ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 514.142
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-7-13

Поступила в редакцию 23.12.2020
Received 23.12.2020

В. И. Янчевский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ПРИВЕДЕННЫЕ АНИЗОТРОПНЫЕ УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ УАЙТХЕДА ГЕНЗЕЛЕВЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ ВЫЧЕТОВ ИХ ЦЕНТРОВ

Аннотация. Вычисляются приведенные анизотропные унитарные группы Уайтхеда инволютивных гензелевых алгебр с делением со специальными полями вычетов их центров: C_1-полями, конечными полями, вещественно замкнутыми полями.

Ключевые слова: гензелевы алгебры с делением, снабженные унитарными инволюциями, унитарные группы гензелевой алгебры с унитарными инволюциями, приведенная анизотропная унитарная группа Уайтхеда гензелевой алгебры с унитарными инволюциями, C_1-поля, конечные поля, вещественно замкнутые поля

Для цитирования. Янчевский, В. И. Приведенные анизотропные унитарные группы Уайтхеда гензелевых алгебр с делением со специальными полями вычетов их центров / В. И. Янчевский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 7–13. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-7-13

Vyacheslav I. Yanchevskii

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

REDUCED ANISOTROPIC UNITARY WHITEHEAD GROUPS OF HENSELIAN DIVISION ALGEBRAS WITH SPECIAL RESIDUE FIELDS OF THEIR CENTERS

Abstract. The reduced anisotropic unitary Whitehead groups of henselian division algebras with unitary involutions are computed in the cases where the centers of residue algebras are of special types.

Keywords: henselian division algebras with unitary involutions, unitary groups of henselian algebras with unitary involutions, reduced anisotropic unitary Whitehead groups of henselian algebras with unitary involutions, C_1-fields, finite fields, real closed fields

For citation. Yanchevskiĭ V. I. Reduced anisotropic unitary Whitehead groups of henselian division algebras with special residue fields of their centers. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 7–13 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-7-13

Пусть k – гензелево поле, K – квадратичное сепарабельное расширение поля k, D – центральная конечномерная алгебра с делением над K, τ – унитарная инволюция алгебры D, т. е. инволюция алгебры D с нетривиальным ограничением на K. Напомним, что индекс ветвления алгебры D над K равен $\lambda_D{}^2 r$, где $r=[Z(\bar{D}):\bar{K}]$, а $Z(\bar{D})$ – центр алгебры $\bar{D}$. Пусть $U(D,\tau) = \{u\in D^* \mid uu^\tau = 1\}$ – унитарная группа алгебры D относительно инволюции τ; специальная унитарная группа алгебры D относительно инволюции τ: $SU(D,\tau) = \{u \in U(D,\tau) \mid \mathrm{Nrd}_D(u) = 1\}$, где $\mathrm{Nrd}_D : D^* \to K^*$ – гомоморфизм приведенной нормы группы D^* в группу K^*; коммутант $U(D,\tau)'$ унитарной группы $U(D,\tau)$; приведенная анизотропная унитарная группа Уайтхеда алгебры D относительно

© Янчевский В. И., 2021

τ – $SUK_1^{an}(D,\tau) = SU(D,\tau) \,/\, U(D,\tau)'$, $SU^{\nu}(D,\tau) = \{d \in SU(D,\tau) \mid \underline{N(\bar{d}) = 1}\}$. Нам также потребуется группа $SUK_1^{\nu}(D,\tau)$, которая определяется как факторгруппа $SU^{\nu}(D,\tau)/U(D,\tau)'$. Положим также $E_\lambda = N|_{\overline{SU(D,\tau)}}$, где $N = N_{\overline{Z}/\overline{K}}(\mathrm{Nrd}_{\overline{D}})$, $E = \big((1+M_D)\cap SU(D,\tau)\big)U(D,\tau)'/U(D,\tau)'$.

Конечно, группа $SUK_1^{an}(D,\tau)$ может быть определена и в случае любой алгебры с делением, и унитарной инволюции τ и играет важную роль при изучении анизотропных групп внешних форм групп серии A_n. Однако если в случае изотропных групп имеется развитая теория (см. напр., [1–12]), описывающая их свойства, то в анизотропном случае проблема описания приведенных групп Уайтхеда остается, несмотря на более чем 30-летнюю историю ее существования и пристальное внимание к ней специалистов, малоприступной. К настоящему времени в литературе известны лишь три результата, связанных с конкретными алгебрами D [13–15]. Поэтому важным является рассмотрение классов специальных алгебр D над гензелевыми полями k как полигона для получения новых гипотез о структуре и свойствах групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$.

Целью настоящего исследования является описание групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ в случае, когда поле вычетов центра алгебры D является либо C_1-поле (в частности, конечное поле), либо вещественно замкнуто.

Ниже алгебры D предполагаются слабо разветвленными и в случае, когда $\mathrm{char}\,\bar{k} \neq 0$, предполагается, что $\mathrm{char}\,\bar{k}$ нечетна. Для изложения результатов статьи нам потребуются следующие определения и обозначения.

Обозначим через v единственное гензелево нормирование алгебры D, возникающее из гензелевого нормирования поля k. Пусть V_D – кольцо нормирования v алгебры D, M_D – идеал нормирования v (единственный двусторонний максимальный идеал кольца V_D), $\overline{D} = V_D / M_D$ – $\overline{K}$-алгебра вычетов алгебры D. Определим также редукцию $\bar{\tau}$ инволюции τ следующим образом: для всякого элемента $(d + M_D)$ будем иметь $(d+M_D)^{\tau} = d^{\tau} + M_D$.

О п р е д е л е н и е 1. Алгебра D называется неразветвленной над K, если $[D:K]=[\overline{D}:\overline{K}]<\infty$ и центр $\overline{D}$ сепарабелен над $\overline{K}$.

Если алгебра D неразветвлена, то $\lambda_D = r = 1$.

При вычислении групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ мы часто будем пользоваться следующим известным утверждением.

Т е о р е м а 1. *Пусть алгебра D – слабо разветвленная алгебра над K с унитарной инволюцией τ и ветвящаяся над K, K/k – слабо разветвленное квадратичное расширение. Тогда во введенных выше обозначениях имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными столбцом и строками:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
1 & \to & E & \to & SU^{\nu}(D,\tau)/U(D,\tau)' & \to & SUK_1^{\nu}(D,\tau) & \to & 1, \qquad (1)\\
 & & & & & & \downarrow & & \\
1 & \to & E & \to & SUK_1^{an}(D,\tau) & \to & \overline{SU(D,\tau)}/U(\overline{D},\bar{\tau})' & \to & 1, \qquad (2)\\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & E_\lambda & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 1 & &
\end{array}$$

Помимо этого, точны также последовательности:

$$1 \to SUK_1^{an}(\overline{D},\bar{\tau}) \to SUK_1^{\nu}(D,\tau) \to \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}\left(\overline{U(D,\tau)}\right) \cap \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}\left(\overline{SL^{\nu}(D,\tau)}\right) \to 1, \tag{3}$$

$$1 \to SUK_1^{an}(\overline{D},\bar{\tau}) \to \overline{SU(D,\tau)}/U(\overline{D},\bar{\tau})' \to \overline{SU(D,\tau)}/SU(\overline{D},\bar{\tau}) \to 1. \tag{4}$$

З а м е ч а н и е 1. Группа $\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}\left(U(\overline{D},\bar{\tau})\right) \cap \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}\left(\overline{SL^{\nu}(D,\tau)}\right)$ может быть вычислена с помощью следующих специальных подгрупп группы $\overline{D}^*$:

$$\Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} = \mathrm{Nrd}_{\bar D}(\bar D^*)_{\bar\tau}, \quad \Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} = \left\{ z \in \mathrm{Nrd}_{\bar D}(\bar D^*) | N_{\bar Z/\bar K}(z) \in \bar k \right\},$$

где $\bar Z = Z(\bar D)$.

П р е д л о ж е н и е. *Если* $\mathrm{char}\,\bar k \neq 0$, *то имеет место точная последовательность:*

$$1 \to \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} \to \Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} \xrightarrow{\bar\tau - 1} \left(\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}\right)^{\bar\tau - 1} \to 1.$$

Кроме того,

$$\mathrm{Nrd}_{\bar D}\left(U(\bar D, \bar\tau)\right) \cap \mathrm{Nrd}_{\bar D}\left(\overline{SL^{\nu}(D,\tau)}\right) = \left(\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}\right)^{\bar\tau - 1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения получается из определения групп $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}$, $\Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}$ и прямого вычисления факторгруппы $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\bar k$ – C_1-поле. Напомним следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. *Поле F называется C_1-полем, если любая форма $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ степени $d < n$ с коэффициентами в поле F изотропна над F.*

В случае, когда $\bar k$ – C_1-поле, справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть $\bar k$ – C_1-поле. Тогда имеет место следующая точная последовательность:*

$$1 \to SL(\bar Z / \bar K) / \left(SL(\bar Z / \bar K) \cap \bar Z^*_{\bar\tau}\right) \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1,$$

где $\bar Z$ – центр алгебры $\bar D$, $\bar Z_{\bar\tau}$ – поле инвариантов $\bar\tau$ в $\bar Z$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\bar k$ – C_1-поле, то для всякого его конечного алгебраического расширения L группа Брауэра $\mathrm{Br}(L)$ тривиальна, поэтому алгебра вычетов $\bar D$ коммутативна. Откуда вытекает тривиальность группы E. Кроме того, ввиду теоремы 1 следует существование точной последовательности

$$1 \to \Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1.$$

Таким образом, группа $SUK_1^{an}(D,\tau)$ является расширением группы $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}$ с помощью подгруппы E_λ группы корней степени λ из 1, принадлежащих полю K. Обратимся к группе $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}$. Заметим, что группа $\Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}$ совпадает с мультипликативной группой $\bar Z^*_{\bar\tau}$ поля $\bar Z_{\bar\tau}$, а $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} = \bar Z^*_{\bar\tau} SL(\bar Z / \bar K)$. Следовательно,

$$\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} = \left(\bar Z^*_{\bar\tau} SL(\bar Z / \bar K)\right) / \bar Z^*_{\bar\tau},$$

что влечет, согласно теореме об изоморфизме групп,

$$\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} \cong SL(\bar Z / \bar K) / \left(SL(\bar Z / \bar K) \cap \bar Z^*_{\bar\tau}\right).$$

Теорема доказана.

В случае конечного поля $\bar k$ получим более явный результат для вычисления группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$. Из теоремы 1 и предложения следует, что вычисление этих групп тесно связано с группами E, E_λ и $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar D}}$, определение которых дается в терминах алгебр вычетов $\bar D$. Этим вычислениям предпошлем описание структуры алгебр $\bar D$. Так как $\bar k$ – C_1-поле, то $\bar D = \bar Z$. Покажем, что степень $[\bar Z : \bar K]$ не превосходит 2. Для этого установим, что, если $[\bar Z : \bar K] \neq 1$, то $[\bar Z : \bar K] = 2$. В случае, когда $[\bar Z : \bar K] \neq 1$, к алгебре D применимо описание центра $Z(\bar D)$, которое состоит в следующем. Пусть I – τ-инвариантная алгебра инерции алгебры D. Тогда группа Галуа расширения Z/k, где Z – центр алгебры I, есть прямое произведение групп Галуа $\mathrm{Gal}(Z_j / k)$, которые могут быть двух типов: либо обобщенные группы диэдра, либо группы экспоненты 2. Покажем, что в рассматриваемом случае среди групп $\mathrm{Gal}(Z_j/k)$ нет обобщенных групп диэдра.

Рассмотрим отдельно случаи, когда расширение K/k неразветвлено либо вполне разветвлено. Пусть вначале расширение K/k неразветвлено. Тогда неразветвленным будет и расширение Z/k, что влечет $\mathrm{Gal}(Z/k) \cong \mathrm{Gal}(\overline{Z}/\overline{k})$.

Ввиду упоминавшегося факта о структуре расширения Z/k, $\mathrm{Gal}(\overline{Z}/\overline{k})$ есть прямое произведение групп $\mathrm{Gal}(\overline{Z}_j/\overline{k})$, которые являются либо обобщенными группами диэдра, либо группами экспоненты 2. Предположим вначале, что среди групп $\mathrm{Gal}(\overline{Z}_j/\overline{k})$, $1 \le j \le r$, имеется группа $\mathrm{Gal}(\overline{Z}_{j0}/\overline{k})$ – обобщенная группа диэдра, которая, конечно, некоммутативна. С другой стороны, ввиду конечности поля $\overline{k}$ эта группа циклична (т. е. абелева). Полученное противоречие показывает, что среди групп $\mathrm{Gal}(\overline{Z}_j/\overline{k})$ нет обобщенных групп диэдра в случае неразветвленного расширения K/k.

Пусть расширение K/k вполне разветвлено и группа $\mathrm{Gal}(\overline{Z}_{j0}/\overline{k})$ – обобщенная группа диэдра. Тогда группа $\mathrm{Gal}(\overline{Z}_{j0}/\overline{k})$ имеет нечетный порядок. Нетрудно видеть, что в $\overline{Z}_{j0}/\overline{k}$ существует τ-инвариантный неразветвленный подъем N/k расширения $\overline{Z}_{j0}/\overline{k}$. Поскольку $\overline{Z}_{j0}/\overline{k}$ – расширение Галуа, то таковым же будет и расширение N/k. Нетрудно теперь видеть, что Z_{j0}/k изоморфно $(N\otimes_k K)/k$, и потому Z_{j0}/k является абелевым. Откуда следует, что среди групп $\mathrm{Gal}(Z_j/k)$ нет обобщенных групп диэдра.

Следовательно, все группы $\mathrm{Gal}(Z_j/k)$ – группы экспоненты 2. Поскольку $Z = Z_1\times \ldots \times Z_r$, и группа $\mathrm{Gal}(Z/K)$ – подгруппа группы $\mathrm{Gal}(Z/k)$, то эта группа – группа экспоненты 2. Расширение Z/K неразветвлено и потому $\mathrm{Gal}(\overline{Z}/\overline{K})$ – группа экспоненты 2. Предположим, что $r > 1$. Тогда группа $\mathrm{Gal}(\overline{Z}/\overline{K})$ содержит подполе, являющееся прямым композитом квадратичных расширений Q_1, Q_2. Ввиду конечности поля $\overline{k}$, поле $Q_1 \times Q_2$ содержит делители нуля, чего быть не может. Следовательно, $r = 1$. Таким образом, $[\overline{Z}:\overline{K}] = 2$.

Окончательно получаем, что $\overline{D}$ – поле такое, что $[\overline{D}:\overline{K}] \le 2$.

Обратимся теперь к вычислению групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$. Заметим прежде всего, что группа E тривиальна, поскольку $\overline{D}$ – поле. Что касается группы E_λ, то рассмотрим отдельно случаи вполне разветвленного и неразветвленного расширения K/k.

Пусть далее K/k вполне разветвлено. В этом случае из определения группы E_λ вытекает также тривиальность этой группы. Рассмотрим случай неразветвленного расширения K/k. Поскольку D обладает унитарной инволюцией, то алгебра D может быть представлена в виде $D_1\otimes_k K$, где D_1 – подходящая кватернионная алгебра над k. Заметим, что $\overline{D}_1$ не содержит неразветвленных над k квадратичных расширений. В противном случае у алгебры $\overline{D}_1 \otimes_k \overline{K}$ были бы делители нуля. Откуда заключаем, что $\overline{D} = \overline{Z} = \overline{K}$. Из-за совпадения $\overline{D}$, $\overline{Z}$ и $\overline{K}$ несложно выводится, что $E_\lambda = C_\lambda(\overline{K}) \cap \overline{K}^{\,\tau-1}$, где $C_\lambda(\overline{K})$ – группа корней из 1 степени λ, содержащихся в $\overline{K}$.

При применении теоремы 1 к вычислению групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ нам потребуется также вычислить группы $SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau})$ и $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}/\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}$. Ввиду коммутативности $\overline{D}$, $SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau}) = SU(\overline{D},\overline{\tau}) = 1$.

Обратимся к вычислению групп $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}/\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}$. Рассмотрим вначале случай, когда $\overline{D} = \overline{Z} = \overline{K}$. В этом случае $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}} = \left\{ z \in \overline{Z} \mid N_{\overline{Z}/\overline{K}}(z) \in \overline{k} \right\} = \overline{Z}_{\overline{\tau}}$, а группа $\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}} = \overline{Z}_{\overline{\tau}}$. Значит, $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}/\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}} = 1$.

Как было отмечено выше, в случае, когда $[\overline{Z}:\overline{K}] = 2$, расширение K/k обязано быть вполне разветвленным. В этой ситуации группа $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}$ совпадает с группой $\overline{Z}^*$, поскольку $\overline{K} = \overline{k}$, а группа $\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}$ совпадает с группой $\overline{Z}^*_{\overline{\tau}}$. Таким образом, $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}/\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}} = \overline{Z}^*/\overline{Z}^*_{\overline{\tau}}$.

Применяя теорему 1 в случае, когда K/k – вполне разветвленное расширение, получаем, что группа $SUK_1^{an}(D,\tau) \cong \Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}/\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}$. Окончательно:

$$SUK_1^{an}(D,\tau) = \begin{cases} 1, \text{ если } \overline{Z} = \overline{K}, \\ \overline{Z}^*/\overline{Z}^*_{\overline{\tau}}, \text{ если } [\overline{Z}:\overline{K}] = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим, наконец, случай неразветвленного K/k. В этом случае имеем следующие точные последовательности для вычисления группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$:

$$1 \to SUK_1^{y}(D,\tau) \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to C_\lambda(\overline{K}) \cap \overline{K}^{\,\tau-1} \to 1,$$

$$1 \to SUK_1^{y}(D,\tau) \to \Sigma'_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}}/\Sigma_{\mathrm{Nrd}\,\overline{D}} \to 1.$$

Так как $\overline{D} = \overline{Z} = \overline{K}$, то рассуждения, аналогичные применявшимся при рассмотрении случая, когда K/k вполне разветвлено, показывают, что $SUK_1^{\nu}(D,\tau) \cong \Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$. Окончательно $SUK_1^{\nu}(D,\tau) = 1$. Таким образом, $SUK_1^{an}(D,\tau) \cong C_{\lambda}(\overline{K}) \cap \overline{K}^{\,\tau-1}$.

Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему утверждению.

Т е о р е м а 3. *Пусть $\overline{k}$ – конечное поле*, $\operatorname{char}\overline{k} \neq 2$, *$D$ – центральная слабо разветвленная K-алгебра с унитарной инволюцией τ. Тогда группа $SUK_1^{an}(D,\tau)$ может быть вычислена следующим образом: если K/k вполне разветвлено, то*

$$SUK_1^{an}(D,\tau) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ \ \overline{Z} = \overline{K}, \\ \overline{Z}^* / \overline{Z}^*_{\tau}, \ \textit{если} \ [\overline{Z} : \overline{K}] = 2, \end{cases}$$

а если K/k неразветвлено, то

$$SUK_1^{an}(D,\tau) \cong C_{\lambda}(\overline{K}) \cap \overline{K}^{\,\tau-1}.$$

З а м е ч а н и е 2. Не следует думать, что предыдущие рассуждения не могут быть использованы и в случае бесконечных специальных полей $\overline{k}$. Например, беря в качестве $\overline{k}$ поле формальных степенных рядов одной переменной с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле характеристики 0 и рассуждая буквально как и в случае конечного поля $\overline{k}$, без труда получаем окончательные похожие результаты о вычислении $SUK_1^{an}(D,\tau)$ и в этом случае.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что если $\overline{k}$ – локальное поле (конечное расширение поля p-адических чисел или поле формальных степенных рядов одной переменной с конечным полем констант), то вычисление группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$ может быть редуцировано к случаю, который рассматривался выше.

Действительно, поскольку $\overline{k}$ – гензелево поле с конечным полем вычетов, то на алгебре D имеется гензелево нормирование с конечным полем вычетов (нормирование, составленное из исходного нормирования и нормирования поля $\overline{k}$).

В завершение рассмотрим еще один пример вычисления групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ в том случае, когда $\overline{k}$ – вещественно замкнутое поле. Опишем вначале алгебры $\overline{D}$. Такое описание содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а 4. *Пусть поле $\overline{k}$ вещественно замкнуто. Тогда структура алгебры вычетов $\overline{D}$ алгебры D такова.*

1. *Если $\overline{D}$ – не поле, тогда поля $\overline{Z}$, $\overline{K}$ и $\overline{k}$ совпадают и вещественно замкнуты.*

2. *Если $\overline{D}$ – поле, то $\overline{D} = \overline{Z}$ и для полей $\overline{Z}$, $\overline{K}$ и $\overline{k}$ имеются следующие возможности:*

2.i) $\overline{Z} = \overline{K} = k$;

2.ii) $\overline{Z} \neq \overline{K} = k$;

2.iii) $\overline{Z} = \overline{K} \neq k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно ввиду вещественной замкнутости $\overline{k}$ и конечности расширений $\overline{K} / \overline{k}$, $\overline{Z} / \overline{k}$, $\overline{D} / \overline{k}$.

Опишем теперь группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$. Для этого, как и в случае конечного $\overline{k}$, воспользуемся вычислением групп E, E_{λ}, $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$, $SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau})$ и теоремой 1.

Нетрудно видеть, что группа E тривиальна для всех алгебр из предыдущего списка. Группа E_{λ} также тривиальна для всех алгебр из того же списка, за исключением алгебр из 2.iii), так как во всех этих случаях расширение K/k вполне разветвлено. В случае 2.iii) композиция гомоморфизмов $N_{\overline{N}/\overline{Z}} \circ \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}$ тождественна. С учетом $\overline{s} = 1$ для $s \in SU(D,\tau)$ влечет $E_{\lambda} = 1$ и в этом случае.

Обратимся теперь к вычислению групп $SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau})$. В случае некоммутативного $\overline{D}$ в алгебре $\overline{D}$ существует кватернионная $\overline{k}$-алгебра A такая, что $\overline{D} = A \otimes_{\overline{k}} \overline{K}$ и ограничение $\overline{\tau}$ на A является стандартным кватернионным сопряжением. Заметим, что $U(\overline{D},\overline{\tau}) = \{u \in \overline{D} \,|\, u^{\overline{\tau}} = 1\}$. С другой стороны, уравнение $uu^{\overline{\tau}} = 1$ эквивалентно уравнению $\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(u) = 1$.

Таким образом, $SU(\overline{D},\overline{\tau}) = SL_1(\overline{D})$. По определению

$$SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau}) = SU(\overline{D},\overline{\tau}) / U(\overline{D},\overline{\tau})' = SL_1(\overline{D}) / SL_1(\overline{D})'.$$

Кроме того, $\overline{D}' \subset SL_1(D)'$, где $SL_1(\overline{D}) = \left\{ d \in \overline{D}^* \mid \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(d) = 1 \right\}$. Действительно, пусть $a,\ b \in \overline{D}$. Тогда для $[a,b]$ будем иметь

$$[a,b] = \left[\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(a)^{-1} a,\ \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(b)^{-1} b \right].$$

Поскольку группа $SL_1(\overline{D}) / (\overline{D}^*)'$ тривиальна, то из включения $\overline{D}' \subset SL_1(\overline{D})'$ заключаем, что группа $SUK_1^{an}(\overline{D}, \overline{\tau})$ тривиальна.

Рассмотрим случай коммутативной алгебры $\overline{D}$. Ввиду коммутативности $\overline{D}$ коммутант $U(\overline{D}, \overline{\tau})$ тривиален. Поэтому во всех оставшихся случаях $SUK_1^{an}(\overline{D}, \overline{\tau}) = SU(\overline{D}, \overline{\tau})$. Пусть $s \in SU(\overline{D}, \overline{\tau})$, т. е. $\mathrm{Nrd}_{\overline{D}/\overline{Z}}(s) = 1$. А так как $\overline{D} = \overline{Z}$, то $s = 1$. Таким образом, во всех случаях группа $SUK_1^{an}(\overline{D}, \overline{\tau})$ тривиальна.

Наконец, вычислим группы $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$. Напомним, что $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} = \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(\overline{D}^*)_{\overline{\tau}}$, $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} = \left\{ z \in \mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(\overline{D}^*) \mid N_{\overline{Z}/\overline{K}}(z) \in \overline{k} \right\}$. Рассмотрим последовательно все случаи из списка теоремы 4.

1) $\overline{D}$ – не поле. В этом случае приведенные нормы элементов из $\overline{D}$ представляются как нули квадратичной формы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 над $\overline{K}$, а ввиду $\overline{K} = \overline{k}$ – квадратичной формой от этих переменных над $\overline{k}$. Откуда немедленно следует, что $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} = \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$, т. е. $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$ тривиальна.

2i) $\mathrm{Nrd}_{\overline{D}} = id$, а так как $\overline{Z} = \overline{K} = \overline{k}$, то получаем, что $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} = \overline{k}^*$. Ясно тогда, что $\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(\overline{D}_{\overline{\tau}})$ также совпадает с $\overline{k}^*$.

2ii) В этом случае принадлежность группе $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$ для элемента $z \in \overline{Z}$ означает, что $N_{\overline{Z}/\overline{K}}(z) \in \overline{k}$. Поскольку $\overline{K} = \overline{k}$, то $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$ совпадает с $\overline{Z}^*$. Что касается группы $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$, то она, как нетрудно видеть, совпадает с $\overline{Z}^*_{\overline{\tau}}$. Таким образом, $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} \cong \overline{Z}^* / \overline{Z}^*_{\overline{\tau}}$.

2iii) В этом случае для $z \in \overline{Z}$ $\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(z) = z$, поэтому условие принадлежности z группе $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$ состоит в принадлежности z группе $\overline{k}$. Заметим, что группа $\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}(\overline{D}_{\overline{\tau}}) = \overline{Z}^*_{\overline{\tau}}$. Следовательно, $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} \cong \overline{Z}^* / \overline{Z}^*_{\overline{\tau}}$, что влечет ввиду $\overline{Z} = \overline{K}$ изоморфизм групп $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$ и $\overline{K}^* = \overline{k}$.

Собирая полученные результаты вместе и применяя теорему 1, заключаем, что группа $SUK_1^{an}(D, \tau)$ тривиальна во всех случаях, за исключением случаев 2ii) и 2iii), в которых она изоморфна $\overline{Z}^* / \overline{Z}^*_{\overline{\tau}}$ и $\overline{K}^* = \overline{k}$.

В завершение укажем еще один важный пример алгебр D, для которых $\overline{k}$ – C_1-поле.

Т е о р е м а 5. *Пусть $\overline{k}$ – расширение степени трансцендентности* 1 *алгебраически замкнутого поля. Тогда группа $SUK_1^{\nu}(D, \tau) \cong \Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\overline{D}}}$ и имеет место следующая точная последовательность:*

$$1 \to SUK_1^{\nu}(D, \tau) \to SUK_1^{an}(D, \tau) \to E_\lambda \to 1,$$

где

$$E_\lambda = \begin{cases} 1, \begin{cases} \textit{если } K/k \textit{ вполне разветвлено, либо } K/k \textit{ неразветвлено, } \lambda \textit{ нечетна,} \\ \textit{или не существует элемента } s \in SU(D,\tau) \textit{ такого, что } N_{\overline{Z}/\overline{K}}(s) = \overline{-1}; \end{cases} \\ \mathbb{Z}/2, \textit{ в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Список использованных источников

1. Платонов, В. П. О гипотезе Кнезера – Титса для унитарных групп / В. П. Платонов, В. И. Янчевский // Докл. Акад. наук СССР. – 1975. – Т. 225, № 1. – С. 48–51.

2. Платонов, В. П. Проблема Таннака – Артина и приведенная *K*-теория / В. П. Платонов // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. – 1976. – Т. 40, № 2. – С. 227–261.

3. Янчевский, В. И. Приведенная унитарная *K*-теория и тела над гензелевыми дискретно-нормированными полями / В. И. Янчевский // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. – 1978. – Т. 42, № 4. – С. 879–918.

4. Янчевский, В. И. Обратная задача приведенной унитарной *K*-теории / В. И. Янчевский // Мат. заметки. – 1979. – Т. 26, № 3. – С. 475–482.

5. Янчевский, В. И. Приведенная унитарная *K*-теория. Приложения к алгебраическим группам / В. И. Янчевский // Мат. сб. – 1979. – Т. 110 (152), № 4 (12). – С. 579–596.

6. Draxl, P. SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen / P. Draxl // J. ReineAngew. Math. – 1977. – Vol. 1977, № 293/294. – P. 116–142. https://doi.org/10.1515/crll.1977.293-294.116

7. Draxl, P. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields / P. Draxl // J. ReineAngew. Math. – 1984. – Vol. 1984, № 354. – P. 213–218. https://doi.org/10.1515/crll.1984.354.213

8. Gille, P. Le probléme de Kneser-Tits. Séminaire Boubaki / P. Gille. – Astérisque, 2009. – P. x+409.

9. Hazrat, R. SK_1 of graded division algebras / R. Hazrat, A. R. Wadsworth // Israel J. Math. – 2011. – Vol. 183, № 1. – P. 117–163. https://doi.org/10.1007/s11856-011-0045-1

10. Hazrat, R. Unitary SK_1 of graded and valued division algebras / R. Hazrat, A. R. Wadsworth // Proc. London Math. Soc. – 2011. – Vol. 103, № 3. – P. 508–534. https://doi.org/10.1112/plms/pdr010

11. Suslin, A. A. SK_1 of division algebras and Galois cohomology revisited / A. A. Suslin // Proc. St. Petersburg Math. Soc. – 2006. – Vol. 12. – P. 125–147. https://doi.org/10.1090/trans2/219/04

12. Wadsworth, A. R. Unitary SK_1 of semiramified graded and valued division algebras / A. R. Wadsworth // Manuscripta Math. – 2012. – Vol. 139, № 3/4. – P. 343–389. https://doi.org/10.1007/s00229-011-0519-9

13. Sethuraman, B. A. A note on the special unitary group of a division algebra / B. A. Sethuraman, B. Sury // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 134, № 02. – P. 351–354. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-07985-2

14. Sury, B. On $SU(1,D)/[U(1,D),U(1,D)]$ for a quaternion division algebra D / B. Sury // Archiv der Mathematik. – 2008. – Vol. 90, № 6. – P. 493-500. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2438-x

15. Янчевский, В. И. Приведенные группы Уайтхеда и проблема сопряженности для специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм / В. И. Янчевский // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2012. – Т. 400. – С. 222–245.

References

1. Platonov V. P., Yanchevskii V. I. On the Kneser - Tits conjecture for unitary groups. *Doklady Akademiinauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1975, vol. 225, no. 1, pp. 48–51 (in Russian).

2. Platonov V. P. The Tannaka – Artin problem and reduced *K*-theory. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1976, vol. 10, no. 2, pp. 211–243. https://doi.org/10.1070/IM1976v010n02ABEH001686

3. Yanchevskii V. I. Reduced unitary K-theory and division rings over discretely valued hensel fields. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1979, vol. 13, no. 1, pp. 175–213. https://doi.org/10.1070/IM1979v013n01ABEH002018

4. Yanchevskii V. I. A converse problem in reduced unitary K-theory. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 26, pp.728–731. https://doi.org/10.1007/BF01138683

5. Yanchevskii V. I. Reduced unitary *K*-theory.Aplications to algebraic groups. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 38, no. 4, pp. 533–548. https://doi.org/10.1070/SM1981v038n04ABEH001460

6. Draxl P. SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen. *Journal für die reine und angewandteMathematik (Crelles Journal)*, 1977, vol. 293–294, pp. 116–142 (in Gwerman). https://doi.org/10.1515/crll.1977.293-294.116

7. Draxl P. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal),* 1984, vol. 1984, no. 354, pp. 213–218 (in German). https://doi.org/10.1515/crll.1984.354.213

8. Gille P. *Le probléme de Kneser-Tits. Séminaire Boubaki*. Astérisque, 2009. x+409 p.

9. Hazrat R., Wadsworth A. R. SK_1 of graded division algebras. *Israel Journal of Mathematics*, 2011, vol. 183, no. 1, pp. 117–163. https://doi.org/10.1007/s11856-011-0045-1

10. Hazrat R., Wadsworth A. R. Unitary SK_1 of graded and valued division algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society,* 2011, vol. 103, no. 3, pp. 508–534. https://doi.org/10.1112/plms/pdr010

11. Suslin A. A. SK_1 of division algebras and Galois cohomology revisited. *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society,* 2006, vol. 12, pp. 125–147. https://doi.org/10.1090/trans2/219/04

12. Wadsworth A. R. Unitary SK_1 of semiramified graded and valued division algebras. *Manuscripta Mathematica,* 2012, vol. 139, no. 3–4, pp. 343–389. https://doi.org/10.1007/s00229-011-0519-9

13. Sethuraman B. A., Sury B. A note on the special unitary group of a division algebra. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2005, vol. 134, no. 02, pp. 351–354. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-07985-2

14. Sury B. On $SU(1,D)/[U(1,D),U(1,D)]$ for a quaternion division algebra D. *Archiv der Mathematik*, 2008, vol. 90, no. 6, pp. 493–500. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2438-x

15. Yanchevskii V. I. Reduced Whitehead groups and the conjugacy problem for special unitary groups of anisotropic Hermitian forms. *Journal of Mathematical Sciences,* 2013, vol. 192, no. 2, pp. 250–262. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1391-9

Информация об авторе

Янчевский Вячеслав Иванович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом алгебры, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by

Information about the author

Vyacheslav I. Yanchevskii – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-net.by