

УДК 517.925.7

Е. В. ГРИЦУК, В. И. ГРОМАК

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 21.03.2014)

Введение. Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения. Первые исследования в этом направлении связаны с классификацией Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–7]. Задача нахождения условий наличия свойства Пенлеве может рассматриваться и для ОДУ высших порядков, однако в настоящее время нет полной классификации таких уравнений. Уравнения Пенлеве естественно возникают из симметричных редукций интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными. При таком подходе возможно построение иерархий ОДУ высших порядков Пенлеве-типа, что, в частности, явилось одной из причин возобновления интереса к уравнениям Пенлеве-типа и появлением гипотезы Абловица и др. [8], согласно которой все симметричные редукции интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными есть ОДУ Пенлеве-типа. В работах [9, 10] рассмотрены аналитические свойства решений уравнений 4-го и 6-го порядков иерархии K_2 [11], связанной со вторым уравнением Пенлеве. В настоящей работе исследуются аналитические свойства решений уравнений иерархии K_2 произвольного порядка.

1. Структура уравнений иерархии K_2 . Иерархия уравнений K_2 может быть представлена в виде [11]

$$\left(\frac{d}{dz} + w\right)H_n\left(w' - \frac{1}{2}w^2\right) - zw + \beta = 0, \quad (K_2)$$

где последовательность операторов H_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} H_{n+2}(w) &= J(w)\Omega(w)H_n(w), \\ H_0(w) &= 1, H_1(w) = w'' + 4w^2, n = 0, 1, 2, \dots, \\ \Omega(w) &= D^3 + 2wD + w_z, \\ J(w) &= D^3 + 3(wD + Dw) + 2(D^2wD^{-1} + D^{-1}wD^2) + 8(w^2D^{-1} + D^{-1}w^2), \\ D &= \frac{d}{dz}, D^{-1} = \int(\cdot)dz. \end{aligned} \quad (1)$$

Для $n = 1$ и $n = 2$ соответственно имеем

$$w^{(4)} + w^5 + 5w'w'' - 5w^2w''' - 5w(w')^2 - zw + \beta = 0, \quad ({}_4K_2)$$

$$\begin{aligned} w^{(6)} - \frac{4}{3}w^7 - w\left(\frac{28}{3}(w')^3 + 21(w'')^2 + 28w'w^{(3)}\right) + 7w'w^{(4)} - 14w^2w'w'' - \\ - 7w^2w^{(4)} + 14w''w^{(3)} - 28w''(w')^2 + 14w^4w''' + 28w^3(w')^2 - zw + \beta = 0. \end{aligned} \quad ({}_6K_2)$$

Заметим также, что если $H_n(u) = u$, то уравнение (K_2) эквивалентно второму уравнению Пенлеве в виде $w'' - (w)^3 / 2 - zw + \beta = 0$.

Т е о р е м а 1. Уравнение (K_2) , $n \geq 2$, в явной форме представимо в виде

$$w_{3n+s} + \gamma_{3n+s} w_0^{3n+s+1} + Q_{3n+s-1}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-2}) - zw + \beta = 0, \quad (2)$$

где $w_m := \frac{d^m w}{dz^m}$, $m = 0, 1, \dots, 3n+s$, Q_{3n+s-1} – полином от $w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-1}$ степени $3n+s-1$, вида

$$Q_{3n+s-1}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-1}) := \sum_{\substack{\langle k \rangle = 3n+s+1 \\ k_0 \leq 3n+s-2}} b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-2}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-2}^{k_{3n+s-2}}. \quad (3)$$

Через k обозначен мультииндекс $k = (k_0, k_1, \dots, k_{3n+s-2})$ с нормой

$$\langle k \rangle := \sum_{p=0}^{3n+s-2} (p+1)k_p, \quad (4)$$

$b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-2}}$ – константы, и

$$\gamma_{3n+s} = \alpha_{4s+4} \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{3n+s}{2}} \frac{n+s-4}{2} \prod_{j=0}^{n+s-4} \frac{2^5 (3n+s-5-6j)(3n+s-2-6j)}{(3n+s-4-6j)(3n+s-6j)}, \quad (5)$$

где $s = 0$ при четном n и $s = 1$ при нечетном n , $\alpha_4 = 32/3$, $\alpha_8 = 256/3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся представлением оператора $H_n(w)$ из работы [12]:

$$H_n(w_0) = w_{3n+s-2} + \gamma_{3n+s-2} w_0^{(3n+s)/2} + P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4}), \quad (6)$$

$$P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4}) := \sum_{\substack{\langle k \rangle = 3n+s \\ k_0 \leq (3n+s-4)/2}} b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-4}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}}.$$

В формуле (6) сделаем подстановку

$$w_0 \rightarrow w_1 - \frac{1}{2} w_0^2. \quad (7)$$

Получаем

$$H_n \left(w_1 - \frac{1}{2} w_0^2 \right) = w_{3n+s-1} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{3n+s}{2}} \gamma_{3n+s-2} w_0^{3n+s} + \dots$$

Тогда

$$\left(\frac{d}{dz} + w_0 \right) H_n \left(w_1 - \frac{1}{2} w_0^2 \right) = w_{3n+s} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{3n+s}{2}} \gamma_{3n+s-2} w_0^{3n+s+1} + Q_{3n+s-1}.$$

Выясним, как изменяются полином $P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4})$ и ограничения на мультииндекс k в результате подстановки (7).

Пусть моном $w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}}$ дает наивысшую степень полинома $P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4})$, т. е. $k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-4} = (3n+s-2)/2$. Согласно подстановке (7), получаем

$$w_0 \rightarrow -\frac{1}{2} w_0^2 + w_1, \quad w_1 \rightarrow -w_0 w_1 + w_2, \dots, \quad w_j \rightarrow -w_0 w_j - (\dots) + w_{j+1}, \quad j = 2, 3, \dots, 3n+s-4.$$

Тогда

$$w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}} \rightarrow \left(-\frac{1}{2} \right)^{k_0} (-w_0)^{k_0+k_1+\dots+k_{3n+s-4}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}} + \tilde{Q}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-3}).$$

Наивысшая степень мономов в первом слагаемом последней суммы равна $2(k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-4}) = 3n+s-2$. Под действием оператора $\left(\frac{d}{dz} + w_0 \right)$ степень увеличивается на единицу и равна $3n+s-1$, а порядок дифференцирования становится равным $3n+s-2$. Значит, степень полинома Q_{3n+s-1} , если и окажется выше, то не за счет слагаемых полинома $P_{(3n+s-2)/2}$.

Убедимся, что и второе слагаемое из (6) не может дать моном степени выше $3n + s - 1$. Действительно,

$$\left(w_1 - \frac{1}{2}w_0^2\right)^{\frac{3n+s}{2}} = \sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}} C_{\frac{3n+s}{2}}^l \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}} w_0^{3n+s-2l} w_1^l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + w_0\right) \left(w_1 - \frac{1}{2}w_0^2\right)^{\frac{3n+s}{2}} &= \sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}} C_{\frac{3n+s}{2}}^l \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}} w_0^{3n+s-2l+1} w_1^l + \\ &+ \sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}} C_{\frac{3n+s}{2}}^l \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}} \left((3n+s-2l)w_0^{3n+s-2l-1} w_1^{l+1} + l w_0^{3n+s-2l} w_1^{l-1} w_2\right). \end{aligned}$$

Мономы первой суммы имеют степень $3n + s + l - 1 \leq 3n + s - 1$, при $l \geq 2$. Поэтому следует рассмотреть мономы лишь для случаев $l = 0, 1$. Первый тип мономов из второй суммы имеет степень $3n + s - l \leq 3n + s - 1$, при $l \geq 1$. Поэтому следует рассмотреть мономы лишь для случая $l = 0$. Второй тип мономов из второй суммы имеет степень $3n + s - l \leq 3n + s - 1$, при $l \geq 1$. Но при $l = 0$ он отсутствует, поэтому дополнительных исследований здесь не требуется. Итак, рассмотрим случай $l = 0$ для первой суммы. Получаем моном w_0^{3n+s+1} , он выписан в формуле (2) с коэффициентом γ_{3n+s} и, следовательно, не входит в полином (3). Теперь рассмотрим случай $l = 1$ для первой суммы и $l = 0$ для второй. В этом случае имеем моном $w_0^{3n+s-1} w_1$ с коэффициентом $C_{\frac{3n+s}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2}{2}} + (3n+s) \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s}{2}} = 0$. Таким образом, степень полинома Q_{3n+s-1} не превосходит $3n + s - 1$. Далее, умножая неравенство на k_0 из (6) на 2 и учитывая, что степень множителя w_0 равна 1, получаем ограничение $k_0 \leq 3n + s - 3 < 3n + s - 2$. При этом моном $w_0^{3n+s-1} w_1$, получаемый из второго слагаемого формулы (6), как показано выше, имеет коэффициент, равный нулю. Значит, степень $k_0 \leq 3n + s - 2$. Теорема 1 доказана.

2. Порядок подвижного полюса решения уравнения (K_2) .

Л е м м а 1. Если решение уравнения (K_2) имеет подвижный полюс, то только первого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (2) произведем замену $w \sim a_0 (z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (2) являются старшая производная и либо слагаемые полинома (3), либо моном $\gamma_{3n+s} w_0^{3n+s+1}$. В первом случае имеем условие $q + 3n + s = qk_0 + (q + 1)k_1 + \dots + (q + 3n + s - 2)k_{3n+s-2}$, которое с учетом (4) преобразуется в $q + 3n + s = (q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-2}) + \langle k \rangle$. Так как $\langle k \rangle = 3n + s + 1$, то имеем $(q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-2} - 1) = 0$. Условие $k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-2} = 1$ вступает в противоречие с ограничением $\langle k \rangle = 3n + s + 1$. Значит, $q = 1$. Во втором случае имеем условие $q + 3n + s = q(3n + s + 1)$. Откуда также находим $q = 1$. Лемма доказана.

Заметим, что утверждение леммы 1 реализуется, в частности, для рациональных решений. Для уравнений $({}_4K_2)$ и $({}_6K_2)$ критерий существования рациональных решений получен в работах [9, 10]. Более общие случаи рассмотрены в статье [13].

3. Исследование решения уравнения (K_2) , $n \geq 2$, в окрестности подвижного полюса.

Применим метод резонансов для определения номеров коэффициентов a_j , которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении решения

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j-1}, \quad t = z - z_0 \quad (8)$$

уравнения порядка $3n + s$ иерархии K_2 в окрестности подвижного полюса z_0 , $z_0 \in \mathbb{C}$. Произведем замену

$$w \sim a_0 t^{-1} + \beta t^{-1}, \quad (9)$$

тогда

$$w' - \frac{1}{2}w^2 \sim c_0 t^{-2} + \beta(r-1-a_0)t^{r-2}, \quad c_0 = -\frac{1}{2}(a_0^2 + 2a_0),$$

$$H_n \left(w' - \frac{1}{2}w^2 \right) \sim L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)t^{-3n-s} + \beta(r-1-a_0)R_{3n+s-2}(r, c_0)t^{r-3n-s},$$

$$\left(\frac{d}{dz} + w \right) H_n \left(w' - \frac{1}{2}w^2 \right) \sim (a_0 - 3n - s)L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)t^{-3n-s-1} + \beta\tau_{3n+s}(r, a_0)t^{r-3n-s-1},$$

где резонансный многочлен

$$\tau_{3n+s}(r, a_0) = (r-1-a_0)(r-3n-s+a_0)R_{3n+s-2}(r, c_0) + L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0), \quad (10)$$

а $L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)$ определяется в [12] рекуррентными формулами

$$L_0(0, c_0) = 1,$$

$$L_{j+1}(0, c_0) = \frac{2(3j+2)(6j+1)}{3(j+1)(3j+1)} (2c_0 + 36j^2 + 48j + 15)(2c_0 + 36j^2 + 12j)(2c_0 + 9j^2 + 12j + 3)L_j(0, c_0), \quad (11)$$

в случае четного n ;

$$L_0(1, c_0) = 2c_0(2c_0 + 3),$$

$$L_{j+1}(1, c_0) = \frac{2(3j+4)(6j+5)}{3(j+1)(3j+5)} (2c_0 + 36j^2 + 96j + 63)(2c_0 + 36j^2 + 60j + 24)(2c_0 + 9j^2 + 24j + 15)L_j(1, c_0), \quad (12)$$

в случае нечетного n ; $R_{3n+s-2}(r, c_0)$ – резонансный многочлен соответствующего уравнения иерархии K_1 . С учетом определения c_0 справедлива

Л е м м а 2. Для четных n коэффициент a_0 определяется из условия

$$(a_0 - 3n) \prod_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} (a_0 - 6j - 3)(a_0 - 3j - 1)(a_0 + 6j + 5)(a_0 + 6j + 2)(a_0 + 3j + 3)(a_0 - 6j) = 0, \quad (13)$$

для нечетных n коэффициент a_0 определяется из условия

$$(a_0 - 1)(a_0 + 2)(a_0 + 3)(a_0 - 3n - 1) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} (a_0 - 3j - 3)(a_0 - 6j - 4)(a_0 - 6j - 7)(a_0 + 3j + 5)(a_0 + 6j + 6)(a_0 + 6j + 9) = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим случай четных n , т. е. $s = 0$. Из уравнения (13) следует, что имеем семь типов коэффициентов a_0 . Произведем в уравнении (K_2) подстановку (9). Тогда коэффициент при βt^{r-3n-1} определяет резонансный многочлен $\tau_{3n}(a_0(l), r)$. Последовательно имеем следующие резонансные многочлены.

Для первого типа из (9):

$$a_0^{(1)}(l) = 6l + 3, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, \quad n = 2, 4, 6, \dots,$$

$$\tau_{3n}(a_0^{(1)}(l), r) = (r+1)(r+5)(r-3n-2)(r-6l-4)(r-3n-6)(r-3n+6l+3) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-6l-3n-12)(r-6j-3n-12)(r-6j-3n-8)(r+6j+7)(r+12j+11)(r+12j+17) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-7)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-10)(r-6i-12l-11). \quad (15)$$

Для второго типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(2)}(l) &= 3l + 1, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(2)}(l), r) &= (r+1)(r-3)(r-4)(r-3l-2)(r-3n+3l+1)(r-3n-6l-2) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-3j-3n-3)(r-6j-3n-2)(r-6j-9)(r-6j-10)(r+3j+2)(r+6j+7) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-6)(r-6i-3l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-3l-8)(r-6i-6l-9)(r-6i-6l-10). \quad (16)
\end{aligned}$$

Для третьего типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(3)}(l) &= -6l - 5, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(3)}(l), r) &= (r+1)(r+5)(r-3n-6l-5)(r+6l+4)(r-3n-12-6)(r-3n-6l-2) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-2)(r-12j-3n-6)(r-12j-3n-12)(r+6j+7)(r+12j+11)(r+12j+17) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-10)(r-6i-12l-11). \quad (17)
\end{aligned}$$

Для четвертого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(4)}(l) &= -6l - 2, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(4)}(l), r) &= (r+6l+1)(r-3n+2)(r-3n-6l-2)(r-3n-6l+1) \times \\
&\times (r-3n+6l+3)(r-3n+12l+4) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-6l-6)(r-6j-3n-6)(r-6j-3n-2)(r+6j+1)(r+12j+11)(r+12j+5) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-4)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7). \quad (18)
\end{aligned}$$

Для пятого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(5)}(l) &= -3l - 3, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(5)}(l), r) &= (r+1)(r-3)(r-4)(r-3n-6l-2)(r+3l+2)(r-3n-3l-3) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n+6l-4)(r-6j-3n+6l-3)(r-6j-3n-2)(r+3j+2)(r-3j-3n-3)(r+6j+7) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-6)(r-6i-9)(r-6i-10)(r-6i-6l-7)(r-6i-3l-8)(r-6i-3l-5). \quad (19)
\end{aligned}$$

Для шестого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(6)}(l) &= 6l, l = 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 4, 6, 8, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(6)}(l), r) &= (r+1)(r+5)(r+11)(r-6l-1)(r+6l-2)(r-3n+6l)(r-3n+2) \times \\
&\times (r-3n-2)(r-3n-6l+1)(r-3n+6l+3)(r-3n-6)(r-3n-12) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-2} (r-6j-3n-8)(r-6j-3n-18)(r-6j-3n-6l-12)(r+6j+7)(r+12j+17)(r+12j+23) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-4)(r-6i+6l-8). \quad (20)
\end{aligned}$$

Для седьмого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(7)}(l) &= 3n, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(7)}(l), r) &= (r+1)(r+5)(r+11)(r-3n-12)(r-3n-2)(r-3n-6) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{\frac{n-4}{2}} (r+6j+7)(r+12j+17)(r+12j+23)(r-3n-12j-24)(r-3n-12j-18)(r-3n-6j-8). \quad (21)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай нечетных n , т. е. $s = 1$. Из уравнения (14) следует, что имеем 10 типов коэффициентов a_0 . Произведем в формуле (K_2) подстановку (9), тогда при βt^{r-3n-2} выделяем резонансный многочлен $\tau_{3n+1}(a_0(l), r)$. В этом случае имеем следующие резонансные многочлены.

Для первого типа из (10):

$$a_0^{(1)} = 3l + 3, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots,$$

$$\tau_{3n+1}(a_0^{(1)}, r) = (r+1)(r+5)(r-2)(r-3)(r-8)(r-9)(r-3l-4) \times$$

$$\times (r-3n+3l+2)(r-3n-3)(r-3n-7) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-13)(r-3j-3n-6)(r-6j-3n+6l-6)(r+3j+4)(r-6j-3n+6l-5)(r+6j+11) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-4)(r-6i+6l-8). \quad (22)$$

Для второго типа:

$$a_0^{(2)}(l) = 6l + 4, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots,$$

$$\tau_{3n+1}(a_0^{(2)}, r) = (r+1)(r+7)(r+6l+2)(r-3n+1)(r-3n-3)(r-3n+6l+6)(r-6l-5) \times$$

$$\times (r-3n+6l+3)(r-3n-6l-4)(r-3n-9) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-12j-3n-21)(r-12j-3n-15)(r-6j-3n-7)(r+6j+5)(r+12j+13)(r+12j+19) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-8)(r-6i+6l-4)(r-6i-6l-11)(r-6i-12l-13). \quad (23)$$

Для третьего типа:

$$a_0^{(3)}(l) = 6l + 7, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots,$$

$$\tau_{3n+1}(a_0^{(3)}, r) = (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r-3n-7)(r-3n-9)(r-3n-15) \times$$

$$\times (r-3n+6l+6)(r-6l-8)(r-3n-3) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-12j-3n-27)(r-12j-3n-21)(r-6j-3n-13)(r+6j+11)(r+12j+19)(r+12j+25) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-11)(r-6i-6l-14)(r-6i-12l-19)(r-6i+6l+2). \quad (24)$$

Для четвертого типа:

$$a_0^{(4)}(l) = -3l - 5, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots,$$

$$\tau_{3n+1}(a_0^{(4)}, r) = (r+1)(r+5)(r-3n-7)(r-3n-3)(r-3n+6l+7)(r-3n+6l+6) \times$$

$$\times (r-3n+6l+1)(r-3n+6l-3)(r+3l+4)(r-3n-3l-6) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-13)(r-3j-3n-6)(r-6j-3n+6l-5)(r+3j+4)(r-3n-6j+6l-6)(r+6j+11) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-2)(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-3l-10)(r-6i-3l-7)(r-6i-3l-11). \quad (25)$$

Для пятого типа:

$$a_0^{(5)}(l) = -6l - 6, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots,$$

$$\tau_{3n+1}(a_0^{(5)}, r) = (r+1)(r+7)(r-3n-3)(r-3n+1)(r-3n-6l-9)(r-3n-6l-4) \times$$

$$\times (r-3n+6l+6)(r-3n-6l-7)(r+6l+5)(r+6l+2) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-6l-15)(r-6j-3n-9)(r-6j-3n-7)(r+6j+5)(r+12j+13)(r+12j+19) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-8)(r-6i-6l-11)(r-6i-12l-13)(r-6i+6l-4). \quad (26)$$

Для шестого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(6)}(l) &= -6l - 9, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(6)}, r) &= (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r-3n-6l-10)(r-3n-15) \times \\
 &\quad \times (r-3n-9)(r-3n-7)(r-3n-3)(r+6l+8) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{l-1} (r-12j-3n-27)(r-12j-3n-21)(r-6j-3n-13)(r+6j+11)(r+12j+19)(r+12j+25) \times \\
 &\quad \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-11)(r-6i+6l+2)(r-6i-12l-19)(r-6i-6l-14). \quad (27)
 \end{aligned}$$

Для седьмого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(7)} &= -3, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(7)}, r) &= (r+1)(r+2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-12)(r-3n-4) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r-6j-9)(r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-18). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Для восьмого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(8)} &= -2, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(8)}, r) &= (r+1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-9)(r-3n-3) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-12)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-15). \quad (29)
 \end{aligned}$$

Для девятого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(9)} &= 1, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(9)}, r) &= (r+1)(r+2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-12)(r-3n) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r-6j-9)(r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-18). \quad (30)
 \end{aligned}$$

Для десятого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(10)} &= 3n + 1, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(10)}, r) &= (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r+19)(r-3n-3)(r-3n-7) \times \\
 &\quad \times (r-3n-9)(r-3n-15)(r-3n-21) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r+6j+11)(r+12j+31)(r+12j+25)(r-3n-12j-33) \times \\
 &\quad \times (r-3n-12j-27)(r-3n-6j-13). \quad (31)
 \end{aligned}$$

Резонансные многочлены $\tau_{3n}(1, r)$ и $\tau_{3n+1}(-2, r)$ имеют соответственно $3n - 1$ и $3n$ целых положительных корней. Также можно убедиться, что при указанных ограничениях на i, j, l, n корни каждого из многочленов (15)–(31) целые и однократные. Относительно всех резонансных многочленов уравнения (K_2) во всех случаях справедлива

Т е о р е м а 2. *Резонансные многочлены уравнения (K_2) имеют только целые и однократные корни.*

Заметим, что из характера корней резонансных многочленов следует, что уравнение (K_2) не проходит тест Пенлеве, так как одно из условий теста требует, чтобы для каждого баланса (a_0, q) существовал $m - 1$ целый положительный резонанс, где m – порядок уравнения [14]. Тем не менее уравнение (K_2) , так же как и уравнения иерархий $({}_2n P_1)$, $({}_2n P_2)$ и K_1 , проходит ослабленный тест

Пенлеве, в котором упомянутое условие заменяется на существование хотя бы одного баланса (a_0, q) , для которого вместе с резонансом -1 существует еще $m - 1$ целый положительный резонанс. Отметим также, что уравнение $({}_4P_1)$ имеет свойство Пенлеве [15].

Литература

1. Painleve' P. // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 201–261.
2. Painleve' P. // Acta Math. 1902. Vol. 25. P. 1–85.
3. Gambier B. // Acta Math. 1909. Vol. 33. P. 1–55.
4. Ince E. L. Ordinary Differential Equations. Dover; New York, 1956.
5. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
6. Громак В. И., Лукашевич Н. А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
7. Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 2004.
8. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М., 1987.
9. Громак В. И. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1017–1026.
10. Громак В. И. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 172–180.
11. Кудряшов Н. А. // ТМФ. 2000. Т. 122. С. 72–87.
12. Грицук Е. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. 2011. № 4. С. 33–41.
13. N. A. Kudryashov // Physics Letters A. 2008. Vol. 372. P. 1945–1956.
14. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721.
15. Simomura S. // Nonlinearity. 2001. Vol. 14. P. 193–203.

E. V. GRYTSUK., V. I. GROMAK

ANALYTICAL PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE PENLEVE-TYPE NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The theorem of a general structure of equations in the K_2 hierarchy is proved. The order of movable poles of solutions is determined. The resonant polynomials are constructed in explicit form, and the character of their roots is determined.