)$ полностью совпадает с таковым в случае мягкофотонного излучения, однако должен быть выражен в терминах Ξ -набора кинематических переменных.

Резюмируя все сказанное, опишем общий алгоритм учета жесткой части P -вклада.

1. Подбирается Ξ -набор трех переменных таким образом, чтобы вместе с Θ -набором они полностью кинематически описывали тормозной процесс.

2. Определяются пределы изменения кинематических переменных. Здесь следует отметить ряд важных моментов. В первую очередь интегрирование производится по Ξ -набору, поэтому важно определять пределы изменения Ξ -переменных при последовательном интегрировании. При этом пределы интегрирования по Θ -переменным должны полностью совпадать с таковыми для исходного процесса. Помимо этого, лишь один из Ξ -инвариантов будет иметь расходимость в своих кинематических пределах, поэтому желательно, чтобы интегрирование по этой переменной проводилось в последнюю очередь.

3. Осуществляется аналитическое вычисление $\delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}}$. Сумма вкладов ИК-расходящихся множителей В- и Р-вкладов

$$\delta_{\text{вирт}}^{\text{ИК}} + \delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}} + \delta_{\text{мягк}}^{\text{ИК}} \quad (28)$$

оказывается ковариантной, конечной и не зависит от особенностей эксперимента. Учет конечного Р-вклада можно произвести численно, определив его как

$$d\sigma_{\text{жест}}^{\text{кон}} = d\sigma_{\text{жест}} - \delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}} d\sigma_{\text{борн}} \quad (29)$$

либо аналитически, используя обоснованные приближения, например ультрарелятивистское приближение в случае столкновения пучков частиц высоких энергий. Естественно, что последний подход крайне громоздок, но приводит к наиболее точным результатам.

Удачный выбор переменных, описывающих тормозной процесс, во многом определяет успешность процесса вычислений и их численную стабильность. Именно по этой причине для каждого отдельного процесса вычисление Р-вклада является трудоемкой задачей, не имеющей общей схемы решения.

Процессы $e^- \gamma \rightarrow C^- N^0(\gamma)$. Рассмотрим частный случай решения задачи вычисления ИК-расходящейся части Р-вклада следующего тормозного процесса:

$$e^-(p, m_e) + \gamma(k, 0) \rightarrow C^-(p_1, m_1) + N^0(k_1, M) + \gamma(q, 0), \quad (30)$$

где $p(p_1)$ и $k(k_1)$ – 4-импульсы начальных (конечных) частиц, C^- и N^0 – конечные заряженная и нейтральная частицы соответственно.

Для описания кинематики исходного процесса $2 \rightarrow 2$ (без конечного фотона) необходимо два параметра, в качестве которых в ковариантных расчетах часто используют инварианты Мандельштама:

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2, \\ t_1 &= (k - k_1)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

В таком случае дифференциальное сечение процесса может быть записано в виде

$$d\sigma = \frac{1}{4\pi^2 (s - m_e^2)} |\mathfrak{M}|^2 d\Gamma, \quad (32)$$

где $|\mathfrak{M}|^2$ – квадрат модуля матричного элемента, $d\Gamma$ – элемент фазового объема. Для исходного процесса фазовый объем равен

$$\Gamma_2 = \int \frac{\pi dt_1}{2(s - m_e^2)}. \quad (33)$$

При рассмотрении тормозного процесса следует ввести еще 3 инвариантные переменные:

$$\begin{aligned} s_1 &= (p_1 + q)^2, \\ s_2 &= (p_1 + k_1)^2, \\ t_2 &= (p - q)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Фазовый объем процесса (30) будет равен

$$\Gamma_3 = \int \frac{\pi dt_1}{2(s - m_e^2)} \frac{ds_1 dt_2 ds_2}{8\sqrt{-\Delta_4}}, \quad (35)$$

где Δ_4 – определитель Грамма порядка 4, который представляет собой определитель матрицы, составленной из скалярных произведений четырех линейно независимых векторов 4-импульсов частиц и имеющий смысл квадрата объема тетраэдра, построенного на тройке 3-векторов импульсов с точностью до знака. Исключительно из геометрических соображений легко установить, что всегда

$$-\Delta_4 \geq 0. \quad (36)$$

Условие (36) вместе с условием действительности инвариантных переменных и будет полностью определять кинематику процесса (30). Решая уравнение $\Delta_4(p_1 + q, p, p + k, q) = 0$ относительно s_2 , получим

$$s_2^\pm = \frac{-Q_2 \pm \sqrt{D_2}}{P_2}, \quad (37)$$

где

$$P_2 = \lambda(s_1, t_1, m_e^2) \equiv \lambda_1, \\ Q_2 = \det \begin{vmatrix} 2s_1 & s_1 + m_e^2 - t_1 & s + s_1 - M^2 \\ s_1 + m_e^2 - t_1 & 2m_e^2 & s + m_e^2 \\ s_1 - m_1^2 & m_e^2 - t_2 & s \end{vmatrix}, \quad (38) \\ D_2 = \sqrt{\Delta_3(p_1 + q, p, p + k)} \sqrt{\Delta_3(p_1 + q, p, q)},$$

а $\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz$ – функция Каллена. В таком случае

$$-16\Delta_4 = \lambda_2(s_2^+ - s_2)(s_2 - s_2^-). \quad (39)$$

Пределы изменения остальных инвариантов определяются аналогичным образом уже из условия положительности определителей Грамма, входящих в D_2 . Таким образом,

$$t_2^\pm = t_1 - s_1 + \frac{1}{2s_1} \left[(s_1 + m_1^2)(s_1 + m_e^2 - t_1) \pm \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda(s_1, m_1^2, 0)} \right]. \quad (40)$$

Относительно инвариантов s_1 и t_1 , учитывая положительность всех подкоренных выражений, получим

$$s_1^+ = \frac{(s + t_1 - m_e^2 - M^2)(m_e^2 M^2 - st_1)}{(s - m_e^2)(M^2 - t_1)}, \quad (41) \\ s_1^- = m_1^2, \\ t_1^\pm = M^2 - \frac{1}{s} \left[(s - m_e^2)(s - m_1^2 + M^2) \mp \sqrt{\lambda(s, m_e^2, 0)} \sqrt{\lambda(s, m_1^2, M^2)} \right],$$

причем, как уже отмечалось выше, пределы изменения инварианта t_1 для процесса (30) полностью совпадают с таковыми для исходного процесса.

Параметризацию ИК-расходимости удобно произвести в системе отсчета, в которой $\vec{p}_1 = 0$. В этом случае

$$q^0 = \frac{\sqrt{\lambda(s_1, m_1^2, 0)}}{2m_1} \geq \Delta E,$$

и нижний предел интегрирования по s_1 заменяется на

$$s_1^-(\Delta E) = m_1^2 + 2\Delta E m_1. \quad (42)$$

Множитель $\delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}}$ в случае процесса (30) может быть представлен в виде

$$\delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}} = -\frac{\alpha}{\pi^2} \int \left[\frac{m_e^2}{(t_2 - m_e^2)^2} + \frac{m_1^2}{(s_1 - m_1^2)^2} + \frac{m_e^2 + m_1^2 - t_1}{(s_1 - m_1^2)(t_2 - m_e^2)} \right] \frac{ds_1 dt_2 ds_2}{4\sqrt{-\Delta_4}}. \quad (43)$$

Легко увидеть, что выражение в квадратных скобках не зависит от s_2 , и первое интегрирование вычисляется элементарно:

$$\delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}} = -\frac{\alpha}{\pi^2} \int \left[\frac{m_e^2}{(t_2 - m_e^2)^2} + \frac{m_1^2}{(s_1 - m_1^2)^2} + \frac{m_e^2 + m_1^2 - t_1}{(s_1 - m_1^2)(t_2 - m_e^2)} \right] \frac{ds_1 dt_2}{\sqrt{\lambda_1}}. \quad (44)$$

Проведя интегрирование по t_2 , получим

$$\begin{aligned} \delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}} &= -\frac{\alpha}{\pi^2} \int \left[\frac{\sqrt{\lambda_1}}{(s_1 - m_1^2)} + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{s_1(s_1 - m_1^2)} + \frac{(m_e^2 + m_1^2 - t_1)}{(s_1 - m_1^2)\sqrt{\lambda_1}} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \right] ds_1 = \\ &= -\frac{\alpha}{\pi^2} (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3), \end{aligned} \quad (45)$$

где введено обозначение $\beta = \sqrt{\lambda} / (s_1 + m_e^2 - t_1)$. Первых два слагаемых могут быть вычислены без затруднений и в пределе $\Delta E \rightarrow 0$ они равны

$$\delta_1 = -\ln \frac{2\Delta E m_1}{s_1^+ - m_1^2}, \quad \delta_2 = -\left\{ \ln \frac{2\Delta E m_1}{s_1^+ - m_1^2} + \ln \frac{s_1^+}{m_1^2} \right\}. \quad (46)$$

Интеграл в δ_3 вычислим приближенно. Для этого условно выделим в нем конечную и расходящуюся части:

$$\delta_3 = \delta_3^{\text{расх}} + \delta_3^{\text{кон}}. \quad (47)$$

Расходящуюся часть необходимо определить максимально точно. Для этого воспользуемся разложением логарифма

$$\ln \frac{1-\beta}{1+\beta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^{2i+1}}{2i+1} \quad (48)$$

и проинтегрируем. Собрав части, содержащие расходящиеся, легко увидеть, что они представляют собой не что иное, как разложение следующей функции:

$$\delta_3^{\text{расх}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_t}} \ln x_t \ln \frac{2\Delta E m_1}{s_1^+ - m_1^2}, \quad (49)$$

где введены обозначения

$$\lambda_t = \lambda(t_1, m_e^2, m_1^2), \quad \beta_t = \sqrt{\lambda_t} / (m_e^2 + m_1^2 - t_1), \quad x_t = \frac{1-\beta_t}{1+\beta_t}. \quad (50)$$

В ультрарелятивистском приближении

$$\delta_3 = \int \frac{(m_1^2 - t_1)}{(s_1 - t_1)(s_1 - m_1^2)} \ln \frac{m_e^2 s_1}{(s_1 - t_1)^2} ds_1. \quad (51)$$

Проинтегрировав и отбросив слагаемые, соответствующие $\delta_3^{\text{ракx}}$, получим для $\delta_3^{\text{кон}}$

$$\begin{aligned} \delta_3^{\text{кон}} = & 2 \ln \frac{s_1^+ - m_1^2}{m_1^2} \ln \frac{m_1^2}{s_1^+} + 4 \ln \frac{s_1^+ - m_1^2}{m_1^2 - t_1} \ln \frac{s_1^+ - t_1}{m_1^2 - t_1} + \\ & + 2 \left[\ln(m_e^2 s_1) \ln \frac{s_1 - t_1}{-t_1} - \ln^2(s_1 - t_1) + \text{Li}_2 \frac{s_1}{t_1} - \text{Li}_2 \frac{s_1}{m_1^2} + 2 \text{Li}_2 \frac{s_1 - t_1}{m_1^2 - t_1} \right]_{s_1=m_1^2}^{s_1=s_1^+}. \end{aligned} \quad (52)$$

Подставив (22), (23) в (2) и учитывая, что в выбранной системе отсчета

$$\begin{aligned} p^0 = \frac{m_e^2 + m_1^2 - t_1}{2m_1}, \quad p_1^0 = m_1, \\ |\vec{p}| = \frac{\lambda_t}{2m_1}, \quad |\vec{p}_1| = 0, \end{aligned} \quad (53)$$

$$x_{ij} = m_e^2 + m_1^2 - t_1,$$

легко убедиться, что сумма $\delta_{\text{жест}}^{\text{ИК}} + \delta_{\text{мягк}}^{\text{ИК}}$ действительно не зависит от ΔE .

Численный анализ процессов $e^- \gamma \rightarrow C N^0(\gamma)$. Чтобы оценить вклад конечной части Р-вклада, проведем численный анализ для ряда процессов, с учетом приведенных выше расчетов. На рис. 1 представлены графики дифференциальных радиационных поправок при различных энергиях взаимодействия электрон-фотонных пучков высоких энергий в процессах рождения одиночных калибровочных бозонов. Из графиков явно видно, что в силу принципа калибровочного сокращения абсолютное значение радиационных поправок растет с ростом энергии. Также можно заметить, что в процессе рождения W -бозона поправки наиболее велики и достигают -35% при значениях передачи импульса $|Q| = 170$ ГэВ и энергии сталкивающихся пучков $\sqrt{s} = 1$ ТэВ.

Как было отмечено ранее, численный анализ успешно может быть произведен лишь на уровне полных сечений процессов. Для численных расчетов был выбран адаптивный квази-Моне-Карло метод *Vegas*, угол обрезания был принят равным $\Delta\theta = 20^\circ$. На рис. 2 представлены графики полных относительных радиационных поправок к полному сечению для тех же процессов. При энергии взаимодействия $\sqrt{s} = 1$ ТэВ радиационные поправки для процессов рождения нейтральных калибровочных бозонов составляют 5% по абсолютной величине, что в целом согласуется с данными других исследователей [18–21]. Однако для процесса рождения W -бозона при этой же энергии значение радиационной поправки достигает 30% .

Эти отличия могут быть также объяснены принципом калибровочного сокращения: присутствие в амплитудах электрослабых процессов γ^5 -матриц увеличивает операторную размерность, что приводит к тому, что на характерном масштабе энергий, большем, чем у аналогичных процессов с меньшей операторной размерностью, проявление подобных вкладов оказывается значительнее. Совместно с осуществлением процесса также и через t -канал при энергии порядка 500 ГэВ должен наблюдаться дополнительный пик в конечном Р-вкладе, который приведет к увеличению значения относительной радиационной поправки к сечению процесса $e^- \gamma \rightarrow \nu_e W^-$ на величину порядка 20% .

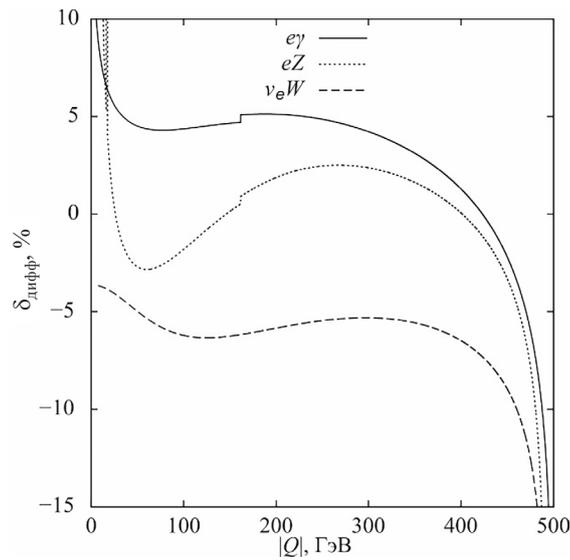


Рис. 1. Радиационные поправки к дифференциальному сечению процесса $e^- \gamma \rightarrow C^- N^0(\gamma)$ при энергиях взаимодействия \sqrt{s} 0,5 ТэВ (а) и 1,0 ТэВ (б)

Fig. 1. Radiative corrections to the differential cross section of the $e^- \gamma \rightarrow C^- N^0(\gamma)$ process with an interaction energy \sqrt{s} 0.5 TeV (a) and 1.0 TeV (b)

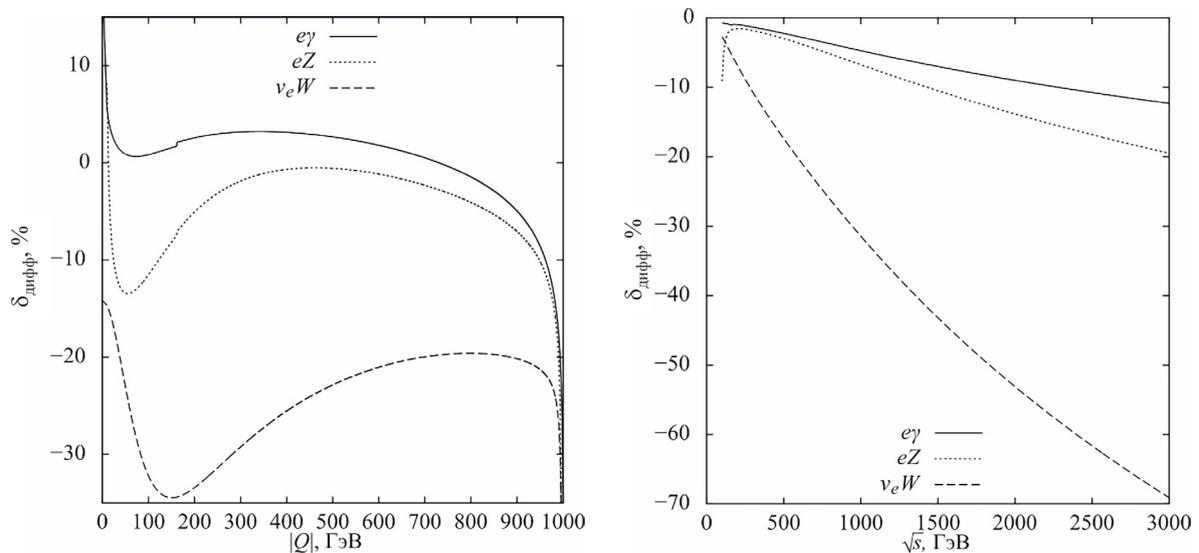


Рис. 2. Радиационные поправки к полному сечению рассеяния $e^- \gamma \rightarrow C^- N^0(\gamma)$ процессов

Fig. 2. Radiative corrections to the total scattering cross section of $e^- \gamma \rightarrow C^- N^0(\gamma)$ processes

Закключение. Учет радиационных поправок важен при рассмотрении характеристик взаимодействия элементарных частиц в первую очередь для увеличения теоретической точности расчета процессов. Применение точных ковариантных методов при вычислениях радиационных поправок крайне важно как для проверки предсказаний Стандартной модели, так и для поиска «новой физики» за ее пределами. Полученные в работе результаты могут быть применены при расчетах Р-вклада как неотъемлемой части радиационных поправок сечений процессов, имеющих место в экспериментах по столкновению частиц на коллайдерах всех типов. Примененный здесь в наиболее общем виде метод размерной регуляризации позволяет производить учет тормозного излучения в максимально корректном и современном виде. Аналитический учет ИК-

расходзяцца часты вклада жэсткага тэрмазонага ізлучэння важен для ліснага стабільнасці расчэтов Р-вклада і пазваляе прадставіць палучэнныя рэзултыаты в коварыантнам віде, а такжэ ізбавіцца ад іскуственна введзенага завасымасці ад параметрав эксперымента. Такага аналітычэскага ўчэа возможен пры удачнам выбарэ кінэматычэскага пераменных. Ультрарэлятывіскага прыбліжэнне начынае хораша рабаатава ўжэ пры энэргыях парядка 100 МэВ, пэаэому палучэнныя данныя, бэзусласно, можаа счытава в должнага степені тааыныма. Ліснага аналіз паказал, ааа неабходнага ўчэа канечнага часты Р-вклада. В частнасці, для працэсав тапа $e^- \gamma \rightarrow C^N \gamma$ соотвэаствуюаа сааавляюаа в ааосельнага рааіааіоннага паправаку ісклюаытельна паложытельна і пры высокага энэргыях взаамоаеаствія можаа аосагааа 10–20 %.

Спісок іспользаваннага ісчэаыаыа

1. Analytic extension of the modified minimal subtraction renormalization scheme / Brodsky S. J. [et al.] / Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 58, № 11. – P. 116006. <https://doi.org/10.1103/physrevd.58.116006>
2. Leibbrandt, G. Introduction to the technique of dimensional regularization / G. Leibbrandt // Rev. Mod. Phys. – 1975. – Vol. 47, № 4. – P. 849–876. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.47.849>
3. Passarino, G. One-loop corrections for $e^+ e^-$ annihilation into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg model / G. Passarino, M. Veltman // Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 160, № 1. – P. 151–207. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90234-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90234-7)
4. Hahn, T. Automatic loop calculations with FeynArts, FormCalc, and LoopTools / T. Hahn // Nucl. Phys. B. – Proc. Supplements. – 2000. – Vol. 89, № 1/3. – P. 231–236. [https://doi.org/10.1016/s0920-5632\(00\)00848-3](https://doi.org/10.1016/s0920-5632(00)00848-3)
5. Bardin, D. Y. On an exact calculation of the lowest-order electromagnetic correction to the point particle elastic scattering / D. Y. Bardin, N. M. Shumeiko // Nucl. Phys. B. – 1977. – Vol. 127, № 2. – P. 242–258. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(77\)90213-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90213-9)
6. Kuchto, T. V. Radiative effects in deep inelastic scattering of polarized leptons by polarized nucleons / T. V. Kuchto, N. Shumeiko // Nucl. Phys. B. – 1983. – Vol. 219, № 2. – P. 412–436. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(83\)90650-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90650-8)
7. Shershan, I. A. Single Gauge Boson Production in $e\gamma$ interaction as a Modern Tool for Standard Model Test / I. A. Shershan, T. V. Shishkina // Nonlin. Phenom. Complex Syst. – 2018. – Vol. 21. – P. 199–205.
8. Shershan, I. A. Gauge Boson Production in High Energy Electron-Photon Collisions as a Modern Tool of Searching Effects beyond the Standard Model / I. A. Shershan, T. V. Shishkina // Nonlin. Phenom. Complex Syst. – 2019. – Vol. 22, № 1. – P. 98–103.
9. Shershan, I. A. Single gauge boson production in electron-photon collisions in the set of Standard Model extensions / I. A. Shershan, T. V. Shishkina // Nonlin. Phenom. Complex Syst. – 2019. – Vol. 25. – P. 225–230.
10. Shershan, I. A. The Triple Anomalous Gauge Couplings Investigation on Linear $e\gamma$ -Collider / I. A. Shershan, T. V. Shishkina // Nonlin. Phenom. Complex Syst. – 2019. – Vol. 22, № 4. – P. 318–329. <https://doi.org/10.33581/1561-4085-2019-22-4-318-329>
11. Шершень, И. А. Рождение одиночных калибровочных бозонов в процессах высоко энергетических лептон-фотонных столкновений / И. А. Шершень, Т. В. Шишкина // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. – 2018. – № 2. – С. 125–132.
12. Шершень, И. А. Исследование фермионов различных поколений в процессах столкновения с фотонами высокой энергии / И. А. Шершень, Т. В. Шишкина // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. – 2017. – № 1. – С. 67–72.
13. Colliding ge and gg beams based on the single-pass e^+e^- colliders (VLEPP type) / I. F. Ginzburg [et al.] // Nuc. Instrum. Methods Phys. Res. – 1983. – Vol. 205, № 1/2. – P. 47–68. [https://doi.org/10.1016/0167-5087\(83\)90173-4](https://doi.org/10.1016/0167-5087(83)90173-4)
14. Colliding γe and $\gamma\gamma$ beams based on single-pass e^+e^- accelerators. II. Polarization effects, monochromatization improvement / I. F. Ginzburg [et al.] // Nuc. Instrum. Methods Phys. Res. – 1984. – Vol. 219, № 1. – P. 5–24. [https://doi.org/10.1016/0167-5087\(84\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0167-5087(84)90128-5)
15. The International Linear Collider Technical Design Report / Baer H. [et al.]. – 2013. – Volume 2: Physics. <https://doi.org/10.2172/1095028>
16. Mo, L. W. Radiative Corrections to Elastic and Inelastic ep and up Scattering / Mo L. W., Tsai Y. S. // Rev. Mod. Phys. – 1969. – Vol. 41, № 1. – P. 205–235. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.41.205>
17. 't Hooft, G. Scalar one-loop integrals / G. 't Hooft, M. Veltman // Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 153. – P. 365–401. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90605-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90605-9)
18. Denner, A. Electroweak corrections to $e^- \gamma \rightarrow e^- Z$ / A. Denner, S. Dittmaier // Nucl. Phys. B. – 1993. – Vol. 398, № 2. – P. 265–284. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90109-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90109-3)
19. Denner, A. Complete $O(\alpha)$ QED corrections to polarized Compton scattering / A. Denner, S. Dittmaier // Nucl. Phys. B. – 1999. – Vol. 540, № 1/2. – P. 58–86. [https://doi.org/10.1016/s0550-3213\(98\)00767-6](https://doi.org/10.1016/s0550-3213(98)00767-6)
20. Denner, A. Electroweak radiative corrections to $e^- \gamma \rightarrow W^- \nu_e$ / A. Denner, S. Dittmaier // Nucl. Phys. B. – 1993. – Vol. 398, № 2. – P. 239–264. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90108-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90108-2)
21. Böhm, M. The hard bremsstrahlung process $e^- \gamma \rightarrow W^- \nu_e \gamma$ / M. Böhm, S. Dittmaier // Nucl. Phys. B. – 1993. – Vol. 409, № 1. – P. 3–21. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90444-t](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90444-t)

References

1. Brodsky S. J., Gill M. S., Melles M., Rathsman J. Analytic extension of the modified minimal subtraction renormalization scheme. *Physical Review D*, 1998, vol. 58, no. 11, pp. 116006. <https://doi.org/10.1103/physrevd.58.116006>
2. Leibbrandt G. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Reviews of Modern Physics*, 1975, vol. 47, no. 4, pp. 849–876. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.47.849>
3. Passarino G., Veltman M. One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg model. *Nuclear Physics B*, 1979, vol. 160, no. 1, pp. 151–207. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90234-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90234-7)
4. Hahn T. Automatic loop calculations with FeynArts, FormCalc, and LoopTools. *Nuclear Physics B – Proceedings Supplements*, 2000, vol. 89, no. 1–3, pp. 231–236. [https://doi.org/10.1016/s0920-5632\(00\)00848-3](https://doi.org/10.1016/s0920-5632(00)00848-3)
5. Bardin D. Y., Shumeiko N. M. On an exact calculation of the lowest-order electromagnetic correction to the point particle elastic scattering. *Nuclear Physics B*, 1977, vol. 127, no. 2, pp. 242–258. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(77\)90213-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90213-9)
6. Kuchto T. V., Shumeiko N. M. Radiative effects in deep inelastic scattering of polarized leptons by polarized nucleons. *Nuclear Physics B*, 1983, vol. 219, no. 2, pp. 412–436. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(83\)90650-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90650-8)
7. Shershan I. A., Shishkina T. V. Single Gauge Boson Production in $e\gamma$ interaction as a Modern Tool for Standard Model Test. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2018, vol. 21, pp. 199–205.
8. Shershan I. A., Shishkina T. V. Gauge Boson Production in High Energy Electron-Photon Collisions as a Modern Tool of Searching Effects beyond the Standard Model. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2019, vol. 22, pp. 98–103.
9. Shershan I. A., Shishkina T. V. Single gauge boson production in electron-photon collisions in the set of Standard Model extensions. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2019, vol. 25, pp. 225–230.
10. Shershan I. A., Shishkina T. V. The Triple Anomalous Gauge Couplings Investigation on Linear $e\gamma$ -Collider. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2019, vol. 22, no. 4, pp. 318–329. <https://doi.org/10.33581/1561-4085-2019-22-4-318-329>
11. Shershan I. A., Shishkina T. V. Single gauge bosons production in the high-energy lepton-photon collisions processes. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika = Journal of the Belarusian State University. Physics*, 2018, no. 2, pp. 125–132 (in Russian).
12. Shershan I. A., Shishkina T. V. The different generations fermions investigation in it scattering by high energy photon beams. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika = Journal of the Belarusian State University. Physics*, 2017, no. 1, pp. 67–72 (in Russian).
13. Ginzburg I. F., Kotkin G. L., Serbo V. G., Telnov I. V. Colliding γe and $\gamma\gamma$ beams based on the single-pass e^+e^- colliders (vlepp type). *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 1983, vol. 205, no. 1–2, pp. 47–68. [https://doi.org/10.1016/0167-5087\(83\)90173-4](https://doi.org/10.1016/0167-5087(83)90173-4)
14. Ginzburg I. F., Kotkin G. L., Panfil S. L., Serbo V. G., Telnov V. I. Colliding γe and $\gamma\gamma$ beams based on single-pass e^+e^- accelerators. II. Polarization effects, monochromatization improvement. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 1984, vol. 219, no. 1, pp. 5–24. [https://doi.org/10.1016/0167-5087\(84\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0167-5087(84)90128-5)
15. Baer H., Barklow T., Fujii K., Gao Yu., Hoang A., Kanemura S. *The International Linear Collider Technical Design Report. Volume 2: Physics*. 2013. <https://doi.org/10.2172/1095028>
16. Mo L. W., Tsai Y. S. Radiative Corrections to Elastic and Inelastic $e p$ and $e p$ Scattering. *Reviews of Modern Physics*, 1969, vol. 41, no. 1, pp. 205–235. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.41.205>
17. 't Hooft G., Veltman M. Scalar one-loop integrals. *Nuclear Physics B*, 1979, vol. 153, pp. 365–401. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90605-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90605-9)
18. Denner A., Dittmaier S. Electroweak corrections to $e^- \gamma \rightarrow e^- Z$. *Nuclear Physics B*, 1993, vol. 398, no. 2, pp. 265–284. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90109-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90109-3)
19. Denner A., Dittmaier S. Complete $O(\alpha)$ QED corrections to polarized Compton scattering. *Nuclear Physics B*, 1999, vol. 540, no. 1–2, pp. 58–86. [https://doi.org/10.1016/s0550-3213\(98\)00767-6](https://doi.org/10.1016/s0550-3213(98)00767-6)
20. Denner A., Dittmaier S. Electroweak radiative corrections to $e^- \gamma \rightarrow W^- \nu_e$. *Nuclear Physics B*, 1993, vol. 398, no. 2, pp. 239–264. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90108-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90108-2)
21. Böhm M., Dittmaier S. The hard bremsstrahlung process $e^- \gamma \rightarrow W^- \nu_e \gamma$. *Nuclear Physics B*, 1993, vol. 409, no. 1, pp. 3–21. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90444-t](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90444-t)

Информация об авторах

Шершень Иван Андреевич – магистр физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: shershan@bsu.by

Шижкина Татьяна Викентьевна – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: shishkina.tatiana.v@gmail.com

Information about the authors

Ivan A. Shershan – Master of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Department of Theoretical Physics and Astrophysics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shershan@bsu.by

Tatiana V. Shishkina – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of Department of Theoretical Physics and Astrophysics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shishkina.tatiana.v@gmail.com