ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 530.145
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-46-63

Поступила в редакцию 10.10.2019
Received 10.10.2019

М. Н. Сергеенко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

МЕЗОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

Аннотация. Релятивистская кварковая модель развивается для изучения мезонов и резонансов как квази-связанных состояний кварков. Анализируется классический аналог бесспинового уравнения Солпитера. Показано, что потенциал для консервативной изолированной системы двух частиц является лоренц-скалярной функцией расстояния между кварками и может быть включен в массу частиц, что приводит к координатно-зависимой массе кварков. Потенциал типа воронки модифицируется с учетом зависимости постоянной сильной связи α_S от расстояния. Развивается концепция свободного движения частиц в связанном состоянии. Задача на собственные значения связанного состояния определяется релятивистским квазиклассическим волновым уравнением для скалярного потенциала. Получены два точных асимптотических решения этого уравнения для кулоновской и линейной частей потенциала в аналитическом виде; на этой основе записана комплексная массовая формула для мезонов и резонансов. Эффективность модели демонстрируется в сравнении результатов расчетов с данными для масс ρ и *D* мезонов.

Ключевые слова: мезон, связанное состояние, потенциал, кварковая модель, волновое уравнение, асимптотический метод

Для цитирования. Сергеенко, М. Н. Мезонные резонансы в релятивистской кварковой модели / М. Н. Сергеенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 46–63. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-46-63

Mikhail N. Sergeenko

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

MESON RESONANCES IN THE RELATIVISTIC QUARK MODEL

Abstract. In this paper, the relativistic quark model is developed for the study of mesons and resonances as quasi-bound quark states. A classic analogue of the spinless Salpeter equation is analyzed. It is shown that the potential for a conservative isolated two-particle system is the Lorentz-scalar function of the distance between quarks and can be included into the particle mass, which leads to the position-dependent quark mass. The funnel-type potential is modified with taking into account the dependence of the strong coupling α_S on the distance. The concept of free motion of particles in a bound state is developed. The eigenvalue problem for the bound state is defined by the relativistic quasiclassical wave equation for the scalar potential. Two exact asymptotic solutions of the equation for the Coulomb and linear parts of the potential are obtained analytically; on this basis, the complex-mass formula for mesons and resonances is written. The efficiency of the model is demonstrated by comparison of the calculation results with the data for the masses of ρ and *D* mesons.

Keywords: Meson, bound state, potential, quark model, wave equation, asymptotic method

For citation. Sergeenko M. N. Meson resonances in the relativistic quark model. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 46–63 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-46-63

Введение. Таблицы данных в физике высоких энергий содержат наиболее полную информацию об открытых и постоянно открываемых новых частицах [1]. Этому способствует рост энергии ускорителей и предложения новых экспериментов [2]. Большинство известных адронных состояний являются *резонансами* – возбужденными состояниями кварк-глюонных систем, таких как мезоны, барионы, гипероны, глюболы, экзотические частицы. Мезоны являются простейшими адронами – связанными состояниями кварка и антикварка.

Фундаментальная динамическая теория адронов и резонансов пока не создана, поэтому расчеты свойств этих физических систем обычно выполняются путем развития и применения на практике различных феноменологических моделей [3–9]. Все адроны и их резонансы населяют траектории Редже [10], которые содержат динамику цветового взаимодействия кварков и глюонов. Теория Редже привела к появлению нового способа классификации частиц – по семействам траекторий [10]. Все адроны и их резонансы в этом подходе связаны полюсами Редже, движущимися в комплексной плоскости углового момента J. Физические характеристики резонансов исследовались в схеме комплексных масс [9]. Массы и полные ширины резонансов кваркониев были получены в рамках единого подхода из двух асимптотических решений квазиклассического уравнения [11, 12] для модифицированного потенциала типа воронки с учетом зависимости величины сильной связи $\alpha_S(r)$ от расстояния [8].

Описание мезонов и их возбужденных состояний в принципе должно выполняться в рамках квантовой теории поля (КТП) сильных взаимодействий — квантовой хромодинамике (КХД). Последовательное описание сводится к релятивистской задаче двух тел, которая в общем случае основывается на четырехмерном (4D) ковариантном уравнении Бете – Солпитера (БС) [13], полученном в рамках КТП. Однако попытки его практического использования приводят к ряду проблем. Существуют различные приведения уравнения БС к решаемому виду [14–26]. Одним из наиболее известных и первых является бесспиновое уравнение Солпитера [14], но оно также приводит к серьезным проблемам при его решении. Интересные и важные результаты в описании спектроскопии адронов были получены из решения двухчастичных уравнений Дирака в теории *ограниченной динамики* (constraint dynamics) [15–21]. Краткий обзор этого подхода приведен в [18].

В настоящей работе рассматривается релятивистская задача связанного состояния двух скалярных частиц неравных масс. В разделе 1 дается краткий обзор ситуации в этой области и разных подходов приведения уравнения БС к решаемому виду. В разделе 2 выполняется анализ бесспинового уравнения Солпитера путем перехода к его классическому аналогу в релятивистской классической механике и использовании понятия координатно-зависимой массы кварков. На этой основе выводится уравнение движения для двух частиц в релятивистской квантовой механике (РКМ) с лоренц-скалярным модифицированным потенциалом типа воронки. Два точных асимптотических решения полученного квазиклассического волнового уравнения при $r \to 0$ и $r \to \infty$ используются для вывода комплексной массовой формулы. В качестве примера вычисляются спектры масс мезонных резонансов для некоторых состояний семейств их траекторий Редже.

1. Квазипотенциальные приведения уравнения Бете – Солпитера. Последовательное описание мезонов как связанных кварк-антикварковых состояний сводится к релятивистской задаче двух тел, которая пока не имеет точного решения. Рассмотрение релятивистского формализма связанных состояний приведено в работах многих авторов [14–27]. Строго теоретическое описание релятивистских связанных состояний может быть дано с использованием однородного 4D-уравнения БС [13], полученного в рамках квантовой теории поля. В операторном представлении оно имеет самый простой вид [17, 21, 22]:

$$\Psi = G_0\,\mathrm{K}\,\Psi, \tag{1}$$

где Ψ – амплитуда БС, которую можно рассматривать как функцию координат x_1, x_2, так и импульсов p_1, p_2 в зависимости от выбранного представления. Оператор K есть неприводимое ядро уравнения БС, которое получается из уравнения для амплитуды рассеяния $T = \mathrm{K} + \mathrm{K}G_0T$ вне массовой оболочки [17]. Оно дается суммой неприводимых двухфермионных фейнмановских графов и в общем случае содержит перенормировку заряда, графы поляризации вакуума и другие члены. Свободный пропагатор G_0 есть произведение $G_0 = G_{0,1}G_{0,2}$ свободных пропагаторов двух фермионов. Однако общей для всех релятивистских теорий связанных состояний является проблема двухвременного формализма.

Уравнение БС (1) обычно не рассматривается в полной 4D-формулировке из-за его технической сложности (сложной формы ядра) и существования нефизических решений по относительным степеням свободы время-энергия, для которых нет правильного нерелятивистского предела. Принципиальная трудность применения уравнения БС на практике возникает от переменной относительного времени, что привело к разработке различных его приведений к решаемому виду [14–19, 22–27].

В простейшем случае двух бесспиновых частиц с массами m_1 и m_2 уравнение (1) может быть представлено в виде [17, 21]

$$G_0^{-1}\Psi \equiv \left(p_1^2 + m_1^2\right)\left(p_2^2 + m_2^2\right)\Psi = \mathrm{K}\Psi. \tag{2}$$

Наиболее распространенная практика в задаче двух фермионов состоит в исключении переменной относительного времени (трехмерное приведение – 3D *reduction*) в уравнении БС. Такое приведение наиболее часто состоит в замене свободной функции Грина G_0 выражением, сочетающим относительную энергию ε и 3D-пропагатор. В работах [17, 22–24] было показано, что нефизические решения исчезают, если в расчеты включаются лестничные и перекрестные лестничные диаграммы. В целом, предложены многочисленные приведения уравнения БС. Некоторые из этих приближенных методов с успехом использовались для расчетов спектров мезонов [16–19]. В подходах разных авторов подобные ограничения разные, и применяются они в соответствии с теорией *ограниченной динамики* [15–21]. Таких методов может быть еще больше [20–28]; рассмотрим некоторые из них.

Бесспиновое уравнение Солпитера. Одним из наиболее известных среди полученных 3D-уравнений для связанных состояний является уравнение Солпитера [14]. Это уравнение, как и уравнение БС, можно записать по-разному. Для двух бесспиновых частиц с центральным потенциалом взаимодействия в системе центра инерции (СЦИ) оно имеет вид ($\hbar = c = 1$) [26, 27]

$$\hat{H}\psi(\mathrm{r}) \equiv \left[\sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + m_1^2} + \sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + m_2^2} + V(r)\right]\psi(\mathrm{r}) = \mathrm{M}\psi(\mathrm{r}), \tag{3}$$

где М – инвариантная масса связанного состояния. Это уравнение получено при допущении, что конституенты в системе двух тел взаимодействуют мгновенно (*instantaneously*) и движутся как свободные частицы [27, 28]. Оно является простейшим уравнением на собственные значения для системы двух скалярных частиц с центральным потенциалом взаимодействия. Его иногда называют квазирелятивистским уравнением Шредингера (поскольку оно не имеет явно ковариантный вид) или одновременным уравнением БС. Здесь функция $V(r = |\mathrm{r}|)$ есть одновременная $t_1 = t_2$ (*instantaneous*) функция взаимодействия (потенциал), которая является фурье-преобразованием ядра $K(\mathbf{k})$ уравнения БС, зависящего от пространственной части $\mathbf{k}$ относительного 4-импульса k^μ. При выводе уравнения (3) использовалось несколько приближений: исключение зависимости от относительного времени $t = t_1 - t_2$, неучет спинов частиц и решений с отрицательной энергией [14, 16, 23–25].

Однако уравнение (3) также имеет проблемы при решении, а основную техническую трудность составляют операторы под квадратным корнем. Обычно (3) решается численно или корни разлагаются в ряд, что приводит к дифференциальному уравнению более высокого порядка. Поэтому многие расчеты основываются не на уравнениях (1)–(3), а на уравнениях Клейна – Гордона, Дирака и различных формах квазипотенциальных уравнений [3, 7, 15–20]. Лестничное и одновременное приближения, использованные для вывода (3), широко применялись многими авторами. Но лестничное приближение не приводит к правильному одночастичному пределу и не является калибровочно-инвариантным [17].

Многочисленные техники развиты [29–31] для численного решения уравнения (3). В работах [29, 30] представлен метод численного расчета собственных значений связанного состояния и собственных функций уравнения (3) для центрального взаимодействия. Этот метод есть обобщение на 3D-случай метода гамильтониана на решетке в разложении Фурье для одномерного уравнения Шредингера. В [31] была развита новая процедура решения (3) с использованием матричного представления оператора нелокальной кинетической энергии. Процедура применялась для решения (3) с корнельским потенциалом, где все требуемые матричные элементы могут быть вычислены аналитически.

Численные расчеты могут быть получены с очень высокой точностью, но всегда важно иметь аналитическое решение. Во-первых, это важно для проверки численных расчетов, а во-вторых, явное решение дает простой и быстрый способ получить полную информацию о спектрах энергии. Большинство аналитических результатов получено для симметричной версии уравнения (3), а именно [32, 33]:

$$\hat{H}\psi(\mathrm{r}) \equiv \left[\sigma\sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + m^2} + V(r)\right]\psi(\mathrm{r}) = \mathrm{M}\psi(\mathrm{r}), \tag{4}$$

где σ – произвольная положительная постоянная, m – эффективная масса частиц. Одним из недостатков (4) является то, что появляются два свободных параметра σ и m.

Приведение уравнения БС может быть получено путем итерации на лоренц-инвариантную гиперповерхность в пространстве относительного 4-импульса p. Это приводит к инвариантным 3D волновым уравнениям для относительного движения [13–20]. Разные способы приведения уравнения БС приводят к разным формам 3D-уравнений, однако все они теоретически эквивалентны в пределе учета всех поправочных членов. То или иное результирующее 3D волновое уравнение не является единственным и зависит от природы 3D-гиперповерхности.

Уравнение Тодорова. Хорошо известно и часто цитируется в литературе *квазипотенциальное* уравнение Тодорова для бесспиновых частиц [15]:

$$\left[\hat{p}^2 + \Phi(x_1 - x_2)\right]\Psi = \kappa_s^2\Psi, \qquad s = \mathrm{M}^2, \tag{5}$$

$$\kappa_s^2 = \frac{1}{4s}\left[s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2\right] \equiv \frac{1}{4s}\lambda(s, m_1, m_2), \tag{6}$$

$$\lambda(s, m_1, m_2) = \left[s - (m_1 - m_2)^2\right]\left[s - (m_1 + m_2)^2\right], \tag{7}$$

где $\lambda(s, m_1, m_2)$ – *главная инвариантная функция* (треугольника) [10]. Здесь инвариант (6) есть собственное значение квадрата относительного импульса индивидуальной частицы. Уравнение (5) имеет вид уравнения Шредингера; квазипотенциал Φ относится к амплитуде рассеяния T согласно уравнению типа Липпмана – Швингера [18]

$$T = \Phi + \Phi\frac{1}{p_\perp^2 - \kappa_s^2 - i0}T \tag{8}$$

и зависит от разности $x_1 - x_2$ только через поперечную компоненту $x_\perp^\mu = (0, \mathbf{r})$. При этом выполняются соотношения

$$p_\perp^\mu = p^\mu + \hat{P}_\mu \cdot p^\mu \hat{P}, \quad p_\perp^\mu \cdot \hat{P}_\mu = 0, \quad \hat{P}_\mu = P_\mu / \mathrm{M}, \quad P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu, \quad \hat{P}^2 = -1, \quad \mathrm{M} = \sqrt{-P^2}, \tag{9}$$

которые справедливы при использовании *ограничения* $p \cdot P\,\Psi = 0$ на 3D-гиперповерхности. Равенство нулю скалярного произведения ($P_\mu \cdot p^\mu = 0$ согласно этому ограничению) означает равенство нулю продольной компоненты, что верно в системе центра инерции. Таким образом, в поперечной компоненте $p_\perp^\mu = (0, \mathbf{p})$ относительного 4-импульса p^μ исключается относительная энергия ε [17, 18]. Это обеспечивает выполнение коммутационного соотношения $[p \cdot P, \Phi]\Psi = 0$, а также исключает зависимость от относительной энергии ε_s, т. е. $p\psi = (0, \mathbf{p})\psi$, и от относительного времени, т. е. $x_\perp^\mu = (0, \mathbf{r})$. Выражения $x_\perp^\mu = (0, \mathbf{r})$ и $p_\perp^\mu = (0, \mathbf{p})$ справедливы только в СЦИ, где инвариантное расстояние $r = (x_\perp^2)^{1/2}$ равно модулю $|\mathbf{r}|$ радиус-вектора $\mathbf{r}$, а инвариантный относительный импульс $p = (p_\perp^2)^{1/2}$ равен модулю импульса $\mathbf{p}$ [17–19]. В СЦИ $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ являются канонически сопряженными переменными, что справедливо для всех 3D-приведений уравнения БС [15–23]. Квазипотенциал Φ в (5) есть функция расстояния между частицами, т. е. $\Phi(x_1 - x_2) = \Phi(r)$ [15–19], где $r = (x_\perp^2)^{1/2}$ есть инвариант [19].

В отсутствие взаимодействия ($V = 0$) подход Тодорова дает точную релятивистскую кинематику двух свободных частиц (инвариантную массу в СЦИ)

$$\mathrm{M}_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}_2^2}, \tag{10}$$

которая путем обращения приводит к выражению (6) для квадрата относительного импульса $p^2 = \kappa^2(s)$; справедливо также равенство (при $V = 0$):

$$\hat{p}^2\Psi = \hat{p}_\perp^2\Psi = \kappa_\mathrm{s}^2\Psi, \qquad s = \mathrm{M}_0^2. \tag{11}$$

Здесь вводятся кинематические переменные $m_\mathrm{s} = m_1 m_2 / \sqrt{s}$ и $\varepsilon_\mathrm{s} = (s - m_1^2 - m_2^2)/2\sqrt{s}$, для которых выполняется соотношение Эйнштейна $\varepsilon_\mathrm{s}^2 = \kappa_\mathrm{s}^2 + m_\mathrm{s}^2$, если m_s рассматривать как массу фиктивной частицы относительного движения; справедливы также равенства [15]:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \sqrt{s}, \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (m_1^2 - m_2^2)/\sqrt{s}, \quad \kappa_\mathrm{s}^2 = \varepsilon_1^2 - m_1^2 = \varepsilon_2^2 - m_2^2, \tag{12}$$

где инвариантные энергии индивидуальных частиц в СЦИ даются формулами

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{s} + \left(m_1^2 - m_2^2\right)/\sqrt{s}\right], \quad \varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{s} + \left(m_2^2 - m_1^2\right)/\sqrt{s}\right], \tag{13}$$

$$p_1^\mu = \varepsilon_1 \hat{P}^\mu + p^\mu, \quad p_2^\mu = \varepsilon_2 \hat{P}^\mu - p^\mu, \quad p^\mu = \left(\varepsilon_2 p_1^\mu - \varepsilon_1 p_2^\mu\right)/\sqrt{s}. \tag{14}$$

Соотношения (12)–(14) справедливы также для взаимодействующих частиц; в этом случае инвариантная масса M_0 для свободных частиц заменяется массой М связанного состояния.

Взаимодействие вводится путем минимальных подстановок: $\varepsilon_\mathrm{s} \to \varepsilon_\mathrm{s} - V$, $m_\mathrm{s} \to m_\mathrm{s} + \mathrm{S}$. Квазипотенциал для *скалярного взаимодействия* дается выражением [17, 18]

$$\Phi = 2m_\mathrm{s}\mathrm{S} + \mathrm{S}^2, \tag{15}$$

а для векторного $\Phi = -2\varepsilon_\mathrm{s} V + V^2$. Для скалярного взаимодействия уравнение (5) принимает вид

$$\left(\hat{p}^2 + 2m_\mathrm{s}\mathrm{S} + \mathrm{S}^2\right)\Psi = \kappa_\mathrm{s}^2\Psi. \tag{16}$$

Форма квазипотенциала $\Phi = 2m_\mathrm{s}\mathrm{S} + \mathrm{S}^2 + 2\varepsilon_\mathrm{s} A - A^2$ справедлива не только для инвариантных кулоновских форм [17]·

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad r = \sqrt{x_\perp^2} - \text{invariant}, \tag{17}$$

для которых она была выведена, но и для других потенциалов. Относительное расстояние r между частицами в СЦИ является релятивистским инвариантом.

Двухчастичные уравнения Дирака. Другой подход состоит в алгебраическом преобразовании уравнения БС к двум сцепленным уравнениям Дирака ограниченной динамики [17–19, 25]:

$$\begin{aligned} D_1\psi &= \gamma_{51}[\gamma_1 \cdot (p_1 - V_1) + m_1 + \mathrm{S}_1]\psi = 0, \\ D_2\psi &= \gamma_{52}[\gamma_2 \cdot (p_2 - V_2) + m_2 + \mathrm{S}_2]\psi = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\psi(x_1, x_2)$ – 16-компонентный спинор. Операторы D_1 и D_2 удовлетворяют условию сравнимости $[D_1, D_2]\psi = 0$, взаимодействия $\mathrm{S}_i = \mathrm{S}_i(x_\perp)$, $V_i = V_i(x_\perp)$ зависят от скалярного инварианта $\mathrm{S}(r)$ и векторного инварианта $V(r)$, которые обеспечивают ковариантное 3D-приведение уравнения БС для двух фермионов. Этот подход широко используется и позволяет исключить относительные степени свободы время-энергия в релятивистской системе двух тел посредством ковариантного уравнения. Он также обеспечивает выполнение «теоремы невзаимодействия» Кюри – Жордана – Сударшана [34], которая запрещает каноническую 4D-трактовку релятивистской задачи N тел.

Приведение Паули для уравнений (18) дает ковариантное уравнение относительного движения в СЦИ типа Шредингера, аналогичное уравнению Тодорова (5)

$$\left[(-i\vec{\nabla})^2 + \Phi(\mathbf{r}, m_1, m_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\right]\Psi_+ = \kappa_s^2 \Psi_+, \tag{19}$$

с точным спино-зависимым квазипотенциалом Ф. Здесь в (19) Ψ_+ есть 4-компонентный подспинор 16-компонентного спинора Ψ в (18). Уравнение (19) содержит точную релятивистскую кинематику двух связанных частиц через собственное значение κ_s^2 вида (6).

Этот подход имеет следующие требуемые и важные особенности: 1) приводит к одночастичному уравнению Дирака для фиксированных масс m_1 и $m_2 \to \infty$; 2) сводится к нерелятивистскому уравнению Шредингера в пределе слабой связи ($V \ll$ M); 3) может быть решено без применения теории возмущений для позитрония, мюониев и мезонов без введения поправок «руками», как в других подходах. Уравнение (19) проверено аналитически, численно, является калибровочно-инвариантным и успешно использовалось для описания спектров мезонов [17–19]. Как уже отмечалось, существует достаточно много других способов приведения уравнения БС (1).

2. Связанные состояния в релятивистской квантовой механике. В проблеме связанных состояний возникает трудность понимания релятивистской запутанности, которая требует переформулировки теории в пространстве-времени Минковского с хорошо определенной кинематической группой Пуанкаре, связывающей релятивистские инерциальные системы [28]. Основным препятствием в развитии 3D-моделей связанных состояний является «теорема невзаимодействия» Кюри – Жордана – Сударшана [34].

Уравнение типа Тодорова (5) может быть получено из анализа классического аналога уравнения Солпитера (3) в рамках РКМ. Имеются формулировки РКМ, известные как пуанкаре-инвариантная РКМ и релятивистская гамильтонова динамика (РГД) [35, 36]. Формулировка РГД была предложена в 1949 г. П. Дираком [36]. Она оказалась весьма успешной в трактовке релятивистских связанных состояний с мгновенным взаимодействием ядер для уравнений типа БС в квантово-полевых теориях. Начальными точками развития РГД являются три формы динамики: одновременная, точечная и на световом фронте [36].

Предложенный в [28] оригинальный подход в теории связанных состояний дает новую формулировку РКМ в рамках одновременной формы динамики в 3D-пространстве Вигнера. Описание мировых линий частиц дается относительными переменными Вигнера в абстрактном системно-независимом внутреннем пространстве h1, существование которого подразумевается ковариантностью Вигнера. Этот формализм охватывает свойства как релятивистских связанных состояний, так и рассеяние частиц. Нерелятивистский предел приводит к стандартной квантовой механике, но с «замороженным» описанием системы центра инерции по методу Гамильтона – Якоби.

В этом формализме квантуется гамильтониан

$$\mathrm{M} = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 + m_1^2 + \Phi(\boldsymbol{\rho})} + \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 + m_2^2 + \Phi(\boldsymbol{\rho})}, \tag{20}$$

для массы покоя системы M на одновременной 3D-гиперповерхности Вигнера [28, 35], где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ – внутренняя относительная переменная Вигнера на этой гиперповерхности, $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ – относительный импульс, $\Phi(\boldsymbol{\rho})$ – произвольная потенциальная функция действия на расстоянии, которая может содержать массы частиц. Модельный гамильтониан (20) является одним из генераторов алгебры Пуанкаре и рассматривается как анзац, а $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{\rho}$ являются канонически сопряженными относительными переменными внутреннего 3D-пространства Вигнера в СЦИ. Квантование гамильтониана (20) было выполнено в [35], что для бесспиновых частиц дает уравнение

$$\left[\sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + m_1^2 + \Phi(\boldsymbol{\rho})} + \sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + m_2^2 + \Phi(\boldsymbol{\rho})}\right]\psi(\boldsymbol{\rho}) = \mathrm{M}\psi(\boldsymbol{\rho}). \tag{21}$$

Важной особенностью (21) выступает то, что квазипотенциал стоит под знаком корня.

Скалярный потенциал взаимодействия. Взаимодействие релятивистской частицы с 4-импульсом p^{μ}, движущейся во внешнем поле A^{μ}, вводится согласно принципу калибровочной инвариантности: $p^{\mu} \to P^{\mu} = p^{\mu} - eA^{\mu}$. Однако в случае системы двух взаимодействующих частиц ситуация другая. Мы рассматриваем связанное состояние двух частиц как изолированную инерциальную систему; это означает отсутствие внешних полей или другого воздействия извне. Краткий обзор некоторых подходов рассмотрен выше в разделе 1. Наибольший интерес для нас представляют в нашем подходе уравнения (5), (19) и (21).

Аналогичный подход использовался в [37], где было дано феноменологическое описание взаимодействия релятивистских кварков с использованием уравнения Дирака для корнельского потенциала при произвольном соотношении между векторной и скалярной частями в представлении Фолди – Вутхойзена. Этот и многие другие подходы показывают, что способ введения взаимодействия частиц в релятивистской теории является *модельным*. И здесь важно отметить, что в физике адронов конфайнмент в потенциальном подходе можно описать только тогда, когда потенциал является именно лоренц-скаляром. Такой подход приводит к понятию частиц с переменной массой [38–44].

В уравнении (21) квазипотенциал $\Phi(\boldsymbol{\rho})$ стоит под корнем и аддитивен к квадратам масс частиц. Если в (21) использовать форму (15) для каждой из частиц со скалярным взаимодействием $\mathrm{S}(\boldsymbol{\rho})$, то получим

$$\left[\sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + \left[m_1 + \mathrm{S}(\boldsymbol{\rho})\right]^2} + \sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + \left[m_2 + \mathrm{S}(\boldsymbol{\rho})\right]^2}\right]\psi(\boldsymbol{\rho}) = \mathrm{M}\psi(\boldsymbol{\rho}). \tag{22}$$

Уравнения типа (22) приводят к понятию частиц с переменной массой, что применялось в теории рядом авторов [38–42].

Релятивистское волновое уравнение движения частицы в скалярном потенциальном поле сформулировано для бесспиновых частиц [38, 39] и с учетом спинов [40, 41]. В этом подходе потенциал взаимодействия, как лоренц-скаляр, аддитивен к массе покоя частицы, что приводит к понятию частицы с переменной массой $\mathrm{m}(r) = m_0 + \mathrm{S}(r)$ [38–42]. При этом выполняются релятивистские соотношения [38]

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 = \mathrm{m}^2(r), \qquad E = \gamma \mathrm{m}(r), \qquad \boldsymbol{p} = \gamma \mathrm{m}(r)\boldsymbol{v}. \tag{23}$$

В такой формулировке собственное время τ частицы является параметром эволюции, а массовая функция $\mathrm{m}(r)$ обладает свойствами (23) инвариантной массы [38, 39].

Рассмотрим другой подход, в рамках которого можно получить уравнения типа (5), (19) и (22) в рамках РКМ [42–44]. Формулировка РКМ отличается от нерелятивистской квантовой механики заменой инвариантности при преобразованиях Галилея инвариантностью при преобразованиях Пуанкаре. Описание в РГД подразумевает, что массовые операторы такие же, как и для невзаимодействующих частиц [28, 35, 36], и эти члены взаимодействия могут быть представлены только посредством операторов 4-импульсов W^{μ}.

Система двух частиц в релятивистской классической механике. Изучение системы двух тел в РКМ удобно начать из рассмотрения кинематики свободного движения двух частиц с 4-импульсами $p_1 = (\varepsilon_1, \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\varepsilon_2, \mathbf{p}_2)$ в релятивистской классической механике [42–44]. Из двух векторов можно получить два других вектора $P = p_1 + p_2$ и $p = p_1 - p_2$, которые приводят к некоторым важным соотношениям. Квадрат первого импульса $P^2 = P_{\mu}P^{\mu} = (\mathrm{M}_0)^2 = s$ и второго $p^2 = p_{\mu}p^{\mu} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2$ являются инвариантами, где M_0 – масса системы; для них выполняются соотношения (10)–(14). Сумма $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ в системе центра инерции означает, что $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$. Вектор импульса системы в СЦИ $P_{\mu} = (P_0 \equiv \mathrm{M}_0, \mathbf{0})$ приводит к еще одному важному инварианту. Он следует из выражения (10) для массы покоя $\mathrm{M}_0 = \varepsilon_1(\mathbf{p}) + \varepsilon_2(\mathbf{p}) \equiv [\mathbf{p}^2 + m_1]^{1/2} + [\mathbf{p}^2 + m_2]^{1/2}$, откуда путем обращения получаем равенство (6), которое запишем так [15, 17, 18, 42]:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4s}\lambda(s, m_1, m_2) \equiv \frac{1}{4s}\left(s - m_-^2\right)\left(s - m_+^2\right) = \kappa_s^2, \tag{24}$$

где $m_+ = m_1 + m_2, m_- = m_1 - m_2$. Очевидно, квадрат относительного импульса (24) является релятивистским инвариантом (Приложение). Что изменится при наличии взаимодействия между частицами m_1 и m_2? Гамильтониан в (22) является анзацем. Такой способ введения взаимодействия означает переход к переменной массе, который использовался в ряде работ [38–42]. Покажем, что (22) можно получить иначе.

Рассмотрим консервативную изолированную систему двух взаимодействующих частиц в импульсном пространстве, которую можно характеризовать тремя 4-векторами: p_1, p_2 и $W(q_1, q_2)$, где W^μ определяет поле взаимодействия, а q_1 и q_2 – координаты частиц. Как и в случае свободных частиц, из этих векторов можно построить несколько алгебраических комбинаций, простейшая из которых дается их суммой

$$\mathrm{P}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu + W^\mu \equiv \pi_1^\mu + \pi_2^\mu = \mathrm{const}, \tag{25}$$

где

$$\pi_1^\mu = p_1^\mu + \tfrac{1}{2}W_{12}^\mu, \quad \pi_2^\mu = p_2^\mu + \tfrac{1}{2}W_{21}^\mu, \quad W^\mu = \tfrac{1}{2}W_{12}^\mu + \tfrac{1}{2}W_{21}^\mu. \tag{26}$$

Здесь 4D-вектор (25) представляет закон сохранения энергии-импульса $\mathrm{P}^\mu = \mathrm{MU}^\mu$, где M – масса системы двух взаимодействующих частиц (лоренц-скаляр), $\mathrm{U}^\mu = d\mathrm{X}^\mu/d\tau$ – вектор 4-скорости, X^μ – координата СЦИ, τ – собственное время в СЦИ, квадрат $\mathrm{P}_\mu\mathrm{P}^\mu = \mathrm{M}^2\mathrm{U}_\mu\mathrm{U}^\mu = \mathrm{M}^2$ (поскольку $\mathrm{U}_\mu\mathrm{U}^\mu = 1$). Здесь в (26) вектор W_{12} означает, что частица 1 движется в силовом поле, создаваемом частицей 2, а вектор W_{21} – частица 2 движется в поле частицы 1. Обоснование выбора коэффициента ½ было представлено в [42].

Одной из важных проблем в задаче многих тел является разделение относительных переменных от движения всей системы. Постоянный вектор (25) можно представить в виде двух уравнений $[\varepsilon_i^2(\mathbf{p}_i) = \mathbf{p}_i^2 + m_i^2]$

$$P^0 \equiv E = \left[\varepsilon_1(\mathbf{p}_1) + \tfrac{1}{2}W_{12}^0\right] + \left[\varepsilon_2(\mathbf{p}_2) + \tfrac{1}{2}W_{21}^0\right] = \mathrm{const}, \tag{27}$$

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{p}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{W}_{12}\right) + \left(\mathbf{p}_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{W}_{21}\right) = \mathrm{const}, \tag{28}$$

которые определяют движение системы центра инерции с постоянной энергией E и постоянным импульсом $\mathbf{P}$; это интегралы движения. Поскольку рассматриваемая система двух частиц является консервативной, уравнение (27) дает закон сохранения энергии, а (28) – закон сохранения импульса. Хорошо известно, что результаты расчетов не зависят от выбора системы отсчета, поэтому проще всего рассмотреть (27) и (28) в СЦИ, в которой $P^\mu = (\mathrm{M}, \mathbf{0})$, и мы имеем

$$\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\right) + \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\right) = \mathrm{M}, \tag{29}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{W}_{12} + \tfrac{1}{2}\mathbf{W}_{21}\right) = \mathbf{0}. \tag{30}$$

Поскольку в СЦИ $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ (значит, $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$), то $\mathbf{W}_{12} + \mathbf{W}_{21} = \mathbf{0}$, $\mathrm{S} = \mathrm{W}_{12}^0 = \mathrm{W}_{21}^0$. Анализ уравнений (25)–(30) был выполнен в [42], где дано обоснование выбора весовых коэффициентов ½, что следует из (30): равенство $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ означает, что сумма всех сил равна нулю (частица покоится). Этими силами для замкнутой системы в СЦИ являются только силы взаимодействия частиц друг с другом, которые одинаковы по величине и противоположно направлены.

Одновременная форма динамики в релятивистской квантовой механике. Уравнение (29) является классическим аналогом бесспинового уравнения Солпитера (3) для скалярного потенциала S(r). Как отмечалось выше, оно является простейшим уравнением на собственные значения для системы двух частиц с центральным потенциалом взаимодействия. Данное уравнение часто называют одновременным уравнением БС, поскольку потенциал $V(r)$ является одновременной (*instantaneous*) функцией взаимодействия, не зависящей от относительного времени $t = t_1 - t_2$. Этот результат получен в рамках теории ограниченной динамики [15–21], краткий обзор которой приведен в разделе 2, а также в работе [18]. Исключение зависимости от относительного времени означает, что потенциал взаимодействия зависит только от относительного расстояния *r*. Развитая в [18] процедура функционирует как квантово-механическая трансформация уравнения БС.

Запишем (29) иначе в виде

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} = \mathrm{M} - \mathrm{S}. \tag{31}$$

Здесь масса M системы частиц есть лоренц-скаляр (инвариант). Это значит, что потенциал S должен быть той же природы, т. е. лоренц-скаляром. Но тогда выражение в левой части (31) также должно быть лоренц-скалярным. Появление лоренц-инвариантного потенциала естественно интерпретируется в рамках конформно-плоской геометрии [40; 41], где было дано объяснение «запирающих» свойств метрики этой геометрии. В работах [40; 41] был рассмотрен также вопрос о координатной зависимости массы покоя, обладающей трансформационными свойствами лоренц-скаляра, как это дается равенствами (23).

Уравнение вида (22) получено в [42] следующим образом. Поскольку потенциал и способ его введения моделируются, полную энергию частиц $\varepsilon_i(\mathbf{p}) = [\mathbf{p}^2 + m_i]^{1/2}$ можно представить в виде суммы кинетической энергии T_i и масс покоя m_i: $\varepsilon_i(\mathbf{p}) = T_i + m_i$ [42]. Тогда два лоренц-скаляра можно суммировать, что приводит к зависимости: $\mathrm{m}_i(r) = m_i + ½\mathrm{S}(r)$. Таким образом, вводится координатно-зависимая масса частиц от расстояния *r*. Отсюда следует, что полную энергию системы двух частиц в связанном состоянии можно записать в виде следующего анзаца [42]:

$$\mathrm{W} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}_1^2(r)} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}_2^2(r)} = \mathrm{M}. \tag{32}$$

Выражение (32) имеет вид полной энергии двух свободных частиц с координатно-зависимой массой [38–42], для которых выполняются соотношения (23). Квадрат импульса $\mathbf{p}^2$ выражается из (32) путем несложных алгебраических преобразований через функцию треугольника аналогично (5)–(7), что дает

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4s}\lambda\left[s, \mathrm{m}_1(r), \mathrm{m}_2(r)\right] = K_\mathrm{s}\left[s - \left(m_+ + \mathrm{S}\right)^2\right] \equiv \kappa_\mathrm{s}^2 - U^2(s,r), \tag{33}$$

где $s = \mathrm{M}^2$, $K_\mathrm{s} = (s - m_-^2)/4s$, эффективное собственное значение κ_s^2 дается выражением (24) для свободных частиц, а также введен квазипотенциал

$$U^2(s,r) = K_\mathrm{s}\left[2m_+\mathrm{S}(r) + \mathrm{S}^2(r)\right]. \tag{34}$$

Релятивистское классическое уравнение (33) является аналогом нерелятивистского равенства для квадрата относительного импульса: $\mathbf{p}^2 = 2\mu(E - V) \equiv k^2 - U(r)$, где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

Волновое уравнение для связанного состояния в релятивистской квантовой механике и его решение. Волновое уравнение в квантовой механике может быть получено из классического с помощью принципа соответствия. Согласно этому принципу из (33) путем замены физических величин операторами, действующими на волновую функцию $\psi(\boldsymbol{r})$, следует уравнение типа Шредингера на собственные значения для квадрата относительного импульса [42]:

$$\left[\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + U^2(s,r)\right]\psi(\mathbf{r}) = \kappa_\mathrm{s}^2\psi(\mathbf{r}). \tag{35}$$

Наряду с этим можно записать эквивалентное ему уравнение для собственных значений массы M и квадрата массы M^2:

$$\left[\sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + \mathrm{m}_1^2(r)} + \sqrt{\left(-i\vec{\nabla}\right)^2 + \mathrm{m}_2^2(r)}\right]\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{M}\psi(\mathbf{r}), \tag{36}$$

$$\left[\hat{\boldsymbol{\pi}}^2+(m_+ +\mathrm{S})^2\right]\psi(\mathbf{r})=\mathrm{M}^2\psi(\mathbf{r}),\quad \hat{\boldsymbol{\pi}}^2=K_s^{-1}(-i\vec{\nabla})^2. \tag{37}$$

Эти три уравнения (35)–(37) эквивалентны. Собственные значения M и κ_s^2 (постоянные движения) связаны соотношением для энергии двух свободных частиц [42]:

$$\mathrm{M}=\sqrt{\kappa_s^2+m_1^2}+\sqrt{\kappa_s^2+m_2^2}\equiv\varepsilon_{s,1}+\varepsilon_{s,2}, \tag{38}$$

для которых справедливы соотношения (12)–(14).

Описание спектров масс мезонов можно выполнить с использованием разных потенциалов взаимодействия кварков. Корнельский потенциал является наиболее популярным в физике адронов. Он содержит основные характеристики цветовых сил, представленных суммой двух асимптотик: одноглюонным обменом кулоновского типа – α_S/r на малых расстояниях при $r\to 0$ и линейным потенциалом σr, отвечающим модели струны с натяжением σ при $r\to\infty$. В этом потенциале α_S и σ являются фундаментальными параметрами теории. Но «постоянная» сильной связи α_S является функцией $\alpha_S(Q^2)$ виртуальности Q^2. Учет зависимости α_S от координаты осуществлен в [8, 42], где был получен КХД-модифицированный кварк-антикваковый потенциал вида

$$V_{q\bar{q}}(r)=-\frac{4}{3}\frac{\alpha_S(r)}{r}+\sigma r,\quad \alpha_S(r)=\frac{1}{b_0\ln\left[\left(1+4m_g^2r^2\right)/\left(\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2r^2\right)\right]}, \tag{39}$$

где $b_0=(33-2n_f)/12\pi$, n_f – число ароматов кварков, m_g – масса глюона, Λ_{QCD} – масштабный параметр в КХД. Величина сильной связи (39) имеет две асимптотики: $\alpha_S(r)\to 0$ при $r\to 0$ и $\alpha_S(r)\to$ $\to$ const при $r\to\infty$. В используемом нами асимптотическом подходе [8, 9, 42–44] точное поведение потенциала и других характеристик в промежуточной области не существенно, а свойства системы определяются асимптотическим поведением при $r\to 0$ и $r\to\infty$.

Уравнения (35)–(37) для потенциала (39) можно попытаться решить известными методами, но сделать это не удается, поэтому в развиваемой модели применяется квазиклассический метод [11; 12]. В данном подходе решается соответствующее *квазиклассическое* уравнение. Вывод нерелятивистского уравнения приведен в работе [11], а релятивистского – в [12]. Процедура вывода сводится к замене оператора Лапласа $\Delta=\vec{\nabla}^2$ в (35)–(37) *каноническим оператором* Δ^c без первых производных, который действует на функцию состояния $\Psi(\mathbf{r})=\sqrt{\det g_{\mu\nu}}\,\psi(\mathbf{r})$. В настоящей работе используется сферическая система координат, в которой определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в сферических координатах есть $\det g_{\mu\nu}=r^2\sin\theta$:

$$\left[-\Delta^c+U^2(s,r)\right]\Psi(\mathbf{r})=\kappa_s^2\Psi(\mathbf{r}),\qquad \Delta^c=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{40}$$

Уравнение (40) разделяется, что дает радиальное

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+K(s)\left[s-\left(m_+-\frac{4}{3}\frac{\alpha_S(r)}{r}+\sigma r\right)^2\right]-\frac{M_l^2}{r^2}\right\}\tilde{\mathrm{R}}(r)=0 \tag{41}$$

и угловое уравнения. В применяемом нами асимптотическом подходе [11, 12] все полученные после разделения переменных уравнения решаются одним и тем же квазиклассическим методом [8, 9, 42–44]. Для квадрата углового момента это дает $M_l^2=\left(l+\frac{1}{2}\right)^2$ [11, 12], что отличается от известного выражения $L^2=l(l+1)$ в квантовой механике, и не требуется замены Крамерса – Лангера для получения точных собственных значений.

3. Массовая формула. Решение радиального уравнения (41) при $m_1=m_2=m$ было получено в отдельности для кулоновской и линейной частей в случае корнельского потенциала [5] и для потенциала (39) в [8]. Сшивание двух полученных точных аналитических решений с помощью аппроксимации Паде позволило записать массовую формулу

$$\mathrm{M}_n^2 = 8\sigma\left(2k + J - \alpha_\infty + \frac{3}{2}\right) - 4m^2\left[1 - \left(\frac{\alpha_\infty}{k + J + 1}\right)^2\right], \tag{42}$$

где $\alpha_\infty = \alpha_\mathrm{S}(r \to \infty) = 2/[3b_0 \ln(2m_\mathrm{g}/\Lambda_\mathrm{QCD})]$, k и J – радиальное и угловое квантовые числа. С помощью (42) описаны спектры масс легких и тяжелых кваркониев [5], а также глюболов [8]. Асимптотическая массовая формула (42) имеет простой и прозрачный вид и отражает структуру потенциала (39), полученного как сумма двух предельных выражений – кулоновского вклада при $r \to 0$ и линейного при $r \to \infty$.

Уравнение (41) решается аналогично. Сначала находятся аналитические решения для двух предельных случаев – асимптотик потенциала (39) при $r \to 0$ и $r \to \infty$, т. е. кулоновской и линейной частей в отдельности. Задача на собственные значения (41) для кулоновской части потенциала имеет две точки поворота, а условие квантования записывается в комплексной плоскости и имеет вид

$$I_C = \oint_C \sqrt{K(s)\left[s - \left(m_+ - \frac{4}{3}\frac{\alpha_\mathrm{S}(r)}{r}\right)^2\right] - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}}\,dr = 2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{43}$$

Контур интегрирования C включает две точки поворота и разрез между ними. Интеграл (43) «берется» с использованием теории вычетов методом стереографической проекции, это значит, что вместо интегрирования по контуру C исключаются особенности вне этого контура. Этими особенностями являются точки $r \to 0$ и $r \to \infty$. Интеграл (43) в этих особых точках записывается как сумма $I = I_0 + I_\infty$, где $I_0 = -2\pi\left(l + \frac{1}{2}\right)$ – вклад интеграла (43) в особой точке $r = 0$, а интеграл I_∞ находится с помощью замены $r = 1/z$. В результате для фазового интеграла (43) имеем

$$I_C = 2\pi\left\{\alpha_\infty m_+ \sqrt{\frac{s - m_-^2}{s(-s + m_+^2)}} - \left(l + \frac{1}{2}\right)\right\}. \tag{44}$$

Равенства (43) и (44) приводят к квадратному уравнению для $s = \mathrm{M}^2$, два решения которого определяют квадраты масс s_N частицы и античастицы. Для квадрата массы частицы как связанного состояния двух кварков получаем выражение [$\upsilon_\mathrm{N} = (4/3)\alpha_\infty/(2N)$, $N = k + l + 1$]:

$$s_\mathrm{N} = \mathrm{M}_\mathrm{N}^2 = \frac{1}{2}\left[m_+^2\left(1 - \upsilon_\mathrm{N}^2\right) \pm \sqrt{\left[m_+^2\left(1 - \upsilon_\mathrm{N}^2\right)\right]^2 + \left(2m_+ m_- \upsilon_\mathrm{N}\right)^2}\right]. \tag{45}$$

Выражение (45) есть первая асимптотика квадрата массы резонанса, отвечающая вкладу кулоновского члена в потенциале (39). Вклад дальнодействующей части этого потенциала определяется из условия квантования

$$I = \oint_C \sqrt{K(s)\left[s - \left(m_+ - \frac{4}{3}\frac{\alpha_\mathrm{S}(r)}{r} + \sigma r\right)^2\right] - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}}\,dr = 4\pi\left(k + \frac{1}{2}\right). \tag{46}$$

В этом случае задача на собственные значения (41) имеет четыре точки поворота, т. е. два разреза на вещественной оси, поэтому в правой части (46) стоит 4π. Фазовый интеграл (46) находится аналогично предыдущему, т. е. исключением сингулярностей в нуле и на бесконечности. В результате получаем

$$I = 2\pi\left[\sqrt{1-\frac{m_-^2}{s}}\left(\frac{s}{8\sigma}+\frac{4}{3}\alpha_\infty\right)-\left(l+\frac{1}{2}\right)\right] = 4\pi\left(k+\frac{1}{2}\right), \tag{47}$$

что дает кубическое уравнение для инварианта s:

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0, \tag{48}$$

где

$$a_1 = 16\tilde{\alpha}_\infty\sigma - m_-^2,\quad a_2 = 64\sigma^2\left(\tilde{\alpha}_\infty^2 - \tilde{N}^2 - \tilde{\alpha}_\infty m_-^2/4\sigma\right),\quad a_3 = -\left(8\tilde{\alpha}_\infty\sigma m_-\right)^2,\quad \tilde{N} = N + \left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Физическое решение уравнения (48) (в общем случае комплексное) дается первым корнем, т. е. $s_{\mathrm{N}} = \mathrm{Re}\left\{W_{1,\mathrm{N}}^2\right\}$ [42]. В случае частиц равных масс ($m_- = 0$) уравнение (48) упрощается и сводится к квадратному $\left(s+8\tilde{\alpha}_\infty\sigma\right)^2 - \left(8\sigma\tilde{N}\right)^2 = 0,$ что приводит к двум наборам линейных траекторий Редже с противоположными наклонами.

Таким образом, имеем два асимптотических решения – (45) и $\mathrm{Re}\left\{W_{1,\mathrm{N}}^2\right\}$ из уравнения (48) для квадрата массы резонансов. Массовая формула (42) получена с помощью интерполяции Паде из двух асимптотик. Аналогично можно получить анзац для мезонных резонансов в общем случае неравных масс кварков:

$$s_{\mathrm{N}} = W_{\mathrm{N}}^2 = \frac{1}{2}\left[m_+^2\left(1-\upsilon_{\mathrm{N}}^2\right) \pm \sqrt{\left[m_+^2\left(1-\upsilon_{\mathrm{N}}^2\right)\right]^2 + \left(2m_+m_-\upsilon_{\mathrm{N}}\right)^2}\right] + \mathrm{Re}\left\{W_{1,\mathrm{N}}^2\right\}. \tag{49}$$

Асимптотическая массовая формула (49) имеет простой физический смысл. Она представлена суммой вкладов двух предельных асимптотических выражений: кулоновского при малых r (первое слагаемое), отвечающего одноглюонному обмену кулоновского типа, и линейного вклада на больших расстояниях, соответствующего натяжению струны. Это ясно видно из формулы (42), являющейся частным случаем выражения (49). Для частиц равных масс ($m_- = 0$) формула (49) переходит в выражение (42) для масс кваркониев. Формула (49) пригодна для расчета масс смешанных (ароматовых) мезонов кваркониев, глюболов их ширин и соответствующих траекторий Редже [43, 44].

Ниже в качестве примера и проверки модели приводятся таблицы расчетов масс мезонных резонансов для семейств лидирующих (спин $S = 1$) траекторий ρ-мезона и $c\bar{c}$-чармония (табл. 1).

Таблица 1. **Массы некоторых $S = 1$ состояний семейства ρ-мезонов**

Table 1. **Masses of some $S = 1$ states of the ρ-meson family**

Состояние $(n_r + 1)^{2S+1}L_{J_z}$	$m_{\text{расч}}$, МэВ/c^2, формула (49)	$m_{\text{эксп}}$, МэВ/c^2, эксперимент	Параметры
ρ-траектория Редже (изоспин $I = 1$)			
1^3S_1 ρ(770)	775,3	775,3 ± 0,34	$\alpha_S(\infty)/2 = 1{,}478 \pm 0{,}001$ $\sigma/2 = 0{,}142 \pm 0{,}002$ ГэВ^2 $m_u = 2{,}093 \pm 0{,}002$ МэВ $m_d = 7{,}015 \pm 0{,}003$ МэВ
1^3P_2 a_2(1320)	1317,9	1318,3 ± 0,6	
1^3D_3 ρ_3(1690)	1695,0	1688,8 ± 2,1	
1^3F_4 a_4(2040)	2002,2	1996,3 ± 10	
1^3G_5 a_5(2040)	2268,2	–	
2^3S_1 ρ(1700)	1695,0	1720,0 ± 20	
3^3S_1 ρ(1450)	2268,2	–	

Здесь состояния 1^3S_1, 1^3P_2, 1^3D_3, 1^3F_4, 1^3G_5 лежат на лидирующей ($S = 1$) траектории ρ-мезона. Величина сильной связи (39) определяется массой глюона m_g и масштабным параметром Λ_{QCD} в КХД. Здесь имеем: $m_g = 416$ МэВ, $\Lambda_{QCD} = 638$ МэВ.

Таблица 2. **Массы некоторых S = 1 состояний семейства $D^{\pm *}$-мезонов**

Table 2. **Masses of some S = 1 states of the $D^{\pm *}$-meson family**

Состояние $(n_r + 1)^{2S+1}L_{Jz}$	$m_{расч}$, МэВ/c^2, формула (49)	$m_{эксп}$, МэВ/c^2, эксперимент	Параметры
$D^{\pm *}$-траектория (изоспин I = 1)			
1^3S_1 D*(2010)	2010,3	2010,26 ± 0,13	$\alpha_S(\infty)/2$ = 1,013 ± 0,014 $\sigma/2$ = 0,273 ± 0,002 ГэВ^2 m_c = 878,0 ± 0,003 МэВ m_d = 7,580 ± 0,004 МэВ
1^3P_2 D_2*(2464)	2464,4	2460,10 ± 1,6	
1^3D_3 D_3*(2861)	2861,8	–	
1^3F_4 D_4*(3215)	3215,0	–	
1^3G_5 D_5*(3534)	3534,9	–	
2^3S_1 D_a*(2861)	2861,2	–	
3^3S_1 D_b*(3534)	3534,3	–	

В табл. 2, как и в табл. 1, состояния 1^3S_1, 1^3P_2, 1^3D_3, 1^3F_4, 1^3G_5 лежат на лидирующей (S = 1) траектории D*-мезона. Величина сильной связи (39) определяется массой глюона m_g и масштабным параметром Λ_{QCD} в КХД. Здесь имеем: m_g = 416 МэВ, Λ_{QCD} = 249 МэВ.

Наилучшее согласие с данными [1] достигается для приведенных в таблицах выше значениях параметров. Отметим, что в наших расчетах масса глюона m_g для обеих траекторий одна и та же, а массы d кварков близки по значению и соответствуют токовым кваркам. Массы u и $\boldsymbol{c}$ кварков также близки к их токовым значениям. Это говорит в пользу согласованности расчетов. Параметр обрезания в КХД Λ_{QCD} меньше для тяжелых мезонов, что также находится в согласии с предсказаниями других моделей.

Заключение. В настоящей работе выполнено исследование мезонов и их резонансов в рамках релятивистской кварковой модели, в котором использован модифицированный КХД-мотивированный потенциал типа воронки с бегущей «постоянной» сильной связи $\alpha_S(r)$, удовлетворяющей свойству асимптотической свободы. Потенциальный подход в описании адронов и резонансов может быть поставлен под сомнение, так как потенциал считается нерелятивистским понятием. Но успехи этого подхода в различных областях физики убеждают снова и снова пересмотреть такую точку зрения. Достаточно отметить замечательные успехи потенциального подхода в описании различных характеристик кваркониев и метода Редже в физике адронов высоких энергий, первоначально предложенного при решении задачи нерелятивистского потенциального рассеяния.

Потенциал взаимодействия в данном исследовании является лоренц-скаляром, т. е. аддитивен к массам частиц. Это значит, что составляющие связанную систему частицы рассматриваются как конституенты с координатной зависимостью массы, а динамическое уравнение имеет вид как для системы свободных частиц. Полученное ранее в [15] релятивистское волновое уравнение для связанного состояния системы двух частиц неравных масс решено аналитически асимптотическим методом в двух предельных случаях малых и больших расстояний. Мы нашли два асимптотических решения при $r \to 0$ и $r \to \infty$ в аналитическом виде для кулоновского и линейного членов потенциала взаимодействия соответственно.

В рамках схемы комплексных масс предложена комплексная интерполяционная массовая формула для кварк-антикварковой связанной системы. Полученная асимптотическая массовая формула позволила вычислить с хорошей точностью массы резонансов семейств ρ- и D^{0*}-мезонов. Параметр натяжения струны σ = 139 МэВ^2 как универсальный в физике адронов определен из фитирования данных для ρ-мезона и использован в расчете масс других мезонов. Развитый метод позволяет вычислить в рамках единого подхода не только массы резонансов, но также их ширины. Предложенный подход может быть использован не только в физике адронов для связанных состояний кварков и глюонов, но и для других двухчастичных систем.

Благодарности. Автор выражает благодарность заведующему Центром «Фундаментальных взаимодействий и астрофизики» Института физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, доктору физико-математических наук, доценту Ю. А. Курочкину за поддержку и важные замечания по работе.

Acknowledgements. The author would like to thank the head of the Center of Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr in Physics and Mathematics Yu. A. Kurochkin for support and important remarks on the work.

Список использованных источников

1. Review of Particle Physics / K. A. Olive [et al.] (Particle Data Group) // Chin. Phys. C. – 2014. – Vol. 38, № 9. – P. 090001. https://doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001

2. ATLAS: Technical proposal for a general-purpose pp experiment at the Large Hadron Collider at CERN, CERN-LHCC-94-43 / W. W. Armstrong [et al.]. – December, 1994. – 289 p.

3. Bhaduri, R. K. Models of the Nucleon (From Quark to Soliton) / R. K. Bhaduri. – New York: Addison-Wesley, 1988. – Chap. 2.

4. Morpurgo, G. Field theory and the nonrelativistic quark model: a parametrization of meson masses / G. Morpurgo // Phys. Rev. D. – 1990. – Vol. 41, № 9. – P. 2865–2870. https://doi.org/10.1103/physrevd.41.2865

5. Sergeenko, M. N. An Interpolating mass formula and Regge trajectories for light and heavy quarkonia / M. N. Sergeenko // Z. Phys. C. – 1994. – Vol. 64, № 2. – P. 315–322. https://doi.org/10.1007/bf01557404

6. Quarkonia and their transitions / E. Eichten [et al.] // Rev. Mod. Phys. – 2008. – Vol. 80, № 3. – P. 1161–1193. https://doi.org/10.1103/revmodphys.80.1161

7. Ebert, D. Spectroscopy and Regge trajectories of heavy quarkonia and B_c mesons / D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin // Eur. Phys. J. C. – 2011. – Vol. 71, № 12. – P. 1825. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1825-9

8. Sergeenko, M. N. Glueball masses and Regge trajectories for the QCD-inspired potential / M. N. Sergeenko // Eur. Phys. J. C. – 2012. – Vol. 72, № 8. – P. 2128. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2128-5

9. Sergeenko, M. N. Masses and widths of Resonances for the Cornell Potential / M. N. Sergeenko // Adv. HighEnerg. Phys. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–7. https://doi.org/10.1155/2013/325431

10. Коллинз, П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий / П. Коллинз. – М.: Атомиздат, 1980. – 432 с.

11. Sergeenko, M. N. Semiclassical wave equation and exactness of the WKB method / M. N. Sergeenko // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 53, № 6. – P. 3798–3804. https://doi.org/10.1103/physreva.53.3798

12. Sergeenko, M. N. Relativistic semiclassical wave equation and its solution / M. N. Sergeenko // Mod. Phys. Lett. A. – 1997. – Vol. 12, № 37. – P. 2859–2871. https://doi.org/10.1142/s0217732397002983

13. Salpeter, E. E. A Relativistic Equation for Bound-State Problems / E. E. Salpeter, H. A. Bethe // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84, № 6. – P. 1232–1241. https://doi.org/10.1103/physrev.84.1232

14. Salpeter, E. E. A Mass Corrections to the Fine Structure of Hydrogen-Like Atoms / E. E. Salpeter // Phys. Rev. – 1952. – Vol. 87, № 2. – P. 328–343. https://doi.org/10.1103/physrev.87.328

15. Todorov, I. T. Dynamics of Relativistic Point Particles as a Problem with Constraints / I. T. Todorov // Ann. Inst. H. Poincare. – 1978. – Vol. A28. – P. 207

16. Lucha, W. Instantaneous Bethe-Salpeter Kernel for the Lightest Pseuoscalar Mesons / W. Lucha, F. F. Schoberl // Phys. Rev. D. – 2016. – Vol. 93, № 9. – P. 096005–096014. https://doi.org/10.1103/physrevd.93.096005

17. Applications of Two Body Dirac Equations to Hadron and Positronium Spectroscopy / H. W. Crater [et al.] // Proc. of CST-MISC Joint Symp. on Particle Physics — from Spacetime Dynamics to Phenomenology. – Tokyo, 2014.https://doi.org/10.7566/jpscp.7.010002

18. Crater, H. W. Relativistic calculation of the meson spectrum: A fully covariant treatment versus standard treatments/ H. W. Crater, P. Van Alstine // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 70, № 3. – P. 034026. https://doi.org/10.1103/physrevd.70.034026

19. Crater, H. W. Applications of two-body Dirac equations to the meson spectrum with three versus two covariant interactions, SU(3) mixing, and comparison to a quasipotential approach / H. W. Crater, J. Schiermeyer // Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 82, № 9. – P. 094020 https://doi.org/10.1103/physrevd.82.094020

20. Constraint's Theory and Relativistic Dynamics: Proceedings of the Firenze Workshop / eds.: G. Longhi, L. Lusanna. – Singapore: World Scientific, 1987. – 351 p.

21. Bijtbier, J. 3D reduction of the three-fermion Bethe-Salpeter equation / J. Bijtbier // Few-Body Problems in Physics '98. – Springer, 1999. – P. 127–130. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6798-4_22

22. Bijtbier, J. Bound state equation for 4 or more relativistic particles / J. Bijtbier // Nucl. Phys. A. – 2002. – Vol. 703, № 1/2. – P. 327–345. https://doi.org/10.1016/s0375-9474(01)01341-0

23. Nakanishi, N. A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation / N. Nakanishi // Prog. Theor. Phys. Suppl. – 1969. – Vol. 43. – P. 1–81. https://doi.org/10.1143/ptps.43.1

24. Jallouli, H. Relativistic effects in the pionium lifetime / H. Jallouli, H. Sazdjian // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 58, № 1. – P. 014011. https://doi.org/10.1103/physrevd.58.014011

25. Hara, O. Extended Objects and Bound Systems; From Relativistic Description to Phenomenological Application / O. Hara, S. Ishida, S. Naka // Extended Objects and Bound Systems. – 1993. https://doi.org/10.1142/9789814536226

26. Brau, F. A mass formula for light mesons from a potential model / F. Brau, C. Semay // J. Phys. G. – 2002. – Vol. 28, № 11. – P. 2771–2781. https://doi.org/10.1088/0954-3899/28/11/303

27. Brau, F. Light meson spectra and instanton-induced forces / F. Brau, C. Semay // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 58, № 3. – P. 034015. https://doi.org/10.1103/physrevd.58.034015

28. Alba, D. Relativistic quantum mechanics and relativistic entanglement in the rest-frame instant form of dynamics / D. Alba, H. W. Crater, L. Lusanna // J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 52, № 6. – P. 062301. https://doi.org/10.1063/1.3591131

29. Semirelativistic Lagrange mesh calculations / C. Semay [et al.] // Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 64. № 1. – P. 016703. https://doi.org/10.1103/physreve.64.016703

30. Brau, F. The 3-dimensional Fourier grid Hamiltonian method / F. Brau, C. Semay // J. Comput. Phys. – 1998. – Vol. 139, № 1. – P. 127–136. https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5866

31. Fulcher, L. P. Matrix representation of the nonlocal kinetic energy operator, the spinless Salpeter equation and the Cornell potential / L. P. Fulcher // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 50, № 1. – P. 447–453. https://doi.org/10.1103/physrevd.50.447

32. Hall, R. L. Discrete Spectra of Semirelativistic Hamiltonians / R. L. Hall, W. Lucha, F. F. Schoberl // Int. J. Mod. Phys. A. – 2003. – Vol. 18, № 15. – P. 2657–2680. https://doi.org/10.1142/s0217751x0301406x

33. Semay, C. An upper bound for asymmetrical spinless Salpeter equations / C. Semay // Phys. Lett. A. – 2012. – Vol. 376, № 33. – P. 2217–2221. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2012.05.046

34. Currie, D. G. Relativistic Invariance and Hamiltonian Theories of Interacting Particles / D. G. Currie, T. F. Jordan, E. C. G. Sudarshan // Rev. Mod. Phys. – 1963. – Vol. 35, № 4. – P. 1032. https://doi.org/10.1103/revmodphys.35.1032.2

35. Alba, D. Hamiltonian relativistic two-body problem: center of mass and orbit reconstruction / D. Alba, H. W. Crater, L. Lusanna // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40, № 31. – P. 9585–9607. https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/31/029

36. Dirac, P. A. M. Forms of Relativistic Dynamics / P. A. M. Dirac // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, № 3. – P. 392–399. https://doi.org/10.1103/revmodphys.21.392

37. Силенко, А. Я. Феноменологическое описание взаимодействия релятивистских кварков при помощи уравнения Дирака с корнельским потенциалом / А. Я. Силенко, О. В. Теряев // Ядерная физика. – 2017. – Т. 80, № 5. – С. 573–580. https://doi.org/10.7868/s0044002717050233

38. Huang, Y.-S. Schredinger-Like Relativistic Wave Equation of Motion for the Lorentz-Scalar Potential / Y.-S. Huang // Found. Phys. – 2001. – Vol. 31, № 9. – P. 1287–1298. https://doi.org/10.1023/a:1012270110871

39. Bhaduri, R. K. Models of the Nucleon (From Quark to Soliton) / R. K. Bhaduri. – New York: Addison-Wesley, 1988. – Chap. 2.

40. Томильчик, Л. М. Эффекты конфайнмента кварков в конформно-плоской фоновой метрике / Л. М. Томильчик // Ковариантные методы в теоретической физике – Физика элементарных частиц и теория относительности. – Минск, 2001. – Вып. 5. – С. 155–161.

41. Горбацевич, А. К. Уравнение движения частиц в конформно плоском пространстве и удержание кварков / А. К. Горбацевич, Л. М. Томильчик // Проблемы физики высоких энергий в теории поля, Протвино, 7–13 июля 1986 г. – М., 1987. – С. 378–383.

42. Сергеенко, М. Н. Релятивистская модель мезонов с координатно-зависимой массой кварков / М. Н. Сергеенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 4. – С. 39–45.

43. Sergeenko, M. N. Complex Masses of Mesons and Resonances in Relativistic Quantum Mechanics / M. N. Sergeenko // Nonlin. Dyn. Appl. – 2017. – Vol. 23. – P. 239–247.

44. Sergeenko, M. N. Light and Heavy Mesons in The Complex Mass Scheme / M. N. Sergeenko // Nonlin. Dyn. Appl. – 2019. – Vol. 25. – P. 209–216.

45. Byckling, E. Particle Kinematics / E. Byckling, K. Kajantie. – London [et al.]: John Wiley & Sons, 1972. – P. 20–27.

References

1. Olive K. A. Review of Particle Physics. Chinese Physics C, 2014, vol. 38, no. 9. pp. 090001. https://doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001

2. Armstrong W. W., Burris W., Gingrich D. M. *ATLAS: Technical proposal for a general-purpose pp experiment at the Large Hadron Collider at CERN, CERN-LHCC-94-43*. December, 1994. 289 p.

3. Bhaduri R. K. *Models of the Nucleon (From Quark to Soliton). Chap. 2*. New York, Addison-Wesley, 1988.

4. Morpurgo G. Field theory and the nonrelativistic quark model: a parametrization of meson masses. *Physical Review D*, 1990, vol. 41, no. 9, pp. 2865–2870. https://doi.org/10.1103/physrevd.41.2865

5. Sergeenko M. N. An Interpolating mass formula and Regge trajectories for light and heavy quarkonia. *Zeitschrift fur Physik C*, 1994, vol. 64, no. 2, pp. 315–322. https://doi.org/10.1007/bf01557404

6. Eichten E., Godfrey S., Mahlke H., Rosner J. L. Quarkonia and their transitions. *Reviews of Modern Physics*, 2008, vol. 80, no. 3, pp. 1161–1193. https://doi.org/10.1103/revmodphys.80.1161

7. Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O. Spectroscopy and Regge trajectories of heavy quarkonia and B_c mesons. *The European Physical Journal C*, 2011, vol. 71, no. 12, pp. 1825. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1825-9

8. Sergeenko M. N. Glueball masses and Regge trajectories for the QCD-inspired potential. *The European Physical Journal C*, 2012, vol. 72, no. 8, pp. 2128. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2128-5

9. Sergeenko M. N. Masses and widths of Resonances for the Cornell Potential. *Advances in High Energy Physics*, 2013, vol. 2013, pp. 1–7. https://doi.org/10.1155/2013/325431

10. Collins P. D. B. *An Introduction To Regge Theory & High Energy Physics*. Moscow, Atomizdat Publ., 1980. 432 p. (in Russian).

11. Sergeenko M. N. Semiclassical wave equation and exactness of the WKB method. *Physical Review A,* 1996, vol. 53, no. 6, pp. 3798–3804. https://doi.org/10.1103/physreva.53.3798

12. Sergeenko M. N. Relativistic semiclassical wave equation and its solution. *Modern Physics Letters A*, 1997, vol. 12, no. 37, pp. 2859–2871. https://doi.org/10.1142/s0217732397002983

13. Salpeter E. E., Bethe H. A. A Relativistic Equation for Bound-State Problems. *Physical Review*, 1951, vol. 84, no. 6, pp. 1232–1241. https://doi.org/10.1103/physrev.84.1232

14. Salpeter E. E. A Mass Corrections to the Fine Structure of Hydrogen-Like Atoms. *Physical Review*, 1952, vol. 87, no. 2, pp. 328–343. https://doi.org/10.1103/physrev.87.328

15. Todorov I. T. Dynamics of Relativistic Point Particles as a Problem with Constraints. *Annalesdel’ Institut Henri Poincaré D*, 1978, vol. A28, pp. 207

16. Lucha W., Schoberl F. F. Instantaneous Bethe-Salpeter Kernel for the Lightest Pseuoscalar Mesons. *Physical Review D*, 2016, vol. 93, no. 9, pp. 096005–096014. https://doi.org/10.1103/physrevd.93.096005

17. Crater H. W., Schiermeyer J., Whitney J., Cheuk-Yin Wong. Applications of Two Body Dirac Equations to Hadron and Positronium Spectroscopy *Proceedings of CST-MISC Joint Symposium on Particle Physics — from Spacetime Dynamics to Phenomenology*. Tokyo, 2014. https://doi.org/10.7566/jpscp.7.010002

18. Crater H. W., Van Alstine P. Relativistic calculation of the meson spectrum: A fully covariant treatment versus standard treatments. *Physical Review D*, 2004, vol. 70, no. 3, pp. 034026. https://doi.org/10.1103/physrevd.70.034026

19. Crater H. W., Schiermeyer J. Applications of two-body Dirac equations to the meson spectrum with three versus two covariant interactions, SU(3) mixing, and comparison to a quasipotential approach. *Physical Review D*, 2010, vol. 82, no. 9, pp. 094020. https://doi.org/10.1103/physrevd.82.094020

20. Longhi G., Lusanna L. (eds.) *Constraint's Theory and Relativistic Dynamics. Proceedings of the Firenze Workshop*. Singapore, World Scientific, 1987. 351 p.

21. Bijtbier J. 3D reduction of the three-fermion Bethe-Salpeter equation. *Few-Body Problems in Physics '98*. Springer, 1999, pp. 127–130. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6798-4_22

22. Bijtbier J. Bound state equation for 4 or more relativistic particles. *Nuclear Physics A*, 2002, vol. 703, no. 1–2, pp. 327–345.https://doi.org/10.1016/s0375-9474(01)01341-0

23. Nakanishi N. A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 1969, vol. 43, pp. 1–81. https://doi.org/10.1143/ptps.43.1

24. Jallouli H., Sazdjian H. Relativistic effects in the pionium lifetime. *Physical Review D*, 1998, vol. 58, no. 1, pp. 014011. https://doi.org/10.1103/physrevd.58.014011

25. Hara O., Ishida S., Naka S. Extended Objects and Bound Systems; From Relativistic Description to Phenomenological Application. *Extended Objects and Bound Systems*. 1993. https://doi.org/10.1142/9789814536226

26. Brau F., Semay C. A mass formula for light mesons from a potential model. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics,* 2002, vol. 28, no. 11, pp. 2771–2781. https://doi.org/10.1088/0954-3899/28/11/303

27. Brau F., Semay C. Light meson spectra and instanton-induced forces. *Physical Review D*, 1998, vol. 58, no. 3, pp. 034015. https://doi.org/10.1103/physrevd.58.034015

28. Alba D., Crater H. W., Lusanna L. Relativistic quantum mechanics and relativistic entanglement in the rest-frame instant form of dynamics. *Journal of Mathematics and Physics*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 062301. https://doi.org/10.1063/1.3591131

29. Semay C., Baye D., Hesse M., Silvestre-Brac B. Semirelativistic Lagrange mesh calculations. *Physical Review E*, 2001, vol. 64.no. 1, pp. 016703. https://doi.org/10.1103/physreve.64.016703

30. Brau F., Semay C. The 3-dimensional Fourier grid Hamiltonian method. *Journal of Computational Physics,* 1998, vol. 139, no. 1, pp. 127–136. https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5866

31. Fulcher L. P. Matrix representation of the nonlocal kinetic energy operator, the spinless Salpeter equation and the Cornell potential. *Physical Review D*, 1994, vol. 50, no. 1, pp. 447–453. https://doi.org/10.1103/physrevd.50.447

32. Hall R. L., Lucha W., Schoberl F. F. Discrete Spectra of Semirelativistic Hamiltonians. *International Journal of Modern Physics A,* 2003, vol. 18, no. 15, pp. 2657–2680. https://doi.org/10.1142/s0217751x0301406x

33. Semay C. An upper bound for asymmetrical spinless Salpeter equations. *Physics Letters A,* 2012, vol. 376, no. 33, pp. 2217–2221. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2012.05.046

34. Currie D. G., Jordan T. F., Sudarshan E. C. G. Relativistic Invariance and Hamiltonian Theories of Interacting Particles. *Reviews of Modern Physics*, 1963, vol. 35, no. 4, pp. 1032. https://doi.org/10.1103/revmodphys.35.1032.2

35. Alba D., Crater H. W., Lusanna L. Hamiltonian relativistic two-body problem: center of mass and orbit reconstruction. *Journal of Physics A*, 2007, vol. 40, no. 31, pp. 9585–9607. https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/31/029

36. Dirac P. A. M. Forms of Relativistic Dynamics. *Reviews of Modern Physics,*1949, vol. 21, no. 3, pp. 392–399. https://doi.org/10.1103/revmodphys.21.392

37. Silenko A. Ya., Teriayev O. V. Phenomenological Description of Relativistic Quarks with the Help of Dirac equation for the Cornell Potential. *Yadernaya Fizika = Nuclear Physics*, 2017, vol. 80, no. 5, pp. 573–580 (in Russian). https://doi.org/10.7868/s0044002717050233

38. Huang Y.-S. Schredinger-Like Relativistic Wave Equation of Motion for the Lorentz-Scalar Potential. *Foundations of Physics*, 2001, vol. 31, no. 9, pp. 1287–1298. doihttps://doi.org/10.1023/a:1012270110871

39. Bhaduri R. K. *Models of the Nucleon (From Quark to Soliton). Chap. 2.* NewYork, Addison-Wesley, 1988.

40. Tomil'chik L. M. Effects of Quark Confinement in Conformally flat background metric. *Kovariantnye metody v teoeticheskoy fizike – fizika elementarnykhc hastist i teoriya otnositel'nosti* [Covariant Methods in Theoretical Physics – Physics of Elementary Particles and Theory of Relativity]. Minsk, 2001, iss. 5, pp. 155–161 (in Russian).

41. Gorbatsevich A. K., Tomil'chik L. M. Equation of Particle Motion in Conformally Flat Space and Quark Confinement. *Problemy fiziki vysokikh energiy v teorii polia, Protvino, 7–13 iyulya 1986 g.* [Problems of high-energy physics in field theory, Protvino, July 7–13, 1986]. Moscow, 1987, pp. 378–383 (in Russian).

42. Sergeenko M. N. Relativistic model of mesons with the coordinate-dependent quark mass. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 39–45 (in Russian).

43. Sergeenko M. N. Complex Masses of Mesons and Resonances in Relativistic Quantum Mechanics. *Nonlinear Dynamisc and Applications*, 2017, vol. 23, pp. 239–247.

44. Sergeenko M. N. Light and Heavy Mesons in The Complex Mass Scheme. *Nonlinear Dynamisc and Applications*, 2019, vol. 25, pp. 209–216.

45. Byckling E., KajantieK. *Particle Kinematics*. London, John Wiley & Sons, 1972, pp. 20–27.

Приложение

В релятивистской кинематике энергии и импульсы частиц могут быть записаны в терминах инвариантов, таких как массы частиц и квадрат массы двух частиц (первый инвариант Мандельштама) [45]:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 = [(E_1)^* + (E_2)^*]^2, \tag{П1}$$

где p_1 и p_2 – 4-импульсы частиц. Импульс и энергия частицы 1 в лабораторной (L) и системе центра инерции (СЦИ, которую отметим значком *) записываются так [45]:

$$\left|\mathbf{p}_1^L\right| = \frac{1}{2m_2}\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1, m_2), \quad E_1^L = \frac{1}{2m_2}\left(s - m_1^2 - m_2^2\right), \tag{П2}$$

$$\left|\mathbf{p}_1^*\right| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1, m_2), \quad E_1^* = \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(s + m_1^2 - m_2^2\right), \tag{П3}$$

где введена *главная кинематическая функция* (треугольника)

$$\lambda(s, m_1, m_2) = \left[s - (m_1 - m_2)^2\right]\left[s - (m_1 + m_2)^2\right]. \tag{П4}$$

Для (П2) и (П3) справедливо соотношение

$$\left(E_1^L\right)^2 - \left(\mathbf{p}_1^L\right)^2 = m_1^2 = \left(E_1^*\right)^2 - \left(\mathbf{p}_1^*\right)^2. \tag{П5}$$

Импульсы частицы 1 (П2) и (П3) выражены через релятивистские инварианты, но они различны. Может возникнуть вопрос (что часто имеет место), почему импульс $\boldsymbol{p}_1$ в L-системе (П2) отличается от $\boldsymbol{p}_1$ в СЦИ (П3), хотя оба выражены через инварианты? Этот вопрос снимается, если учесть, что импульс (П2) записан в L-системе относительно покоящейся частицы 2, а импульс (П3) выражен относительно СЦИ. Поэтому импульс (П2) надо выражать не относительно частицы 2 в L-системе, а относительно СЦИ, которая движется.

Покажем, что $|\mathbf{p}_1|$ есть релятивистский инвариант в СЦИ. Для этого разложим $\mathbf{p}_1$ на две составляющих – поперечную и продольную: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{1\perp} + \mathbf{p}_{1\|}$. Продольная компонента определена как проекция $\mathbf{p}_1$ на *направление движения системы* частиц и равна нулю в СЦИ. Напомним, что в релятивистской кинематике используются следующие обозначения ($\hbar = c = 1$):

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}, \quad \gamma = \frac{E}{m}, \quad \gamma\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad m = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2}, \tag{П6}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость частицы, $\gamma = 1/[1 - \beta^2]^{1/2}$ – гамма-фактор, $\beta = v/c$. В случае двух частиц СЦИ движется со скоростью $\mathbf{v}^c$, а величины (П6) принимают вид

$$\mathbf{v}^c = \frac{\mathbf{p}_1^L}{E_1^L + m^2}, \quad \gamma^c = \frac{E_1^L + m_2}{\sqrt{s}}, \quad \gamma^c\mathbf{v}^c = \frac{\mathbf{p}_1^L}{\sqrt{s}}, \quad m = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2}. \tag{П7}$$

Преобразование Лоренца относительного импульса (П2) из L-системы в СЦИ имеет вид

$$\left(\mathbf{p}_1^L\right)^* = \gamma^c\left(\mathbf{p}_1^L - \mathbf{v}^c E_1^L\right). \tag{П8}$$

Из выражений (П2) и (П3) для $\boldsymbol{p}_1$ следует

$$\sqrt{s}\left|\mathbf{p}_1^*\right| = m_2\left|\mathbf{p}_1^L\right|. \tag{П9}$$

Подставляя выражения (П7) в (П8), получаем

$$\left(\mathbf{p}_1^L\right)^* = \frac{E_1^L + m_2}{\sqrt{s}}\mathbf{p}_1^L - \frac{\mathbf{p}_1^L}{\sqrt{s}}E_1^L \equiv \frac{m_2}{\sqrt{s}}\mathbf{p}_1^L, \qquad (\text{П}10)$$

что совпадает с относительным импульсом (П8) в СЦИ. Отметим, что инвариантной величиной является *поперечная составляющая* относительного импульса: $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_{1\perp}|$ или $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_{1\perp}^2$. Поэтому для относительного 4-импульса в СЦИ имеем: $p_\perp^\mu = (0, \mathbf{p})$ (см. раздел 1). Масса M движущейся системы изменяется в соответствии с формулой Эйнштейна M = γ^cM$_0$, где M$_0$ = $\sqrt{s}$. В направлении движения изменяются массы и относительный импульс частиц.

Информация об авторе

Сергеенко Михаил Николаевич – доктор физико-математических наук, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Республика Беларусь). E-mail: msergeen@mail.ru

Information about the author

Mikhail N. Sergeenko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: msergeen@mail.ru