ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 511.35,511.48,511.75 Поступила в редакцию 22.03.2021
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-135-147 Received 22.03.2021

Д. В. Коледа

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ, В КОТОРЫХ ПРОИЗВОДНАЯ ИХ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА МАЛА

Аннотация. Алгебраические числа – это корни многочленов с целыми коэффициентами. Каждое алгебраическое число α характеризуется своим минимальным многочленом P_α – многочленом наименьшей положительной степени с целыми взаимно простыми коэффициентами, для которого α является корнем. Степень этого многочлена называется степенью числа α, а максимум модулей коэффициентов – высотой числа α. В работе рассматривается распределение алгебраических чисел α, степень которых фиксирована, высота ограничена растущим параметром *Q*, а минимальный многочлен P_α таков, что абсолютное значение его производной $P'_\alpha(\alpha)$ ограничено заданной величиной *X*. Показано, что когда ограничение *X* на производную лежит в определенном диапазоне, при $Q \to +\infty$ такие алгебраические числа распределяются равномерно в отрезке $[-1+\sqrt{2/3}, 1-\sqrt{2/3}]$.

Ключевые слова: алгебраические числа, распределение алгебраических чисел, целочисленные многочлены, многочлены с малой производной в корне

Для цитирования. Коледа, Д. В. О вещественных алгебраических числах, в которых производная их минимального многочлена мала / Д. В. Коледа // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 135–147. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-135-147

Denis V. Koleda

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ON REAL ALGEBRAIC NUMBERS IN WHICH THE DERIVATIVE OF THEIR MINIMAL POLYNOMIAL IS SMALL

Abstract. Algebraic numbers are the roots of integer polynomials. Each algebraic number α is characterized by its minimal polynomial P_α that is a polynomial of minimal positive degree with integer coprime coefficients, α being its root. The degree of α is the degree of this polynomial, and the height of α is the maximum of the absolute values of the coefficients of this polynomial. In this paper we consider the distribution of algebraic numbers α whose degree is fixed and height bounded by a growing parameter *Q*, and the minimal polynomial P_α is such that the absolute value of its derivative $P'_\alpha(\alpha)$ is bounded by a given parameter *X*. We show that if this bounding parameter *X* is from a certain range, then as $Q \to +\infty$ these algebraic numbers are distributed uniformly in the segment $[-1+\sqrt{2/3}, 1-\sqrt{2/3}]$.

Keywords: algebraic numbers, distribution of algebraic numbers, integer polynomials, polynomials with small derivative at a root

For citation. Koleda D. V. On real algebraic numbers in which the derivative of their minimal polynomial is small. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 135–147 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-135-147

Введение. В задачах теории диофантовых приближений бывает полезно уметь отсеивать алгебраические числа, около которых их минимальный многочлен изменяется очень медленно. Например, целочисленные многочлены, имеющие малую производную в некоторых своих корнях, часто создают неудобства при вычислении хаусдорфовой размерности множеств, связанных с приближением вещественных или комплексных чисел алгебраическими. Поэтому в подобных задачах оценка количества таких многочленов, либо их корней – соответствующих алгебраических чисел, приобретает ключевое значение. Пример работы с такими «неудобными» многочленами можно найти в статье Р. Бэйкера [1], которая посвящена оценке сверху размерности Хаусдорфа множества чисел $x \in \mathbb{R}$, для каждого из которых найдется бесконечное число целочисленных многочленов P степени n, удовлетворяющих неравенству $|P(x)| < H(P)^{-w}$. Оценкам количества целочисленных многочленов с малой производной в корне посвящены работы [2–6].

Приведем основные определения и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Чтобы в записях отличать сам многочлен, как функцию и формальное выражение, от значения этого многочлена в точке, будем в качестве формальной переменной использовать символ Y. Для многочлена $P(Y) = a_n Y^n + \ldots + a_1 Y + a_0$ *высоту* определим как

$$H(P) := \max_{0 \le k \le n} |a_k|.$$

Под *минимальным многочленом* P_α алгебраического числа α мы подразумеваем ненулевой неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен наименьшей степени, для которого α является корнем и коэффициенты которого суть взаимно простые целые числа, а старший коэффициент положителен. *Степень* и *высоту* алгебраического числа α определим как степень и высоту его минимального многочлена P_α, т. е.

$$\deg \alpha := \deg P_\alpha, \qquad H(\alpha) := H(P_\alpha).$$

Символом $\mathbb{A}_n$ обозначим множество алгебраических чисел степени n над $\mathbb{Q}$.

Через $\mathcal{P}_n^*(Q)$ обозначим множество неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов P степени n и высоты $H(P) \le Q$, имеющих целые взаимно простые коэффициенты и положительный старший коэффициент. Другими словами, множество $\mathcal{P}_n^*(Q)$ образует минимальные многочлены степени n и высоты $H(P) \le Q$.

Ниже используются следующие обозначения асимптотических соотношений. Запись $f \ll g$ или $f = O(g)$ означает, что $|f| \le c|g|$ для некоторой постоянной c. При этом $f \gg g$ равносильно $g \ll f$. Выражение $f \asymp g$ значит, что одновременно $f \ll g$ и $g \ll f$. Записи вида $f \ll_{x_1, x_2, \ldots} g$ или $f \asymp_{x_1, x_2, \ldots} g$ означают, что неявные постоянные в соотношении зависят от параметров $x_1, x_2, \ldots$; в нашем случае таким параметром будет степень n. Запись «$f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$» означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 1$.

Выражение вида $\mathbf{1}\{\textit{условие}\}$ определено так: $\mathbf{1}\{\textit{условие}\} = 1$, если «условие» выполняется, в остальных же случаях $\mathbf{1}\{\textit{условие}\} = 0$.

Основные результаты. Пусть заданы вещественные числа $Q \ge 1$ и $X > 0$ и множество $S \subseteq \mathbb{C}$. Обозначим через $\Psi_n(Q, X, S)$ количество таких алгебраических чисел $\alpha \in S$ степени n и высоты не больше Q, что у каждого из них минимальный многочлен P_α удовлетворяет неравенству $|P'_\alpha(\alpha)| \le X$, т. е.

$$\Psi_n(Q, X, S) := \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap S : H(\alpha) \le Q, \left|P'_\alpha(\alpha)\right| \le X\right\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $n \ge 2$. Тогда для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ и любого $X > 0$ верно неравенство*

$$\left| \Psi_n(Q, X, I) - \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \psi_n(X/Q; z)\,dz \right| \le C'_n Q^n \ln^{\mathbf{1}\{n=2\}} Q, \tag{1}$$

где постоянная C'_n зависит только от степени n, а функция $\psi_n(\delta; z)$ имеет вид

$$\psi_n(\delta; z) = \int\limits_{\mathcal{B}_n(\delta; z)} \left| \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} \right| da_1 \ldots da_n \tag{2}$$

с областью интегрирования

$$\mathcal{B}_n(\delta;z)=\left\{(a_1,\ldots,a_n)\in[-1,1]^n:\left|\sum_{k=1}^{n}a_kz^k\right|\le 1,\left|\sum_{k=1}^{n}ka_kz^{k-1}\right|\le\delta\right\}.$$

Т е о р е м а 2. *Функция* $\psi_n(\delta,z)$ *положительна для всех* $\delta>0$ *и* $z\in\mathbb{R}$ *и может быть записана в виде*

$$\psi_n(\delta;z)=\delta^2g_n(z)+\delta^3h_n(\delta;z) \tag{3}$$

где

$$g_n(z)=\mathrm{Vol}_{n-1}\left\{(a_2,\ldots,a_n)\in[-1,1]^{n-1}:\left|\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_kz^k\right|\le 1,\left|\sum_{k=2}^{n}ka_kz^{k-1}\right|\le 1\right\},$$

и при $0<\delta\le 1$

$$\left|h_n(\delta;z)\right|\le\begin{cases}0, & |z|\le 1-\dfrac{1}{\sqrt{2-\delta}},\\[2mm] \dfrac{4}{3|z|}, & 1-\dfrac{1}{\sqrt{2-\delta}}<|z|\le 1,\\[2mm] \dfrac{2^n}{3(n-1)|z|^{n-1}}, & |z|\ge 1.\end{cases} \tag{4}$$

При $n=2$ *верны соотношения*

$$g_2(z)=\frac{2}{\max\{1,2|z|,|z|^2\}},\quad \left|h_2(\delta;z)\right|\le\begin{cases}\dfrac{4}{3|z|}, & \dfrac{1-\delta}{2}\le|z|\le\dfrac{1+\delta}{2}\ \text{или}\ \dfrac{2}{1+\delta}\le|z|\le\dfrac{2}{1-\delta},\\ 0, & \text{для остальных}\ z.\end{cases} \tag{5}$$

Т е о р е м а 3. *Зафиксируем* $n\ge 2$ *и* $0<\delta_0<1$. *Тогда для любых*

$$Q\ge 1,\quad 0<X\le\delta_0Q\quad\text{и промежутка}\ I\subseteq\left[-1+\frac{1}{\sqrt{2-\delta_0}},1-\frac{1}{\sqrt{2-\delta_0}}\right]$$

выполняется неравенство

$$\left|\Psi_n(Q,X,I)-\frac{2^{n-2}}{\zeta(n+1)}Q^{n-1}X^2\,|I|\right|\le C_n'Q^n\ln^{\mathbf{1}\{n=2\}}Q,$$

где постоянная C_n' *та же, что и в теореме* 1.

Если в теореме 3 взять $\delta_0=1/2$, получится результат о равномерном распределении, упомянутый в аннотации.

С л е д с т в и е. *Зафиксируем* $n\ge 2$. *Пусть* $X=X(Q)$ *растет с увеличением* Q *так, что*

$$\lim_{Q\to+\infty}\frac{X}{\sqrt{Q\ln^{\mathbf{1}\{n=2\}}Q}}=+\infty,\qquad \lim_{Q\to+\infty}\frac{X}{Q}=0.$$

Тогда при $Q\to+\infty$ *для любого фиксированного промежутка* $I\subseteq\mathbb{R}$ *верна асимптотика*

$$\Psi_n(Q,X,I)\sim\frac{Q^{n-1}X^2}{2\zeta(n+1)}\int_I g_n(z)dz.$$

Обзор известных результатов. Рассмотрим подробнее некоторые полученные ранее результаты, интересные в контексте теорем 1, 2 и 3.

Теорема 1 внешне напоминает результат из [7], где при $n \ge 2$ показано, что для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ количество $\Phi_n(Q,I)$ алгебраических чисел $\alpha \in I$ степени n и высоты $\le Q$ удовлетворяет соотношению

$$\left|\Phi_n(Q,I) - \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)}\int_I \varphi_n(z)dz\right| \le C_n Q^n \ln^{\mathbf{1}\{n=2\}} Q,$$

где $\zeta(\cdot)$– дзета-функция Римана, постоянная C_n зависит только от степени n, а функция $\varphi_n(z)$ может быть представлена в виде

$$\varphi_n(z) = \int\limits_{\mathcal{D}_n(z)} \left|\sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}\right| da_1 \ldots da_n$$

с областью интегрирования

$$\mathcal{D}_n(z) = \left\{(a_1,\ldots,a_n) \in [-1,1]^n : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right| \le 1\right\}.$$

Очевидно, что $\Psi_n(Q,+\infty,S) = \Phi_n(Q,S)$ и $\psi_n(+\infty;z) = \varphi_n(z)$.

В упомянутой выше работе Бэйкера [1] для целого $n \ge 1$ и вещественных $H \ge 1$ рассматривается множество $\tilde{\mathcal{P}}_n^*(H,X)$ неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов P степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = H$, которые имеют взаимно простые коэффициенты и старший коэффициент $a_n = H$, и у которых есть корень $\alpha \in \mathbb{C}$ с условием $|P'(\alpha)| < X$, а также подразумеваются некоторые технические ограничения, связанные с решаемой в [1] задачей. Бэйкер доказал, что при достаточно больших H для этого множества верна оценка

$$\#\tilde{\mathcal{P}}_n^*(H,X) \ll_n H^{n-1}\max\{1,X\}.$$

Для множества $S \subseteq \mathbb{C}$, целого $n \ge 1$ и действительных $Q \ge 1$, $X \ge 0$ обозначим через $\mathcal{P}_n^*(Q,X,S)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^*(Q)$, которые имеют корень $\alpha \in S$ такой, что $|P'(\alpha)| < X$, т. е.

$$\mathcal{P}_n^*(Q,X,S) := \left\{P \in \mathcal{P}_n^*(Q) : \text{у P есть корень } \alpha \in S, \text{ такой что } |P'(\alpha)| \le X\right\}.$$

В множество $\mathcal{P}_n^*(Q,X,S)$ по определению входят только минимальные многочлены. Очевидно, что для всех положительных Q, X и любого множества $S \subseteq \mathbb{C}$ верно

$$\frac{1}{n}\Psi_n(Q,X,S) \le \#\mathcal{P}_n^*(Q,X,S) \le \Psi_n(Q,X,S). \tag{6}$$

В серии работ [2–6] В. И. Берник, Д. В. Васильев и А. С. Кудин получили ряд верхних и нижних оценок для количества многочленов в $\mathcal{P}_n^*(Q,X,S)$ при $Q \to +\infty$ и различных ограничениях на n и X. В качестве множества S в этих работах рассматривается интервал $I_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

В [3] при $n \ge 2$ и $0 \le v \le \frac{n+1}{3}$ получена нижняя оценка

$$\#\mathcal{P}_n^*(Q,Q^{1-v},I_0) \gg_n Q^{n+1-2v}. \tag{7}$$

Верхние оценки в этих работах имеют вид

$$\#\mathcal{P}_n^*(Q,Q^{1-v},I_0) \ll_n Q^{n+1-\gamma v}, \tag{8}$$

где γ – положительная числовая постоянная.

– В [2] при $n \ge 1$ и $0 \le v \le \frac{3}{2}$ показано, что (8) выполняется с $\gamma = 1$.

– В [5] при $n \ge 3$ и $1{,}4 \le v \le \frac{7}{16}(n+1)$ доказано (8) с $\gamma = \frac{1}{7}$.

– В [6] при $n \ge 9$ и $1{,}5 \le v \le \frac{1}{2}(n+1)$ получено (8) с $\gamma = \frac{3}{5}$.

Кроме того, в [4] при $n \ge 2$ и $1 < v \le \frac{1}{2}n$ показано, что количество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^*\left(Q, Q^{1-v}, I_0\right)$, у которых в корне $\alpha \in I_0$, в добавок к неравенству $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$, выполняется $|P'(\alpha)| \asymp |a_n| \, |\alpha - \alpha'|$, где α' – ближайший к α корень того же многочлена P, оценивается сверху как

$$\#\left\{P \in \mathcal{P}_n^*\left(Q, Q^{1-v}, I_0\right) : |P'(\alpha)| \asymp |a_n| \, |\alpha - \alpha'|\right\} \ll_n Q^{n+1-v}.$$

Явный вид зависимости $\#\mathcal{P}_n^*(Q, X, S)$ от множества S в [2–6] не уточняется.

Из (6) и следствия видно, что при $n \ge 2$ и $0 < v < \frac{1}{2}$ и достаточно большом Q для любого фиксированного промежутка I верна асимптотическая оценка

$$\#\mathcal{P}_n^*(Q, Q^{1-v}, I) \asymp_n Q^{n+1-2v} \int_I g_n(z) dz.$$

Доказательство теоремы 1. Начнем с нескольких определений.

Целую точку $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ мы называем *несократимой*, если ее координаты взаимно просты, т. е. $\gcd(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$. Аналогично многочлен $\sum_{k=0}^n a_k Y^k \in \mathbb{Z}[Y]$ называем *несократимым*, если его вектор коэффициентов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ несократим.

Для заданного множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ и вещественного числа Q множество $Q\mathcal{A}$ определяем как

$$Q\mathcal{A} := \{Q\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}.$$

Для заданных множества $S \subseteq \mathbb{R}$ и вещественного $X > 0$ припишем ненулевому вещественному многочлену P вес $w_{X,S}(P)$, равный количеству корней ξ многочлена P, лежащих в S и удовлетворяющих неравенству $|P'(\xi)| \le X$, т. е.

$$w_{X,S}(P) := \#\{\xi \in S : P(\xi) = 0, |P'(\xi)| \le X\}.$$

Тогда

$$\Psi_n(Q, X, S) = \sum_{m=1}^n m \cdot \#\{P \in \mathcal{P}_n^*(Q) : w_{X,S}(P) = m\}. \tag{9}$$

Далее мы будем интерпретировать многочлены $\sum_{k=0}^n a_k Y^k$ как точки $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. При таком толковании наша задача теперь сводится к подсчету целых точек, соответствующих неприводимым несократимым целочисленным многочленам, которые удовлетворяют определенным условиям.

Вес ненулевой точки $(a_0, a_1 \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ определим как

$$w_{X,S}(a_0, \ldots, a_n) := \#\left\{\xi \in S : \sum_{k=0}^n a_k \xi^k = 0, \left|\sum_{k=1}^n k a_k \xi^{k-1}\right| \le X\right\}. \tag{10}$$

Заметим, что ξ, участвующее в этом определении, есть алгебраическая функция координат $a_0, \ldots, a_n$, кроме того, эта функция является однородной функцией степени 0, т. е. $\xi(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \xi(a_0, \ldots, a_n)$ для любого ненулевого вещественного λ. Это означает, что выражение $\sum_{k=1}^n k a_k \xi^{k-1}$ также является алгебраической функцией от $a_0, \ldots, a_n$, которая однородна степени 1. Поэтому для всех $\lambda \ne 0$ выполняется

$$w_{|\lambda| X,S}(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = w_{X,S}(a_0, \ldots, a_n). \tag{11}$$

Для ограниченного множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ определим

$$W_{X,S}(\mathcal{A}) := \sum_{\substack{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Z}^{n+1} \\ \gcd(a_0, \ldots, a_n) = 1}} w_{X,S}(a_0, \ldots, a_n).$$

Согласно введенному выше соответствию «многочлен = точка», величина $W_{X,S}(\mathcal{A})$ подсчитывает все несократимые целочисленные многочлены степени $\le n$, чьи векторы коэффициентов лежат в $\mathcal{A}$, с учетом их веса $w_{X,S}$. Чтобы получить сумму по несократимым неприводимым многочленам, нужно отсеять из $W_{X,S}(\mathcal{A})$ точки, соответствующие многочленам степени $\le n-1$ и приводимым многочленам степени n.

Для конечного множества $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}[Y]$ целочисленных многочленов определим

$$W_{X,S}(\mathcal{B}) := \sum_{\substack{P\in\mathcal{B} \\ P \text{ несократим}}} w_{X,S}(P).$$

Обозначим через $\mathcal{R}_n(Q)$ множество целочисленных приводимых многочленов степени n и высоты не более Q. Тогда

$$W_{X,S}([-Q,Q]^{n+1}) = 2\Psi_n(Q,X,S) + W_{X,S}([-Q,Q]^n) + W_{X,S}\left(\mathcal{R}_n(Q)\right),$$

где второе слагаемое в правой части соответствует точкам с $a_n = 0$ (т. е. многочленам степени не более $n-1$), множитель 2 в первом слагаемом возникает, потому что в $W_{X,S}$ мы учитываем точки независимо от знака координаты a_n.

Второе слагаемое в правой части можно оценить как

$$W_{X,S}([-Q,Q]^n) \le (n-1)\cdot(2Q+1)^n,$$

поскольку общее количество ненулевых целочисленных многочленов степени $\le n-1$ и высоты $\le Q$ не превосходит $(2Q+1)^n$, и каждый из этих многочленов может иметь не более $n-1$ корней в S.

Про $\mathcal{R}_n(Q)$ известно (доказательство см. в [8–10]), что

$$\#\mathcal{R}_n(Q) \ll_n \begin{cases} Q^n, & n \ge 3, \\ Q^2\log Q, & n = 2, \end{cases}$$

где неявная постоянная в символе Виноградова $\ll$ зависит только от степени n. Следовательно,

$$W_{X,S}\left(\mathcal{R}_n(Q)\right) \le n\cdot\#\mathcal{R}_n(Q) = O\left(Q^n \log^{\mathbf{1}\{n=2\}} Q\right).$$

Таким образом,

$$\Psi_n(Q,X,S) = \frac{1}{2} W_{X,S}([-Q,Q]^{n+1}) + O\left(Q^n \log^{\mathbf{1}\{n=2\}} Q\right). \tag{12}$$

Вычислим теперь $W_{X,S}([-Q,Q]^{n+1})$. Для этого рассмотрим множество $\mathcal{A}_m \subset [-1,1]^{n+1}$, состоящее из всех точек $\mathbf{a} = (a_0,\ldots,a_n) \in [-1,1]^{n+1}$, таких что $a_n \ne 0$ и $w_{\delta,S}(\mathbf{a}) = m$, т. е.

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\delta,S) := \left\{(a_0,\ldots,a_n) \in [-1,1]^{n+1} : a_n \ne 0,\, w_{\delta,S}(a_0,\ldots,a_n) = m\right\}.$$

Далее обозначим $\delta := X/Q$. Согласно (11) имеем $w_{Q\delta,S}(Q\mathbf{a}) = w_{\delta,S}(\mathbf{a})$ для любых вещественных $Q > 0$. Отсюда по определению несократимого многочлена имеем

$$\#\{P \in \mathcal{P}_n(Q) : P \text{ несократим и } w_{X,S}(P) = m\} = \mathrm{N}^*(Q\mathcal{A}_m),$$

где $\mathrm{N}^*(\mathcal{A})$ обозначает количество несократимых целых точек во множестве $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Применяя это к (9), получаем

$$\Psi_n(Q,X,S) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} m\,\mathrm{N}^*(Q\mathcal{A}_m) + O\left(Q^n \log^{\mathbf{1}\{n=2\}} Q\right). \tag{13}$$

Напомним, что в правой части зависимость от X и S спрятана во множествах $\mathcal{A}_m$.

Л е м м а 1. *Пусть граница $\partial\mathcal{A}$ ограниченной области $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ содержится в объединении m алгебраических поверхностей, заданных уравнениями*

$$F_j(x_1,\ldots,x_d) = 0, \qquad j = 1,\ldots,m,$$

где степень многочленов F_j не превосходит k. Тогда количество $\mathrm{N}^*(Q\mathcal{A})$ несократимых точек в области $Q\mathcal{A}$ равно

$$\mathrm{N}^*(Q\mathcal{A}) = Q^d \frac{\mathrm{Vol}_d(\mathcal{A})}{\zeta(d)} + O\Big(Q^{d-1}\log^{\mathbf{1}\{d=2\}}Q\Big),$$

где $\zeta(\cdot)$ *– дзета-функция Римана, а неявная постоянная в символе «О большое» зависит только от d, m, k и диаметра области* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Утверждение выводится из работы [11] с помощью принципа включений-исключений. Подробное доказательство можно найти, напр., в [7, лемма 2.4].

Лемма 2. *Пусть* $S \subseteq \mathbb{R}$ *есть промежуток с концами* α *и* β, *где* $\alpha < \beta$. *Тогда граница области* $\mathcal{A}_m(\delta, S)$ *содержится в объединении 2n + 8 алгебраических поверхностей:*

– 2n + 2 плоскостей, заданных уравнениями $a_k \pm 1 = 0$, *где* $k = 0,1,\ldots,n$;

– три плоскости с уравнениями $a_n = 0$, $\sum_{k=0}^n a_k\alpha^k = 0$, $\sum_{k=0}^n a_k\beta^k = 0$;

– поверхность с уравнением $D\Big[\sum_{k=0}^n a_k Y^k\Big] = 0$, *где* $D[f(Y)]$ *– дискриминант многочлена* $f \in \mathbb{R}[Y]$, *рассматриваемый как функция коэффициентов многочлена f;*

– две поверхности с уравнениями $\sum_{k=0}^n k a_k \xi^{k-1} \pm \delta = 0$, *где* ξ *– вещественный корень многочлена* $\sum_{k=0}^n a_k Y^k$.

Доказательство. Рассуждения повторяют доказательство леммы 1 в [12]. Отличие заключается только в добавлении поверхностей $a_k \pm 1 = 0$ и $\sum_{k=0}^n k a_k \xi^{k-1} \pm \delta = 0$.

Таким образом, по леммам 1 (при $d = n+1 \geq 3$) и 2

$$\sum_{m=0}^n m\mathrm{N}^*(Q\mathcal{A}_m) = \frac{Q^{n+1}}{\zeta(n+1)} \sum_{m=0}^n m\mathrm{Vol}_{n+1}(\mathcal{A}_m) + O(Q^n).$$

Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^n m\mathrm{Vol}_{n+1}(\mathcal{A}_m) = \int\limits_{[-1,1]^{n+1}} w_{\delta,S}(a_0,\ldots,a_n)\,da_0\ldots da_n.$$

Заменим в интеграле переменную a_0 на z согласно равенству

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0.$$

По (10) нетрудно заметить, что при такой замене каждой точке $(a_0,\ldots,a_n) \in [-1,1]^{n+1}$ будет соответствовать в точности $w_{\delta,S}(a_0,\ldots,a_n)$ точек вида $(z; a_1,\ldots,a_n) \in \mathcal{B}_n(\delta)$, где область

$$\mathcal{B}_n(\delta) := \left\{(z; a_1,\ldots,a_n) \in S\times[-1,1]^n : \left|\sum_{k=1}^n a_k z^k\right| \leq 1, \left|\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}\right| \leq \delta\right\}.$$

Якобиан этой замены равен

$$\frac{\partial(a_0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial(z;a_1,\ldots,a_n)} = \begin{vmatrix} -\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} & -z & \ldots & -z^n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = -\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

В итоге интеграл принимает вид

$$\int\limits_{[-1,1]^{n+1}} w_{\delta,S}(a_0,\ldots,a_n)\,da_0\ldots da_n = \int\limits_S \psi_n(\delta;z)\,dz, \tag{14}$$

где мы обозначили

$$\psi_n(\delta;z) := \int\limits_{\mathcal{B}_n(\delta;z)} \left|\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}\right| da_1\ldots da_n \tag{15}$$

с областью интегрирования

$$\mathcal{B}_n(\delta; z) := \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in [-1,1]^n : \left| \sum_{k=1}^{n} a_k z^k \right| \le 1, \left| \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} \right| \le \delta \right\}.$$

Функцию ψ_n можно интерпретировать как плотность распределения интересующих нас алгебраических чисел в окрестности точки z. Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказательство теорем 2 и 3. В интеграле (15) заменим переменную a_1 на p согласно равенству

$$p = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}.$$

Якобиан такой замены равен 1, и интеграл (15) принимает вид

$$\psi_n(\delta; z) = \int_{-\delta}^{\delta} |p| dp \int_{\mathcal{G}_n(p;z)} da_2 \ldots da_n = \int_{-\delta}^{\delta} |p| \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}(p; z) dp, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{G}_n(p; z) := \left\{ (a_2, \ldots, a_n) \in [-1,1]^{n-1} : \left| pz - \sum_{k=2}^{n} (k-1) a_k z^k \right| \le 1, \left| p - \sum_{k=2}^{n} k a_k z^{k-1} \right| \le 1 \right\}. \tag{17}$$

Л е м м а 3. *Для любых вещественных p и z*

$$\operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(-p; z) = \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; z), \qquad \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; -z) = \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; z).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению (17) видно, что между областями $\mathcal{G}_n(-p; z)$ и $\mathcal{G}_n(p; z)$ есть биекция – отображение $(a_2, \ldots, a_n) \mapsto (-a_2, \ldots, -a_n)$. И поскольку оно изометрично, сразу получаем первое равенство.

Также легко заметить, что отображение

$$(a_2, \ldots, a_n) \mapsto \left((-1)^{2-1} a_2, \ldots, (-1)^{n-1} a_n \right),$$

где значение координаты a_k отображается в $(-1)^{k-1} a_k$, является изометрической биекцией между $\mathcal{G}_n(p; -z)$ и $\mathcal{G}_n(p; z)$. Второе равенство доказано.

Исследуем поведение функции $\psi_n(\delta; z)$ при $\delta \to +0$. Очевидно, что

$$\psi_n(\delta, z) = \delta^2 \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(0; z) + 2 \int_0^{\delta} \tilde{g}_n(p; z) p dp,$$

где мы обозначили

$$\tilde{g}_n(p; z) := \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; z) - \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(0; z).$$

Формула (3) получается после введения обозначений

$$g_n(z) := \operatorname{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(0; z), \qquad h_n(\delta; z) := 2 \int_0^1 \frac{\tilde{g}_n(q\delta; z)}{\delta} q dq. \tag{18}$$

Осталось доказать оценку (4) для функции $h_n(\delta; z)$, а также для $n = 2$ соотношения (5).

Далее везде в вычислениях полагаем $z > 0$ (случай $z = 0$ тривиален) для упрощения записей. Это возможно, поскольку из (16) и леммы 3 следует, что функция $\psi_n(\delta; z)$ четна по переменной z.

Л е м м а 4. *Пусть $n \ge 2$. При $|p| \le 1$ и $|z| \le 1 - \frac{1}{\sqrt{2 - |p|}}$ верно равенство*

$$\mathcal{G}_n(p; z) = [-1,1]^{n-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3, полагаем $0 \le p \le 1$. Очевидно, что в (17) неравенство

$$\left| pz - \sum_{k=2}^{n} (k-1) a_k z^k \right| \le 1 \tag{19}$$

выполняется для всех $(a_2, \ldots, a_n) \in [-1,1]^{n-1}$, если и только если положительное z удовлетворяет

$$pz+\sum_{k=2}^{n}(k-1)z^k\le 1.$$

Очевидно, что при $n \ge 2$ и $p > 0$ решения последнего неравенства образуют отрезок $[0,z_n]$, где $z_n < 1$. Оценим величину z_n снизу. Очевидно, что при $n \to \infty$ величина z_n монотонно убывает к значению z_∞, которое является максимумом решений неравенства

$$pz+\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)z^k\le 1,\quad \text{т. е.}\quad pz+\frac{z^2}{(1-z)^2}\le 1,\quad \text{или}\quad \frac{z}{1-z}\le\sqrt{1-pz},$$

что можно переписать в виде

$$z\le\frac{\sqrt{1-pz}}{1+\sqrt{1-pz}}. \tag{20}$$

При $0\le pz\le 1$ (что верно ввиду $0<z\le z_n<1$ и $0<p\le 1$) правая часть заведомо не больше 1/2 и при этом является убывающей функцией от z. Поэтому справедливость неравенства

$$z\le\frac{\sqrt{1-p/2}}{1+\sqrt{1-p/2}} \tag{21}$$

гарантирует, что будут выполнены (20) и, как следствие, (19).

Рассуждая аналогично, получаем, что второе неравенство в (17)

$$\left|p-\sum_{k=2}^{n}ka_kz^{k-1}\right|\le 1$$

заведомо удовлетворено для всех $(a_2,\dots,a_n)\in[-1,1]^{n-1}$, если

$$p+\sum_{k=2}^{\infty}kz^{k-1}\le 1,\quad \text{т. е.}\quad p+\frac{1}{(1-z)^2}\le 2,\quad \text{или}\quad z\le 1-\frac{1}{\sqrt{2-p}}.$$

Несложно показать, что при выполнении последнего неравенства будет верно и (21). Тем самым лемма 4 доказана.

Из леммы 4 сразу получаем, что при $|p|\le\delta$ и $|z|\le 1-\dfrac{1}{\sqrt{2-\delta}}$ верны равенства

$$g_n(z)=2^{n-1},\qquad h_n(\delta,z)=0,\qquad \psi_n(z)=2^{n-1}\delta^2.$$

И таким образом из уже доказанной теоремы 1 получаем для всех $\delta\in(0,\delta_0]$ теорему 3.

Чтобы получить оценку (4) для остальных значений z, докажем несколько лемм.

Л е м м а 5. *Пусть $n\ge 3$. Для всех p верна оценка*

$$|\tilde g_n(p;z)|\le\begin{cases}\dfrac{2|p|}{|z|}, & 1-\dfrac{1}{\sqrt{2-|p|}}<|z|\le 1,\\[2ex] \dfrac{2^{n-1}|p|}{(n-1)|z|^{n-1}}, & |z|\ge 1.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0<z\le 1$. Из определения (17) области $\mathcal{G}_n(p;z)$ видно, что для заданных значений $p,a_3,\dots,a_n$ координата a_2 точки $(a_2,a_3,\dots,a_n)\in\mathcal{G}_n(p;z)$ принимает значения из отрезка $[A(p;z),B(p;z)]$, где

$$A(p;z):=\max\left\{-1,\frac{1}{z^2}\left[-1+pz-\sum_{k=3}^{n}(k-1)a_kz^k\right],\frac{1}{2z}\left[-1+p-\sum_{k=3}^{n}ka_kz^{k-1}\right]\right\},$$

$$B'(p;z):=\min\left\{1,\frac{1}{z^2}\left[1+pz-\sum_{k=3}^{n}(k-1)a_kz^k\right],\frac{1}{2z}\left[1+p-\sum_{k=3}^{n}ka_kz^{k-1}\right]\right\},$$

$$B(p;z) := \max\{A(p;z), B'(p;z)\}.$$

Заметим, что такое «двухуровневое» определение величины $B(p;z)$ удобно тем, что нам не придется выяснять, при каких значениях $p, a_3, \dots, a_n$ выполняется $A(p;z) \le B'(p;z)$. При этом становится очевидным равенство

$$\tilde{g}_n(p;z) = \int\limits_{[-1,1]^{n-2}} \big(B(p;z) - B(0;z) - [A(p;z) - A(0;z)]\big)\, da_3 \dots da_n. \tag{22}$$

Л е м м а 6. *Для любого конечного набора вещественных чисел* x_k *и* δ_k *выполняются неравенства*

$$\left|\min_k\{x_k + \delta_k\} - \min_k\{x_k\}\right| \le \max_k |\delta_k|, \qquad \left|\max_k\{x_k + \delta_k\} - \max_k\{x_k\}\right| \le \max_k |\delta_k|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем неравенство для минимумов. Пусть

$$\min_{1\le k\le n}\{x_k + \delta_k\} = x_i + \delta_i, \qquad \min_{1\le k\le n}\{x_k\} = x_j.$$

Тогда $\delta_i \le x_i + \delta_i - x_j = x_i + \delta_i - (x_j + \delta_j) + \delta_j \le \delta_j$, т. е.

$$|x_i + \delta_i - x_j| \le \max\{|\delta_i|, |\delta_j|\} \le \max_{1\le k\le n} |\delta_k|.$$

Докажем неравенство для максимумов. Допустим

$$\max_{1\le k\le n}\{x_k + \delta_k\} = x_i + \delta_i, \qquad \max_{1\le k\le n}\{x_k\} = x_j.$$

Тогда $\delta_i \ge x_i + \delta_i - x_j = x_i + \delta_i - (x_j + \delta_j) + \delta_j \ge \delta_j$. Далее вывод очевиден.

По лемме 6 получаем

$$|B(p;z) - B(0;z) - [A(p;z) - A(0;z)]| \le$$

$$\le \max\{|B'(p;z) - B'(0;z)|, |A(p;z) - A(0;z)|\} + |A(p;z) - A(0;z)| \le \frac{2p}{z}.$$

Пусть $1 \le z$. По аналогии с вышесказанным из (17) получаем, что при заданных $p, a_2, \dots, a_{n-1}$ координата a_n точки $(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \mathcal{G}_n(p;z)$ лежит в отрезке $[A(p;z), B(p;z)]$, где на этот раз

$$A(p;z) := \max\left\{-1, \frac{1}{(n-1)z^n}\left[-1 + pz - \sum_{k=2}^{n-1}(k-1)a_k z^k\right], \frac{1}{nz^{n-1}}\left[-1 + p - \sum_{k=2}^{n-1} k a_k z^{k-1}\right]\right\},$$

$$B'(p;z) := \min\left\{1, \frac{1}{(n-1)z^n}\left[1 + pz - \sum_{k=2}^{n-1}(k-1)a_k z^k\right], \frac{1}{nz^{n-1}}\left[1 + p - \sum_{k=2}^{n-1} k a_k z^{k-1}\right]\right\},$$

$$B(p;z) := \max\{A(p;z), B'(p;z)\}.$$

Аналогично получаем равенство

$$\tilde{g}_n(p;z) = \int\limits_{[-1,1]^{n-2}} \big(B(p;z) - B(0;z) - [A(p;z) - A(0;z)]\big)\, da_2 \dots da_{n-1} \tag{23}$$

и по лемме 6

$$|B(p;z) - B(0;z) - [A(p;z) - A(0;z)]| \le \frac{2p}{(n-1)z^{n-1}}, \quad |\tilde{g}_n(p;z)| \le \frac{2^{n-1}p}{(n-1)z^{n-1}}.$$

Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. *Пусть* $|p|<1$. *Тогда*

$$|\tilde g_2(p;z)|\le\begin{cases}\dfrac{2|p|}{|z|}, & \dfrac{1-|p|}{2}\le|z|\le\dfrac{1+|p|}{2}\ \textit{или}\ \dfrac{2}{1+|p|}\le|z|\le\dfrac{2}{1-|p|},\\ 0, & \textit{для остальных } z.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опять ввиду леммы 3 полагаем $0<z$ и $0\le p<1$. При $n=2$ интегрирования в (22) и (23) нет, и обе формулы принимают вид

$$\tilde g_2(p;z)=B(p;z)-B(0;z)-[A(p;z)-A(0;z)], \tag{24}$$

где теперь

$$A(p;z):=\max\left\{-1,\frac{-1+pz}{z^2},\frac{-1+p}{2z}\right\},\quad B(p;z):=\min\left\{1,\frac{1+pz}{z^2},\frac{1+p}{2z}\right\}.$$

При всех $z>0$ оценка $|\tilde g_2(p;z)|\le 2p/z$ получается полностью аналогично случаю высших степеней.

Установим множество тех $z>0$, для которых $\tilde g_2(p;z)=0$. Несложными вычислениями можно показать, что

$$A(p;z)=\begin{cases}-1, & 0\le z\le\dfrac{1-p}{2},\\ \dfrac{-1+p}{2z}, & \dfrac{1-p}{2}\le z\le\dfrac{2}{1+p},\\ \dfrac{-1+pz}{z^2}, & \dfrac{2}{1+p}\le z;\end{cases}\qquad B(p;z)=\begin{cases}1, & 0\le z\le\dfrac{1+p}{2},\\ \dfrac{1+p}{2z}, & \dfrac{1+p}{2}\le z\le\dfrac{2}{1-p},\\ \dfrac{1+pz}{z^2}, & \dfrac{2}{1-p}\le z;\end{cases}$$

$$B(p;z)-A(p;z)=\begin{cases}2, & 0\le z\le\dfrac{1-p}{2},\\ 1+\dfrac{1}{2z}-\dfrac{p}{2z}, & \dfrac{1-p}{2}\le z\le\dfrac{1+p}{2},\\ \dfrac{1}{z}, & \dfrac{1+p}{2}\le z\le\dfrac{2}{1+p},\\ \dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{p}{2z}, & \dfrac{2}{1+p}\le z\le\dfrac{2}{1-p},\\ \dfrac{2}{z^2}, & \dfrac{2}{1-p}\le z.\end{cases}$$

Отсюда, ввиду (24), сразу следует утверждение леммы.

В итоге из лемм 4 и 5 для $n\ge3$ имеем

$$\left|\int_0^\delta\tilde g_n(p;z)p\,dp\right|\le\begin{cases}0, & |z|\le1-\dfrac{1}{\sqrt{2-\delta}},\\ \dfrac{2}{3|z|}\delta^3, & 1-\dfrac{1}{\sqrt{2-\delta}}<|z|\le1,\\ \dfrac{2^{n-1}}{3(n-1)|z|^{n-1}}\delta^3, & |z|\ge1,\end{cases}$$

а из леммы 7 неравенство

$$\left|\int_0^\delta \tilde{g}_2(p;z)pdp\right| \le \begin{cases} \dfrac{2}{3|z|}\delta^3, & \dfrac{1-\delta}{2} \le |z| \le \dfrac{1+\delta}{2} \text{ или } \dfrac{2}{1+\delta} \le |z| \le \dfrac{2}{1-\delta}, \\ 0, & \text{для остальных } z. \end{cases}$$

Таким образом, ввиду (18), получаем (4) и (5). Выражение для $g_2(z)$ следует из определения (17) области $\mathcal{G}_2(0;z)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия. Из теорем 1 и 2, а именно из (1) и (3), получаем

$$\Psi_n(Q,Q\delta,I) = \frac{Q^{n+1}\delta^2}{2\zeta(n+1)}\left[\int_I g_n(z)dz + \delta\int_I h_n(\delta;z)dz + \theta_1\tilde{C}'_n\frac{\ln^{\mathbf{1}\{n=2\}}Q}{Q\delta^2}\right],$$

где $|\theta_1| \le 1$ и $\tilde{C}'_n := 2\zeta(n+1)C'_n$. Согласно (4) и (5) при $n \ge 2$ и $0 < \delta \le 1/2$ существует положительная постоянная $\tilde{C}''_n$, зависящая только от n, такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_n(\delta;z)|\,dz \le \tilde{C}''_n < +\infty.$$

Следовательно,

$$\Psi_n(Q,Q\delta,I) = \frac{Q^{n+1}\delta^2}{2\zeta(n+1)}\left[\int_I g_n(z)dz + \theta_2\tilde{C}''_n\delta + \theta_1\tilde{C}'_n\frac{\ln^{\mathbf{1}\{n=2\}}Q}{Q\delta^2}\right],$$

где $|\theta_2| \le 1$. Функция $g_n(z)$ положительна для всех z, поскольку равна объему выпуклой области $\mathcal{G}_n(0;z)$. Поэтому $\int_I g_n(z)dz > 0$ для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$. Таким образом, если δ зависит от Q и

$$\lim_{Q\to+\infty}\delta = 0, \qquad \lim_{Q\to+\infty}\frac{\ln^{\mathbf{1}\{n=2\}}Q}{Q\delta^2} = 0,$$

тогда для любого фиксированного промежутка I при $Q \to +\infty$ имеем

$$\Psi_n(Q,Q\delta,I) \sim \frac{Q^{n+1}\delta^2}{2\zeta(n+1)}\int_I g_n(z)dz.$$

Подставляя $\delta = X/Q$, получаем следствие.

Заключение. Установлен асимптотический вид зависимости количества алгебраических чисел фиксированной степени, лежащих в заданном интервале I, от верхней границы их высот Q, верхней границы X даваемых ими абсолютных значений производной их минимального многочлена и от самого интервала I. В рамках использованных подходов найден диапазон значений параметра X, в котором из этой зависимости можно извлечь точную асимптотику. Показано, что для упомянутого диапазона значений X такие алгебраические числа распределены равномерно на отрезке $\left[-1+\sqrt{2/3}, 1-\sqrt{2/3}\right]$ в пределе при $Q \to +\infty$.

Список использованных источников

1. Baker, R. C. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension / R. C. Baker // Mathematika. – 1976. – Vol. 23, № 2. – P. 184–197. https://doi.org/10.1112/s0025579300008780

2. Берник, В. И. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена / В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Тр. Ин-та математики – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 3–8.

3. Кудин, А. С. Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне / А. С. Кудин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 4. – С. 112–115.

4. Кудин, А. С. Об оценке сверху количества многочленов с ограниченной производной в корне / А. С. Кудин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 18–23.

5. Kudin, A. Counting real algebraic numbers with bounded derivative of minimal polynomial / A. Kudin, D. Vasilyev // Int. J. Number Theory. – 2019. – Vol. 15, № 10. – P. 2223–2239. https://doi.org/10.1142/s1793042119501227

6. Васильев, Д. В. Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне / Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Чебышев. сб. – 2019. – Т. 20, № 2. – С. 47–54. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54

7. Koleda, D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers / D. Koleda // J. Théor. Nombres Bordeaux. – 2017. – Vol. 29, № 1. – P. 179–200. https://doi.org/10.5802/jtnb.975

8. van der Waerden, B. L. Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt / B. L. van der Waerden // Monatsh. Math. Phys. – 1936. – Vol. 43, № 1. – P. 133–147. https://doi.org/10.1007/bf01707594

9. Kuba, G. On the distribution of reducible polynomials / G. Kuba // Math. Slovaca. – 2009. – Vol. 59, № 3. – P. 349–356. https://doi.org/10.2478/s12175-009-0131-6

10. Dubickas, A. On the number of reducible polynomials of bounded naive height / A. Dubickas // Manuscripta Math. – 2014. – Vol. 144, № 3/4. – P. 439–456. https://doi.org/10.1007/s00229-014-0657-y

11. Davenport, H. On a principle of Lipschitz / H. Davenport // J. London Math. Soc. – 1951. – Vol. s1-26, № 3. – P. 179–183. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-26.3.179 (Davenport, H. Corrigendum: «On a principle of Lipschitz» / H. Davenport // J. London Math. Soc. – 1964. – Vol. s1-39.№ 1. – P. 580. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-39.1.580-t)

12. Коледа, Д. В. О распределении вещественных алгебраических чисел равной высоты / Д. В. Коледа // Дальневост. мат. журн. – 2018. – Вып. 1. – С. 56–70.

References

1. Baker R. C. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension. *Mathematika*, 1976, vol. 23, no. 2, pp. 184–197. https://doi.org/10.1112/s0025579300008780

2. Bernik V. I., Vasiliev D. V., Kudin A. S. On the number of integral polynomials of given degree and bounded height with small value of derivative at root of polynomial. *Trudy Instituta matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics], 2014, vol. 22, no. 2, pp. 3–8 (in Russian).

3. Kudin A. Lower bound of the number of integral polynomials of a given degree with a small value of the derivative at the root. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2014, no. 4, pp. 112–115 (in Russian).

4. Kudin A. S. On an upper bound on the number of polynomials with a bounded derivative at the root. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 18–23 (in Russian).

5. Kudin A., Vasilyev D. Counting real algebraic numbers with bounded derivative of minimal polynomial. *International Journal of Number Theory*, 2019, vol. 15, no. 10, pp. 2223–2239. https://doi.org/10.1142/s1793042119501227

6. Vasil'ev D. V., Kudin A. S. On upper bounds for the number of minimal polynomials with a small derivative at a root. *Chebyshevskii sbornik*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 47–54 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54

7. Koleda D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 2017, vol. 29, no. 1, pp. 179–200. https://doi.org/10.5802/jtnb.975

8. van der Waerden B. L. Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1936, vol. 43, no. 1, pp. 133–147 (in German). https://doi.org/10.1007/bf01707594

9. Kuba G. On the distribution of reducible polynomials. *Mathematica Slovaca*, 2009, vol. 59, no. 3, pp. 349–356. https://doi.org/10.2478/s12175-009-0131-6

10. Dubickas A. On the number of reducible polynomials of bounded naive height. *Manuscripta Mathematica*, 2014, vol. 144, no. 3–4, pp. 439–456. https://doi.org/10.1007/s00229-014-0657-y

11. Davenport H. On a principle of Lipschitz. *Journal of the London Mathematical Society*, 1951, vol. s1-26, no. 3, pp. 179–183. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-26.3.179 (Davenport H. Corrigendum: On a principle of Lipschitz. *Journal of the London Mathematical Society,* 1964, vol. s1-39, no. 1, p. 580. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-39.1.580-t)

12. Koleda D. V. On the distribution of real algebraic numbers of equal height. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2018, no. 1, pp. 56–70 (in Russian).

Информация об авторе

Коледа Денис Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теории чисел, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: koledad@rambler.ru

Information about the author

Denis V. Koleda – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of the Department of Number Theory, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: koledad@rambler.ru