ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.956.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32

Поступила в редакцию 09.12.2020
Received 09.12.2020

В. И. Корзюк[1,2], Я. В. Рудько[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕГЛАДКИМ ВТОРЫМ УСЛОВИЕМ КОШИ

Аннотация. Изучается классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости для одномерного волнового уравнения. На нижнем основании задаются условия Коши, причем второе из них имеет разрыв первого рода в точке. На боковой границе задается гладкое граничное условие. Решение строится методом характеристик в явном аналитическом виде. Доказывается единственность и устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое решение. Рассматривается задача с условиями сопряжения.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение, неоднородное уравнение, смешанная задача, негладкие начальные условия, метод характеристик

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 23–32. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32

Viktor I. Korzyuk[1,2], Jan V. Rudzko[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

THE CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH THE NONSMOOTH SECOND INITIAL CONDITION

Abstract. In this article, we study the classical solution of the mixed problem in a quarter of a plane for a one-dimensional wave equation. On the bottom of the boundary, the Cauchy conditions are specified, and the second of them has a discontinuity of the first kind at a point. The smooth boundary condition is set at the side boundary. The solution is built using the method of characteristics in an explicit analytical form. The uniqueness is proved, and the conditions under which a piecewise-smooth solution exists are established. The problem with conjugate conditions is considered.

Keywords: one-dimensional wave equation, nonhomogeneous equation, mixed problem, nonsmooth initial conditions, method of characteristics

For citation. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. The classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 23–32 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32

Введение. Основное явление в теории механического удара – это распространение волн смещений в твердых телах. Экспериментальное изучение почти всех явлений удара весьма затруднительно. При аналитическом изучении вызванных ударом колебаний интерес представляют задачи, где груз после удара остается в соприкосновении с ударяемым телом, в котором рассматриваются и описываются колебательные процессы [1, 2]. Как правило, математическая модель подобных явлений представляет собой смешанные задачи для уравнений с частными производными с присутствием начальных функций, которые отличны от нуля на множестве нулевой меры [3–5].

Существование классических решений многих задач зависит не только от правильного выбора вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и от выполнения условий согласования заданных функций в угловых точках области [4, 5]. Как показано в статьях [6–10], от вида условий согласования зависят гладкость решений и постановка задач. Чаще всего условия согласования являются необходимыми и достаточными при доказательстве существования и единственности решения. Подобные условия согласования возникают при решении задач, для которых задаются граничные условия с помощью негладких функций.

Близкими к изучаемым задачам в данной статье являются задачи, представленные в работах [6, 7, 10].

Постановка задачи. В области $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x)\subset\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим волновое уравнение

$$\left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right)u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

где a^2 – положительное действительное число. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), x\in[0,\infty), \partial_t u(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x\in(0,\infty), \end{cases} \tag{2}$$

на другой части границы – граничное условие Дирихле

$$u(t,0) = \mu(t), \quad t\in[0,\infty), \tag{3}$$

Будем полагать, что функции f, φ, ψ_2, μ достаточно гладкие, а именно:

$$f\in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi\in C^2\left([0,\infty)\right), \quad \psi_2\in C^1\left([0,\infty)\right), \quad \mu\in C^2\left([0,\infty)\right).$$

Построение решения. Для построения решения задачи (1)–(3) рассмотрим вспомогательную задачу для волнового уравнения (1) в области Q. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), x\in[0,\infty), \partial_t u(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x\in[0,x^*), x^* > 0, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x\in(x^*,\infty), \end{cases} \tag{4}$$

и граничное условие (3). При этом полагаем, что $\tilde{\psi}_1\in C^1\left([0,x^*]\right)$, $\tilde{\psi}_2\in C^1\left([x^*,\infty)\right)$, $\tilde{\psi}_2(x) = \psi_2(x)$ для $x\in(x^*,\infty)$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$.

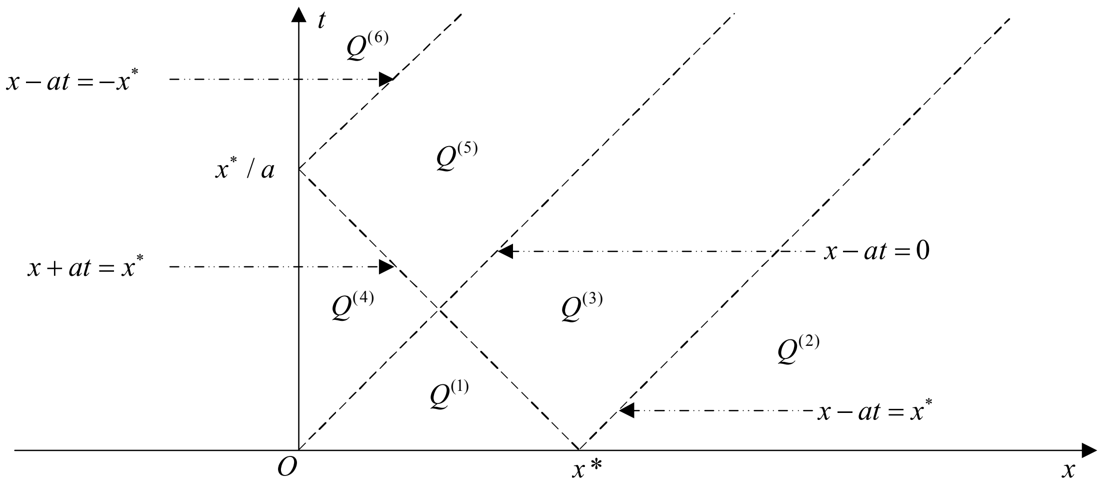
Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [6, 11]. Пусть $w:\overline{Q}\to\mathbb{R}$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным условиям Коши $w(0,x) = \partial_t w(0,x) = 0, \partial_t^2 w(0,x) = f(0,x)$. Такое решение w существует [12]. Если $f\in C^1(\overline{Q})$, то $w\in C^2(\overline{Q})$.

Тогда общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(t,x) = w(t,x) + g^{(1)}(x-at) + g^{(2)}(x+at), \tag{5}$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции. Для построения решения разделим область Q на шесть подобластей (рисунок).

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at < x^*, x-at < x^*, x-at > 0\}, \\
Q^{(2)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at > x^*, x-at > x^*, x-at > 0\}, \\
Q^{(3)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at > x^*, x-at < x^*, x-at > 0\}, \\
Q^{(4)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at < x^*, x-at < x^*, x-at < 0\}, \\
Q^{(5)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at > x^*, x-at > -x^*, x-at < 0\}, \\
Q^{(6)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x-at < -x^*\}.
\end{aligned} \tag{6}$$



Разделение области Q характеристиками $x - at = 0,\ x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ на шесть подобластей $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ и $Q^{(6)}$

Division of the domain Q by the characteristics $x - at = 0,\ x + at = x^*,\ x - at = x^*$ and $x - at = -x^*$ into six subdomains $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$, and $Q^{(6)}$

Определим функции $u^{(i)}$ как локальные решения задачи (1), (3), (4) в подобластях $Q^{(i)}$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Пусть

$$u(t,x)=u^{(i)}(t,x),\ \text{если}\ (t,x)\in Q^{(i)},\ \ i\in\{1,2,3,4,5,6\}. \tag{7}$$

О п р е д е л е н и е. *Функцию u, определяемую формулой* (7)*, назовем решением задачи* (1)*,* (3)*,* (4)*, если* $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ *для каждого* $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$, *функция* $u^{(j)}$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в* $Q^{(j)}$*, функция u удовлетворяет первому из* (4) *условию* $u(0,x)=\varphi(x),\ x\in[0,\infty),$ *и граничному условию* (3)*, функция* $u^{(1)}$ *удовлетворяет второму из* (4) *условию Коши на полуоткрытом отрезке* $[0,x^*)$, *функция* $u^{(2)}$ *удовлетворяет этому условию на полупрямой* (x^*,∞). *Функции* $u^{(j)}$ *на границах* $\partial Q^{(j)}$ *раздела области Q удовлетворяют соответствующим условиям сопряжения.*

В силу (5) имеем

$$u^{(i)}(t,x)=w(t,x)+g^{(1,i)}(x-at)+g^{(2,i)}(x+at),\quad i\in\{1,2,3,4,5,6\},\quad (t,x)\in Q^{(i)}, \tag{8}$$

где $g^{(1,i)}$ и $g^{(2,i)}$ – некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

Удовлетворяя условия Коши в подобластях $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, получим формулы

$$\begin{aligned}
g^{(1,1)}(x)&=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_1(\xi)d\xi+C^{(1)},\quad x\in(0,x^*),\\
g^{(2,1)}(x)&=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_1(\xi)d\xi-C^{(1)},\quad x\in(0,x^*),\\
g^{(1,2)}(x)&=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_2(\xi)d\xi+C^{(2)},\quad x\in(x^*,\infty),\\
g^{(2,2)}(x)&=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_2(\xi)d\xi-C^{(2)},\quad x\in(x^*,\infty),
\end{aligned} \tag{9}$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ – произвольные постоянные из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. А тогда функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ примут вид

$$
\begin{aligned}
u^{(1)}(t,x) &= w(t,x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in Q^{(1)},\\
u^{(2)}(t,x) &= w(t,x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in Q^{(2)}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Из формул (9) видно, что функции $u^{(j)}$ из класса дважды непрерывно-дифференцируемых $C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j=1,2,$ если, например,

$$
\varphi\in C^2\left([0,\infty)\right), \quad \tilde{\psi}_1\in C^1\left([0,x^*]\right), \ \ \tilde{\psi}_2\in C^1\left([x^*,\infty)\right), \quad f\in C^1(\overline{Q}),
$$

где $\overline{Q^{(j)}}$, $\overline{Q}$ – замыкания областей $Q^{(j)}$ и Q соответственно. Кроме того, функция $u^{(1,2)}(t,x)=u^{(j)}(t,x)$, $(t,x)\in\overline{Q^{(j)}}$ является непрерывной на части границы $\gamma^{(1,3)}\cup\gamma^{(2,3)}$ области $Q^{(3)}$, где $\gamma^{(j,3)}=\overline{Q^{(j)}}\cap\overline{Q^{(3)}}$, $j=1,2.$ Учитывая данный факт, функцию $u^{(3)}$ определяем как решение в области $Q^{(3)}$ с условиями на характеристиках.

Согласно представлению (8) и формулам (10) имеем равенства

$$
\begin{aligned}
g^{(1,3)}(x^*) + g^{(2,3)}(x^*+2at) &= \frac{1}{2}\Big(\varphi(x^*+2at)+\varphi(x^*)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x^*+2at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + \\
&\quad + C^{(1)} - C^{(2)}, \quad t\in[0,\infty),\\
g^{(1,3)}(x^*-2at) + g^{(2,3)}(x^*) &= \frac{1}{2}\Big(\varphi(x^*-2at)+\varphi(x^*)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{x^*-2at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \\
&\quad + C^{(1)} - C^{(2)}, \quad t\in[0,\infty),
\end{aligned} \tag{11}
$$

Соотношения (8) для i = 3 и (11) в совокупности определяют функцию $u^{(3)}$ и

$$
\begin{aligned}
u^{(3)}(t,x) = w(t,x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + \\
+ C^{(1)} - C^{(2)}, \quad (t,x)\in\overline{Q^{(3)}}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

В области $Q^{(4)}$ находим решение $u^{(4)}$ уравнения (1). Согласно представлениям (8) и граничному условию (3)

$$
u^{(4)}(t,0) = w(t,0) + g^{(1,4)}(-at) + g^{(2,4)}(at) = \mu(t), \quad t\in(0,x^*/a). \tag{13}
$$

Отсюда имеем

$$
g^{(1,4)}(z) = \mu\left(\frac{-z}{a}\right) - w\left(\frac{-z}{a},0\right) - g^{(2,4)}(-z), \quad z\in(-x^*,0). \tag{14}
$$

В выражении (14) полагаем $g^{(2,4)}(-z)=g^{(2,1)}(-z).$ Полученные выражения для $g^{(i,4)}$ подставляем в представление (8). В результате получим

$$
\begin{aligned}
u^{(4)}(t,x) = w(t,x) - w\left(t-\frac{x}{a},0\right) + \mu\left(t-\frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \\
+ \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in Q^{(4)}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Аналогично в области $Q^{(6)}$ находим решение $u^{(6)}$, для которого

$$
u^{(6)}(t,0) = w(t,0) + g^{(1,6)}(-at) + g^{(2,6)}(at) = \mu(t), \quad t\in(x^*/a,\infty), \tag{16}
$$

или

$$g^{(1,6)}(z)=\mu\left(\frac{-z}{a}\right)-w\left(\frac{-z}{a},0\right)-g^{(2,6)}(-z),\quad z\in(-\infty,x^*). \tag{17}$$

В соотношении полагаем $g^{(2,6)}(-z)=g^{(2,2)}(-z)$. Подставляя в представление (8) значения функций $g^{(i,6)}$, $i=1,2$, получим

$$u^{(6)}(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi,\ (t,x)\in Q^{(6)}. \tag{18}$$

Поскольку области определения по внешнему аргументу функций $g^{(1,5)}$ и $g^{(1,4)}$ совпадают, то полагаем в представлении (8) для $i=5$ $g^{(1,5)}(x-at)=g^{(1,4)}(x-at)$ для $(t,x)\in Q^{(5)}$. По этой же причине полагаем $g^{(2,5)}(x-at)=g^{(2,2)}(x-at)$ для $(t,x)\in Q^{(5)}$. В силу формул (9), (14) и (8) получаем решение $u^{(5)}$ в $Q^{(5)}$ в виде

$$u^{(5)}(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{at-x}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{at+x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi+C^{(1)}-C^{(2)},\quad (t,x)\in Q^{(5)}. \tag{19}$$

Выясним, что представляет собой разность $C^{(1)}-C^{(2)}$ в формулах (12) и (19). Для этого воспользуемся начальными условиями в точке $x=x^*$ и граничными в точке $t=x^*/a$. Возьмем $(t,x)\in Q^{(3)}$ и $(t,x)\in Q^{(5)}$ и будем устремлять их к точкам $(0,x^*)$ и $(x^*/a,0)$ соответственно:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x^*}}u^{(3)}(t,x)=\varphi(x^*)+C^{(1)}-C^{(2)}=\varphi(x^*),\quad \lim_{\substack{t\to \frac{x^*}{a}\\ x\to 0}}u^{(5)}(t,x)=\mu\left(\frac{x^*}{a}\right)+C^{(1)}-C^{(2)}=\mu\left(\frac{x^*}{a}\right). \tag{20}$$

Откуда имеем, что $C^{(1)}-C^{(2)}=0$. Вообще, не теряя общности, можно сказать, что $C^{(1)}-C^{(2)}=$ $=\varphi(x^*)-\left(\lim_{x\to x^*-0}\varphi(x)+\lim_{x\to x^*+0}\varphi(x)\right)/2$. Данный факт установлен и доказан в работе [7].

Гладкость решения. Если

$$f\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \tilde{\psi}_1\in C^1([0,x^*]),\quad \tilde{\psi}_2\in C^1([x^*,\infty)),\quad \mu\in C^2([0,\infty)),$$

то из формул (10), (12), (15), (18) и (19) следует, что $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j=1,2,...,6$.

Теорема 1. *Если выполняются условия гладкости для заданных функций*

$$f\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \tilde{\psi}_1\in C^1([0,x^*]),\quad \tilde{\psi}_2\in C^1([x^*,\infty)),\quad \mu\in C^2([0,\infty)),$$

то существует единственное классическое решение задачи (1), (3), (4) *в смысле определения, и оно представляется формулами* (10), (12), (15), (18) *и* (19).

Доказательство. Следует из формул (10), (12), (15), (18) и (19). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции удовлетворяют уравнению (1) и условиям (3), (4). Единственность доказывается методом от противного. Если предположить, что существуют два решения, тогда для их разности получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (3)–(4), из которых следует нулевое решение согласно формулам (10), (12), (15), (18) и (19).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \tilde{\psi}_1\in C^1([0,x^*]),\quad \tilde{\psi}_2\in C^1([x^*,\infty)),\quad \mu\in C^2([0,\infty)).$$

Тогда решение задачи (1), (3), (4) *в смысле определения, которое представлено формулами* (10), (12), (15), (18) *и* (19), *принадлежит классу* $C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\mu(0)=\varphi(0)$.

Доказательство. Для каждого $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$ $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Это следует из формул (10), (12), (15), (18) и (19). Значит, чтобы $u\in C(\overline{Q})$, должны выполняться условия

$$\begin{aligned}
&u^{(1)}(t,x=at)=u^{(4)}(t,x=at), \text{ при } x+at<x^*,\\
&u^{(5)}(t,x=at)=u^{(3)}(t,x=at), \text{ при } x+at>x^*,\\
&u^{(5)}(t,x=at-x^*)=u^{(6)}(t,x=at-x^*),\\
&u^{(4)}(t,x=x^*-at)=u^{(5)}(t,x=x^*-at), \text{ при } x-at<0,\\
&u^{(1)}(t,x=x^*-at)=u^{(3)}(t,x=x^*-at), \text{ при } x-at>0,\\
&u^{(2)}(t,x=x^*+at)=u^{(3)}(t,x=x^*+at), \text{ при } x-at>0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Равенства (21) следуют из формул (10), (12), (15), (18) и (19). Вычислив выражения, входящие в равенства (21), получим, что условия (21) верны при $\mu(0)=\varphi(0)$.

Исследуем разрыв самого решения, частных производных первого и второго порядка на границах подобластей $Q^{(i)}$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Имеет место следующее

Утверждение. *Решение и ее производные задачи* (1), (3), (4) *имеют разрывы на характеристиках* $x-at=0$, $x\pm at=x^*$ *и* $x-at=-x^*$, *а именно:*

1) решение имеет разрыв $(u^{(1)}-u^{(4)})(t,x=at)=(u^{(3)}-u^{(5)})(t,x=at)=\varphi(0)-\mu(0)$ *на характеристике* $x-at=0$;

2) решение не имеет разрыва на характеристиках $x+at=x^*$, $x-at=x^*$ *и* $x-at=-x^*$;

3) частные производные первого порядка имеют разрывы

$$(\partial_t u^{(2)}-\partial_t u^{(3)})(t,x=x^*+at)=\delta\psi/2, \qquad (\partial_t u^{(3)}-\partial_t u^{(1)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi/2,$$
$$(\partial_t u^{(5)}-\partial_t u^{(4)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi/2 \quad \text{и} \quad (\partial_t u^{(5)}-\partial_t u^{(6)})(t,x=at-x^*)=\delta\psi/2;$$
$$(\partial_x u^{(2)}-\partial_x u^{(3)})(t,x=x^*+at)=-\delta\psi/(2a), \qquad (\partial_x u^{(3)}-\partial_x u^{(1)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi/(2a),$$
$$(\partial_x u^{(5)}-\partial_x u^{(4)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi/(2a) \quad \text{и} \quad (\partial_x u^{(5)}-\partial_x u^{(6)})(t,x=at-x^*)=-\delta\psi/(2a)$$

на характеристиках $x\pm at=x^*$ *и* $x-at=-x^*$;

4) частные производные второго порядка имеют разрыв

$$(\partial_t^2 u^{(2)}-\partial_t^2 u^{(3)})(t,x=x^*+at)=-a\delta\psi^{(1)}/2, \qquad (\partial_t^2 u^{(3)}-\partial_t^2 u^{(1)})(t,x=x^*-at)=a\delta\psi^{(1)}/2,$$
$$(\partial_t^2 u^{(5)}-\partial_t^2 u^{(4)})(t,x=x^*-at)=a\delta\psi^{(1)}/2 \quad \text{и} \quad (\partial_t^2 u^{(5)}-\partial_t^2 u^{(6)})(t,x=at-x^*)=a\delta\psi^{(1)}/2;$$
$$(\partial_x^2 u^{(2)}-\partial_x^2 u^{(3)})(t,x=x^*+at)=-\delta\psi^{(1)}/(2a), \qquad (\partial_x^2 u^{(3)}-\partial_x^2 u^{(1)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi/(2a),$$
$$(\partial_x^2 u^{(5)}-\partial_x^2 u^{(4)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi^{(1)}/(2a) \quad \text{и} \quad (\partial_x^2 u^{(5)}-\partial_x^2 u^{(6)})(t,x=at-x^*)=\delta\psi^{(1)}/(2a);$$
$$(\partial_t\partial_x u^{(2)}-\partial_t\partial_x u^{(3)})(t,x=x^*+at)=\delta\psi^{(1)}/2, \qquad (\partial_t\partial_x u^{(3)}-\partial_t\partial_x u^{(1)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi^{(1)}/2,$$
$$(\partial_t\partial_x u^{(5)}-\partial_t\partial_x u^{(4)})(t,x=x^*-at)=\delta\psi^{(1)}/2 \quad \text{и} \quad (\partial_t\partial_x u^{(5)}-\partial_t\partial_x u^{(6)})(t,x=at-x^*)=-\delta\psi^{(1)}/2$$

на характеристиках $x\pm at=x^*$ *и* $x-at=-x^*$;

5) частные производные первого порядка имеют разрывы

$$(\partial_t u^{(1)}-\partial_t u^{(4)})(t,x=at)=(\partial_t u^{(3)}-\partial_t u^{(5)})(t,x=at)=\psi_1(0)-\mu'(0)$$
$$(\partial_x u^{(1)}-\partial_x u^{(4)})(t,x=at)=(\partial_x u^{(3)}-\partial_x u^{(5)})(t,x=at)=\big(\mu'(0)-\psi_1(0)\big)/a$$

на характеристике $x-at=0$;

6) частные производные второго порядка имеют разрывы

$$(\partial_t^2 u^{(1)}-\partial_t^2 u^{(4)})(t,x=at)=(\partial_t^2 u^{(3)}-\partial_t^2 u^{(5)})(t,x=at)=a^2\varphi''(0)+f(0,0)-\mu''(0),$$
$$(\partial_x^2 u^{(1)}-\partial_x^2 u^{(4)})(t,x=at)=(\partial_x^2 u^{(3)}-\partial_x^2 u^{(5)})(t,x=at)=\varphi''(0)+f(0,0)/a^2-\mu''(0)/a^2$$
$$(\partial_t\partial_x u^{(1)}-\partial_t\partial_x u^{(4)})(t,x=at)=(\partial_t\partial_x u^{(3)}-\partial_t\partial_x u^{(5)})(t,x=at)=\big(\mu''(0)-f(0,0)-a^2\varphi''(0)\big)/a$$

на характеристике $x-at=0$;

где использованы обозначения

$$\delta\psi = \tilde{\psi}_2(x^*) - \tilde{\psi}_1(x^*), \quad \delta\psi^{(1)} = \tilde{\psi}_2'(x^*) - \tilde{\psi}_1'(x^*). \tag{22}$$

Соотношения утверждения доказываются непосредственной проверкой.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2\left([0,\infty)\right), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1\left([0,x^*]\right), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1\left([x^*,\infty)\right), \quad \mu \in C^2\left([0,\infty)\right).$$

Тогда решение задачи (1)*,* (3)*,* (4) *в смысле определения, которое представлено формулами* (10)*,* (12)*,* (15)*,* (18) *и* (19)*, принадлежит классам* $C^1(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}})$ *и* $C^1(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ для каждого $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, то для того, чтобы решение было из классов $C^1(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}})$ и $C^1(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого порядка. А из утверждения следует, что они выполняются только при $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2\left([0,\infty)\right), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1\left([0,x^*]\right), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1\left([x^*,\infty)\right), \quad \mu \in C^2\left([0,\infty)\right).$$

Тогда решение задачи (1)*,* (3)*,* (4) *в смысле определения, которое представлено формулами* (10)*,* (12)*,* (15)*,* (18) *и* (19)*, принадлежит классам* $C^2(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}})$ *и* $C^2(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}_1'(x^*) = \tilde{\psi}_2'(x^*)$ *и* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ для каждого $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, то для того, чтобы решение было из классов $C^2(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}})$ и $C^2(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого и второго порядка. А из утверждения следует, что они выполняются только при $\tilde{\psi}_1'(x^*) = \tilde{\psi}_2'(x^*)$ и $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Задача с условиями сопряжения. Рассмотрим задачу, когда хоть один какой-то разрыв, указанный в утверждении, не равен нулю. В этом случае можно рассматривать задачу с условиями сопряжения, которые задаются на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$, $x - at = 0$ и $x - at = -x^*$. Сформулируем такую задачу.

Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (4), граничному условию (3) и следующим условиям сопряжения:

$$\begin{aligned}
&\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t, at - x^*) = \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t, x^* - at) = \\
&= \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t, x^* + at) = \frac{\delta\psi}{2}, \\
&\left[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-\right](t, at - x^*) = \left[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-\right](t, x^* - at) = \\
&= \left[(\partial_t^2 u)^- - (\partial_t^2 u)^+\right](t, x^* + at) = a\frac{\delta\psi^{(1)}}{2}, \\
&[u^+ - u^-](t, at) = \varphi(0) - \mu(0), \\
&\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t, at) = \psi_1(0) - \mu'(0), \\
&\left[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-\right](t, at) = a^2\varphi''(0) + f(0,0) - \mu''(0).
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь было использовано обозначение $()^{\pm}$ – предельные значения функции *u* и ее производных ∂_t, ∂_t^2 с разных сторон на характеристиках вида $x = r(t)$, т. е.

$$(\partial_t^p u)^{\pm}\big(t, r(t)\big) = \lim_{\Delta t \to 0+} \partial_t^p u\big(t, r(t) \pm \Delta t\big),$$

где $p = 1, 2$ и r – функция действительного переменного.

Предельный переход. Возвращаемся к исходной задаче (1)–(3). Ее решение может быть получено предельным переходом из решения задачи (1), (3), (4). Устремив x^* к нулю, получим, что области $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(5)}$ уменьшаются и в пределе становятся пустыми множествами, но их значения будут влиять на значения решения на характеристике $x - at = 0$, поскольку замыкание множеств $Q^{(3)}$ и $Q^{(5)}$ станет характеристикой $x - at = 0$, а замыкание $Q^{(1)}$ и $Q^{(4)}$ станет точкой (0,0). В то же время области $Q^{(2)}$ и $Q^{(6)}$ останутся, и решение будет иметь вид

$$u(t,x) = \begin{cases} u^{(2)}(t,x), & x - at > 0, \\ [u^{(3)} \text{ или } u^{(5)}](t,x), & x - at = 0, \\ u^{(6)}(t,x), & x - at < 0, \end{cases} \tag{24}$$

где функции $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ определены формулами (10), (12), (18) и (19) при $x^* = 0$.

Для корректности предельного перехода необходимо, чтобы кусочно-заданная функция u была дважды непрерывно-дифференцируемой в $Q^{(i)}$ для каждого $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Это будет выполняться, если будут выполняться условия гладкости:

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2\big([0,\infty)\big), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1\big([0,x^*]\big), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1\big([x^*,\infty)\big), \quad \mu \in C^2\big([0,\infty)\big).$$

Для единственности решения необходимы равенства функций $u^{(3)}$ и $u^{(5)}$, а также их частных производных до второго порядка включительно, на характеристике $x - at = 0$, что будет выполнено при выполнении условий $\mu''(0) = a^2\varphi''(0) + f(0,0)$, $\mu'(0) = \tilde{\psi}_1(0)$, и $\mu(0) = \varphi(0)$.

В точке (0,0) можно положить u равным $\varphi(0)$. Такой же результат можно получить непосредственно из формулы (24) предельным переходом, так как непрерывность u на множестве $\overline{Q}$ будет сохранена. Также останутся в силе и некоторые другие свойства решения, относящиеся к непрерывности. Так, например, если выполнены условия

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2\big([0,\infty)\big), \quad \psi_2 \in C^1\big([0,\infty)\big), \quad \mu \in C^2\big([0,\infty)\big),$$

то решение будет из классов

$$C(\overline{Q}),\ C^2\big(\{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at > 0\}\big) \text{ и } C^2\big(\{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at < 0\}\big).$$

Более того, u будет принадлежать классу

$$C(\overline{Q}) \cap C^2(Q_-) \cap C^2(Q_+),$$

где

$$\begin{aligned} Q_- &= \{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at > 0\}, \\ Q_+ &= \{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at < 0\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Для решения задачи (1)–(3), представленного формулой (24) при $x^* = 0$, можно вычислить разрывы производных первого и второго порядков в явном виде на характеристике $x - at = 0$, а именно:

$$\begin{aligned} &\big[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\big](t,at) = \psi_2(0+) - \mu'(0), \\ &\big[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\big](t,at) = \big(\mu'(0) - \psi_2(0+)\big)/a, \\ &\big[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-\big](t,at) = a^2\varphi''(0) - \mu''(0) + f(0,0), \\ &\big[(\partial_x^2 u)^+ - (\partial_x^2 u)^-\big](t,at) = \big(a^2\varphi''(0) - \mu''(0) + f(0,0)\big)/a^2, \\ &\big[(\partial_t\partial_x u)^+ - (\partial_t\partial_x u)^-\big](t,at) = \big(\mu''(0) - a^2\varphi''(0) - f(0,0)\big)/a. \end{aligned} \tag{26}$$

Сформулируем результат в виде теоремы.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2\left([0,\infty)\right), \quad \psi_2 \in C^1\left([0,\infty)\right), \quad \mu \in C^2\left([0,\infty)\right),$$

тогда решение задачи (1)–(3) *в смысле определения при* $x^* = 0$, *представленное формулой* (24), *является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* $\mu''(0) = a^2\varphi''(0) + f(0,0)$, $\mu'(0) = \psi_1$, *и* $\mu(0) = \varphi(0)$. *Кроме того, оно принадлежит классу* $C(\overline{Q}) \cap C^2(Q_-) \cap C^2(Q_+)$ *и удовлетворяет условиям сопряжения* (26).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из рассуждений выше.

Заключение. Были сформулированы условия согласования, при выполнении которых существует классическое решение задачи в случае достаточной гладкости ее условий. Построено классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости двух независимых переменных и показана зависимость от гладкости заданных функций. Также была сформулирована задача с условиями сопряжения, доказана корректность ее постановки. Одним из важнейших результатов исследования является рассмотрение задачи, когда одна функция из условий Коши задается на множестве нулевой меры Жордана. В этом случае были получены не только условия существования решения, но и доказаны необходимые и достаточные условия для единственности решения.

Список использованных источников

1. Лазарян, В. А. О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей / В. А. Лазарян // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. – 1950. – Вып. 20. – С. 3–32.

2. Маврин, А. И. К теории ударного погружения свай / А. И. Маврин // Изв. вузов (строительство и архитектура). – 1967. – № 8. – С. 24–28.

3. Boussinesq, J. Du choc longitudinal d’une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l’autre / J. Boussinesq // Comptes Rendus. – 1883. – Vol. 97, № 2. – pp. 154–157.

4. Гайдук, С. И. О некоторых задачах, связанных с теорией поперечного удара по стержням / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1233–1243.

5. Гайдук, С. И. О единственности решения одной задачи из волновой теории механического удара / С. И. Гайдук, Г. М. Заяц // Дифференц. уравнения – 1989. – Т. 25, № 5. – С. 833–839.

6. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011. – 459 с.

7. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 22–31.

8. Корзюк, В. И. Об условиях согласования в граничных задачах для гиперболических уравнений / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 37–42.

9. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 7–20.

10. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

11. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск: БГУ, 2017. – Ч. 2. – 50 с.

12. Корзюк, В. И. Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волового уравнения / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, В. Ю. Соколович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 647–651. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

13. Столярчук, И. И. Решение смешанных задач методом характеристик для волнового уравнения с интегральным условием / И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 53–62.

14. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. https://doi.org/10.29235/1561-2430- 2018-54-4-391-403

15. Корзюк, В. И. Смешанная задача для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка с периодическими условиями / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 135–148. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148

References

1. Lazaryan V. A. On dynamic forces in harness devices of homogeneous trains with resistance to relative movements of carriages. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta* [Proceedings of the Dnepropetrovsk Institute of Railway Engineers], 1950, no. 20, pp. 3–32 (in Russian).

2. Mavrin A. I. To the theory of shock piling. *Izvestiya vuzov (stroitel'stvo i arkhitektura) = News of higher educational institutions (building and architecture)*, 1967, no. 8, pp. 24–28 (in Russian).

3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d'une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l'autre. *Comptes Rendus*, 1883, vol. 97, no. 2, pp. 154–157 (in French).

4. Gayduk S. I. On some problems related to the theory of transverse impact on rods. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 7, pp. 1233–1243 (in Russian).

5. Gayduk S. I., Zayats G. M. On the uniqueness of the solution of one problem from the wave theory of mechanical shock. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 5, pp. 833–839 (in Russian).

6. Korzyuk V. I. *Equations of mathematical physics*. Minsk, BSU, 2011. 459 p. (in Russian).

7. Korzyuk V. I., Puzyrnyi S. I. Classical solution of mixed problems for the one-dimensional wave equation with Cauchy nonsmooth conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 2, pp. 22–31 (in Russian).

8. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. On matching conditions in boundary value problems for hyperbolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2013, vol. 57, no. 5, pp. 37–42 (in Russian).

9. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumovets S. N. Classical solution to the first mixed problem for the one-dimensional wave equation with the Cauchy-type conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 7–20 (in Russian).

10. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 707–716. https://doi.org/10.1134/s0012266112050096

11. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical solutions of problems for hyperbolic equations. Part 2*. Minsk, Belarusian State University Publ., 2017. 50 p. (in Russian).

12. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sokolovich V. Yu. Classical solution of the mixed problem in the quarter of the plane for the wave equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 647–651 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

13. Stolyarchuk I. I. Solution of the mixed problems by the method of characteristics for the wave equation with the integral condition. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 1, pp. 53–62 (in Russian).

14. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

15. Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh. A mixed problem for the four-order one-dimensional hyperbolic equation with periodic conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 135–148 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Рудько Ян Вячеславович – магистрант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Jan V. Rudzko – Master's Degree Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106