ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.5
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-156-175

Поступила в редакцию 22.03.2021
Received 22.03.2021

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

СУММЫ АБЕЛЯ – ПУАССОНА СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЕВА И ИХ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Аннотация. Изучаются аппроксимационные свойства сумм Абеля – Пуассона рациональных сопряженных рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова, а также исследуются приближения данным методом сопряженных на отрезке [–1,1] функций с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$. Приведены результаты, относящиеся к исследованиям полиномиальных и рациональных приближений сопряженных функций. Проводится построение сопряженного ряда Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Устанавливается интегральное представление приближений сопряженных на отрезке [–1,1] функций изучаемым методом, найдены асимптотически точные верхние грани уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на классах $\bar{H}^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, сопряженных функций $\hat{f}$, когда функция f удовлетворяет на отрезке [–1,1] условию Липшица порядка $\gamma, \gamma \in (0,1]$, а также изучены приближения сопряженными суммами Абеля – Пуассона сопряженных функций с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$, на отрезке [–1,1]. Получены оценки приближений, асимптотическое выражение мажоранты приближений при $r \to 1$. Найдено оптимальное значение параметра, при котором обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. Как следствие полученных результатов подробно исследована задача приближения сопряженной функции с плотностью $|x|^s, s > 0$, суммами Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов по системе многочленов Чебышева первого рода. Установлены оценки приближений, а также асимптотическое выражение мажоранты приближений. Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Возможно применение при чтении спецкурсов на математических факультетах и для решения конкретных задач вычислительной математики.

Ключевые слова: ряд Фурье – Чебышева, сопряженный ряд, суммы Абеля – Пуассона, сопряженная функция, приближения, условие Липшица, асимптотические оценки

Для цитирования. Поцейко, П. Г. Суммы Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье – Чебышева и их аппроксимационные свойства / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 156–175. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-156-175

Pavel G. Patseika, Yauheni A. Rouba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

THE ABEL – POISSON MEANS OF CONJUGATE FOURIER – CHEBYSHEV SERIES AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

Abstract. Herein, the approximation properties of the Abel – Poisson means of rational conjugate Fourier series on the system of the Chebyshev–Markov algebraic fractions are studied, and the approximations of conjugate functions with density $|x|^s$, $s \in (1,2)$, on the segment [–1,1] by this method are investigated. In the introduction, the results related to the study of the polynomial and rational approximations of conjugate functions are presented. The conjugate Fourier series on one system of the Chebyshev – Markov algebraic fractions is constructed. In the main part of the article, the integral representation of the approximations of conjugate functions on the segment [–1,1] by the method under study is established, the asymptotically exact upper bounds of deviations of conjugate Abel – Poisson means on classes of conjugate functions when the function satisfies the Lipschitz condition on the segment [–1,1] are found, and the approximations of the conjugate Abel – Poisson means of conjugate functions with density $|x|^s$, $s \in (1,2)$, on the segment [–1,1] are studied. Estimates of the approximations are obtained, and the asymptotic expression of the majorant of the approximations in the final part is found. The optimal value of the parameter at which the greatest rate of decreasing the majorant is provided is found. As a consequence of the obtained results, the problem of approximating the conjugate function with density $|x|^s$, $s \in (1,2)$, by the Abel – Poisson means of conjugate polynomial series on the system of Chebyshev polynomials of the first kind is studied in detail. Estimates of the approximations are established, as well as the asymptotic expression of the majorants of the approximations. This work is of both theoretical and applied nature. It can be used when reading special courses at mathematical faculties and for solving specific problems of computational mathematics.

Keywords: Fourier – Chebyshev series, conjugate series, Abel – Poisson sums, conjugate function, approximations, Lipschitz condition, asymptotic estimates

For citation. Patseika P. G., Rouba Y. A. The Abel – Poisson means of conjugate Fourier – Chebyshev series and their approximation properties. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 156–175 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-156-175

Введение. Ряд задач математики и физики приводят к интегралам с ядром типа Коши, взятым вдоль отрезка действительной оси, следующего вида:

$$\hat{f}(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in[-1,1], \tag{1}$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши [1], причем требуется, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла на отрезке [–1,1] условию Липшица порядка $0<\gamma\le 1$ [2, 3].

Преобразование $\hat{f}(x)$ можно также рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции с функцией f, заданной на отрезке [–1,1]. Действительно, пусть функция $f(x)$ суммируема с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ на отрезке [–1,1]. Тогда, следуя П. Л. Бутцеру и Р. Л. Штэнсу [4, с. 56], $\hat{f}(x)$ может быть представлена следующим образом:

$$\hat{f}(x)=\lim_{r\to 1-0}\sum_{n=1}^{+\infty}r^n c_n\sin n\arccos x,\quad c_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt,\quad x\in[-1,1].$$

Заметим, что суперпозиция $\hat{f}(\cos\theta)$ выражается через функцию, тригонометрически сопряженную с индуцированной функцией $f(\cos\theta)$ с помощью сингулярного интеграла с ядром Гильберта

$$\hat{f}(\cos\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\cos\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-\theta}{2}d\tau,\quad 0\le\theta\le\pi.$$

Этот результат содержится, напр., в [5], см. также лемму 1 из [6].

Задачи, связанные с исследованиями сопряженных функций, отражены в работах математиков по теории функций, среди которых И. И. Привалов [7, 8], А. Н. Колмогоров [9], М. Рисс [10, 11]. Одной из задач теории аппроксимации является поиск взаимосвязей между наилучшими приближениями функций и их сопряженных [12, 13]. Этой задаче посвящены недавние исследования белорусских математиков (см. напр., [6]). Аппроксимации сопряженных функций вида (1) на отрезке [–1,1] алгебраическими многочленами, когда плотность $f(t)$ принадлежит различным функциональным классам, подробно изучена в работах В. П. Моторного (см., напр., [5]).

В [14] найдены сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряженных в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных 2π-периодических функций.

Одной из первых работ, где рассматриваются приближения непрерывных функций суммами Абеля – Пуассона, является статья И. П. Натансона [15], в которой установлено асимптотическое выражение точной верхней грани отклонений функций $f\in C_{2\pi}$ на классе $H_{2\pi}^{(\alpha)}$ функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha,\alpha\in(0,1]$, с константой, равной единице. А. Ф. Тиман [16] получил более точный результат, уточнив остаточный член в асимптотическом равенстве И. П. Натансона. Полное асимптотическое разложение верхних граней уклонений на классе $H_{2\pi}^{(1)}$ было получено Э. Л. Штарком [17]. В. В. Жук [18] получил оценки сверху уклонений сумм Пуассона от функций $f\in C_{2\pi}$ в терминах моделей непрерывности.

Для функций $f\in C[-1,1]$ точные верхние грани отклонений сумм Абеля – Пуассона на классах $H^{(\alpha)}[-1,1]$, $\alpha\in(0,1]$, были установлены Ю. И. Русецким [19]. Т. В. Жигалло [20] уточнила остаточный член в асимптотической формуле, полученной Ю. И. Русецким.

Первые асимптотические выражения верхних граней уклонений сумм Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье на классах $\bar{H}_{2\pi}^{(\alpha)}$ сопряженных 2π-периодических функций были установлены в работе Б. Надя [21]. В. А. Баскаков [22] получил полные асимптотические разложения по степеням $\ln 1/r$ точных верхних граней уклонений сопряженного интеграла Абеля – Пуассона на классах сопряженных функций $\hat{f} \in C_{2\pi}$, удовлетворяющих условию Липшица порядка $0 < \alpha \leq 1$. Полные асимптотические разложения верхних граней уклонений сопряженного интеграла Абеля – Пуассона на классах $\bar{W}_{\infty}^{r}$ и точные их значения в равномерной и интегральной метриках представлены в работах К. Н. Жигалло[23] и Ю. И. Харкевича [24].

А. А. Китбалян [25] предложил подход к построению сумм Абеля – Пуассона тригонометрических рядов Фурье и им сопряженных по системе рациональных 2π-периодических функций, введенных М. М. Джрбашяном [26]. В частности, был установлен ряд теорем о сходимости при $r \to 1-0$ сумм Абеля – Пуассона к функции $f \in L_p(-\pi,\pi), p > 1$.

В [27] были построены и исследованы ряды Фурье на отрезке [–1,1] по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова, которая является обобщением классической системы полиномов Чебышева первого рода. В частности, был построен интеграл Дирихле и изучены его аппроксимационные свойства в приближениях некоторых индивидуальных функций.

Одним из дальнейших результатов данных исследований стало построение сопряженного ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова и исследование аппроксимационных свойств его частичных сумм в приближениях сопряженных на отрезке [–1,1] функций (1), когда плотность $f(t)$ имеет степенную особенность [28].

Целью настоящей работы является изучение аппроксимационных свойств классического метода построения сумм Абеля – Пуассона рациональных сопряженных рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Представляет интерес получить аналоги теорем о приближении на классах $\bar{H}^{(\alpha)}[-1,1]$ сопряженных на отрезке [–1,1] функций, изучить точные верхние грани уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на этих классах, а также исследовать приближения индивидуальных функций изучаемым методом суммирования.

1. Сопряженные суммы Абеля – Пуассона. Напомним основные сведения о рядах Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Алгебраическая косинус-дробь Чебышева – Маркова на отрезке [–1,1] с двумя комплексно-сопряженными параметрами имеет вид [27]

$$M_n(x) = \cos n \arccos\left(x\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}\right), \quad x \in [-1,1],\ a \geq 0,\ n = 0,1,\ldots, \tag{2}$$

и при $a = 0$ представляет собой классический полином Чебышева первого рода. Система алгебраических дробей $M_n(x),\ n = 0,1,\ldots,$ является ортогональной на отрезке [–1,1] с весом

$$\rho(x,a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1). \tag{3}$$

Функции $f(x)$, четной и абсолютно суммируемой с весом $\rho(x,a)$ на отрезке [–1,1], поставим в соответствие ряд Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} M_{2n}(x), \quad c_{2n} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 f(t) M_{2n}(t)\rho(t,a)\,dt, \quad n = 0,1,\ldots\ . \tag{4}$$

Сопряженным с рядом Фурье (4) будем называть ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} N_{2n}(x), \quad N_{2n}(x) = \sin 2n \arccos\left(x\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}\right), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

c_{2n} определена в (4).

Суммой ряда (5) в смысле Абеля – Пуассона назовем функцию

$$\hat{f}(x,r)=\sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} c_{2n} N_{2n}(x), \quad 0<r<1, \quad x\in(-1,1). \tag{6}$$

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Для функции* $\hat{f}(x,r),\ r\in(0,1),$ *справедливо представление*

$$\hat{f}(x,r)=-\frac{2r^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{\sin 2\varphi(u,v)}{1-2r^2\cos 2\varphi(u,v)+r^4}\lambda(v)dv, \quad x=\cos u, \tag{7}$$

где

$$\varphi(u,v)=\int_u^v \lambda(y)dy, \quad \lambda(y)=\frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2\cos 2y+\alpha^4}, \quad \alpha\in[0,1). \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ряд (6) сходится равномерно по переменной $x\in[-1,1]$ при $r\in(0,1)$. Следовательно, оправдана замена порядка суммирования и интегрирования. Тогда

$$\hat{f}(x,r)=\frac{4}{\pi}\int_0^1 f(t)\rho(t,a)\hat{D}_r(t,x)dt, \quad 0<r<1, \quad x\in(-1,1), \tag{9}$$

где

$$\hat{D}_r(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} M_{2n}(t) N_{2n}(x)$$

– сопряженное ядро Пуассона. Преобразуем его. Известно [27], что для алгебраических дробей Чебышева – Маркова первого и второго рода соответственно имеет место представление

$$M_{2n}(x)=\frac{1}{2}\left[\pi_n(\xi)+\overline{\pi_n(\xi)}\right], \quad N_{2n}(x)=\frac{1}{2i}\left[\pi_n(\xi)-\overline{\pi_n(\xi)}\right], \quad \xi=e^{iu}, \ x=\cos u, \tag{10}$$

где

$$\pi_n(\xi)=\left(\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}\right)^n, \quad \alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}+1}, \quad n=1,2,\dots .$$

Выполнив в интеграле (9) замены $t=\cos v,\ x=\cos u,$ и воспользовавшись представлениями (10), получим

$$\hat{D}_r(\cos v, \cos u)=\frac{1}{4i}\sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n}\left(\pi_n(\zeta)+\overline{\pi_n(\zeta)}\right)\left(\pi_n(\xi)-\overline{\pi_n(\xi)}\right).$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, находим, что

$$\hat{D}_r(\cos v, \cos u)=\frac{r^2}{4i}\left[\frac{\pi(\zeta)\pi(\xi)}{1-r^2\pi(\zeta)\pi(\xi)}-\frac{\pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}}{1-r^2\pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}}+\frac{\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}}{1-r^2\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}}-\frac{\overline{\pi(\zeta)\pi(\xi)}}{1-r^2\,\overline{\pi(\zeta)\pi(\xi)}}\right],$$

где $\pi_1(\cdot)=\pi(\cdot).$ Тогда в (9), с учетом выполненных замен переменных, получим

$$\hat{f}(x,r)=\frac{r^2}{\pi i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\lambda(v)\left[\frac{\pi(\zeta)\pi(\xi)}{1-r^2\pi(\zeta)\pi(\xi)}-\frac{\pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}}{1-r^2\pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}}{1-r^2\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}}-\frac{\overline{\pi(\zeta)\pi(\xi)}}{1-r^2\,\overline{\pi(\zeta)\pi(\xi)}}\right]dv,\quad x=\cos u,\quad r\in(0,1).$$

Разбивая последний интеграл на два интеграла, после соответствующих преобразований нетрудно получить, что

$$\hat{f}(x,r)=-\frac{r^2}{\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\lambda(v)\left[\frac{\pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}}{1-r^2\pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}}-\frac{\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}}{1-r^2\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}}\right]dv,\quad x=\cos u. \tag{11}$$

Используя известное равенство [28, с. 121]

$$\exp[in\varphi(u,v)]=\sqrt{\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)}}, \tag{12}$$

где $\varphi(u,v)$ из (8), после несложных преобразований приходим к представлению (7). Теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е 1. *Для сумм Абеля – Пуассона сопряженного ряда Фурье по системе полиномов Чебышева первого рода имеет место представление*

$$\hat{f}(x,r)=-\frac{2r^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{\sin 2(v-u)}{1-2r^2\cos 2(v-u)+r^4}dv,\quad x=\cos u,\quad r\in(0,1). \tag{13}$$

Представление (13) сумм Абеля – Пуассона сопряженного классического тригонометрического ряда Фурье для функции $f(\cos u)$ содержится в [24].

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 следует, что при любом $r\in(0,1)$

$$\hat{f}_1(x,r)=-\frac{2r^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\varphi(u,v)}{1-2r^2\cos 2\varphi(u,v)+r^4}\lambda(v)dv=0,\quad x=\cos u. \tag{14}$$

2. Приближения сопряженными суммами Абеля – Пуассона. Изучим приближения сопряженными суммами Абеля – Пуассона (6) при $r\to 1$ сопряженных функций вида (1).

Т е о р е м а 2. *Для сопряженной функции вида* (1) *с четной плотностью* $f(t)$ *имеет место представление*

$$\hat{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{\cos\varphi(u,v)}{\sin\varphi(u,v)}\lambda(v)dv,\quad x=\cos u, \tag{15}$$

где $\varphi(u,v)$, $\lambda(v)$ *из* (8) *и интеграл справа понимается в смысле главного значения по Коши.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, рассмотрим функцию

$$\hat{g}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{\cos\varphi(u,v)}{\sin\varphi(u,v)}\lambda(v)dv,\quad x=\cos u. \tag{16}$$

С учетом равенства (12) интеграл справа приводится к виду

$$\hat{g}(x) = -\frac{i}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{\pi(\zeta)+\pi(\xi)}{\pi(\zeta)-\pi(\xi)}\lambda(v)dv, \quad \zeta = \mathrm{e}^{iv}, \ \ \xi = \mathrm{e}^{iu}, \ \ x = \cos u.$$

Последний интеграл разобьем на два интеграла по промежуткам $[-\pi/2, 0]$ и $[0, \pi/2]$. В первом из них выполним замену переменного по формуле $v \mapsto -v.$ Тогда

$$\hat{g}(x) = -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\left[\frac{\pi(\zeta)+\pi(\xi)}{\pi(\zeta)-\pi(\xi)} + \frac{\overline{\pi(\zeta)}+\pi(\xi)}{\overline{\pi(\zeta)}-\pi(\xi)}\right]\lambda(v)dv =$$

$$= -\frac{2i}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{1-\pi^2(\xi)}{1-\pi(\xi)\pi(\zeta)-\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}+\pi^2(\xi)}\lambda(v)dv, \quad x = \cos u.$$

Разделим и умножим подынтегральное выражение на π(ξ). Тогда

$$\hat{g}(x) = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{N_2(\cos u)}{M_2(\cos u)-M_2(\cos v)}\lambda(v)dv, \quad x = \cos u,$$

где $M_2(\cdot), N_2(\cdot)$ – соответственно косинус-дроби и синус-дроби Чебышева – Маркова второго порядка. Выполнив в интеграле справа замену переменного $\cos v \mapsto t, \cos u \mapsto x,$ получим

$$\hat{g}(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{f(t)}{t^2-x^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1,1].$$

Из (1) при условии четности *f*(*t*) и последнего интегрального представления находим, что $\hat{g}(x) = \hat{f}(x).$ Теорема 2 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\varepsilon}_r(f, x, \alpha) = \hat{f}(x) - \hat{f}(x, r), \quad x \in [-1, 1]. \tag{17}$$

Подставив в правую часть (17) интегральные представления (7) и (15), получим

$$\hat{\varepsilon}_r(f,x,\alpha) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\left[\frac{\cos\varphi(u,v)}{\sin\varphi(u,v)} - \frac{2r^2\sin 2\varphi(u,v)}{1-2r^2\cos 2\varphi(u,v)+r^4}\right]\lambda(v)dv =$$

$$= -\frac{(1-r^2)^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{\cos\varphi(u,v)}{\left(1-2r^2\cos 2\varphi(u,v)+r^4\right)\sin\varphi(u,v)}\lambda(v)dv, \tag{18}$$

где φ(*u*,*v*), λ(*v*) из (8), $r \in (0,1),\ x = \cos u,\ \alpha \in [0,1).$

З а м е ч а н и е 2. Положив в (18) значение параметра α = 0, придем к приближениям сопряженной функции (1) с четной плотностью *f*(*t*) суммами Абеля – Пуассона сопряженного ряда Фурье по системе полиномов Чебышева первого рода:

$$\hat{\varepsilon}_r(f,x,0) = -\frac{(1-r^2)^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v)\frac{\cos(v-u)}{\left(1-2r^2\cos 2(v-u)+r^4\right)\sin(v-u)}dv, \quad x = \cos u.$$

Последнее представление содержится, напр., в [23].

3. Приближения на классах $\overline{H}^{(\gamma)}[-1,1],\ \gamma\in(0,1].$ Рассмотрим класс $\overline{H}^{(\gamma)}[-1,1],\ \gamma\in(0,1],$ сопряженных функций $\hat{f},$ определяющихся интегралом (1), когда функция f удовлетворяет на отрезке [–1,1] условию Липшица, порядка $\gamma,\gamma\in(0,1],$ с константой, равной единице, т. е. условию

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|^{\gamma},\quad x_1,x_2\in[-1,1].$$

Изучим асимптотическое поведение верхних граней

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x,\alpha)=\sup_{\hat{f}\in\overline{H}^{(\gamma)}[-1,1]}|\hat{f}(x)-\hat{f}(x,r)| \tag{19}$$

уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона от функции $\hat{f}(x)\in\overline{H}^{(\gamma)}[-1,1],\ \ \gamma\in(0,1].$

Отметим, что в нашем случае при каждом значении $r,r\in(0,1)$ могут выбираться соответствующие значения параметра α, т. е., вообще говоря, α = α(*r*). В этом случае будем полагать обязательным выполнение условия

$$\lim_{r\to1}\frac{1-\alpha}{1-r}=\infty \tag{20}$$

и учитывать его в дальнейшем.

Следующая теорема устанавливает асимптотическое поведение величины (19).

Т е о р е м а 3. *Для приближений на классах* $\overline{H}^{(\gamma)}[-1,1],\ \gamma\in(0,1],$ *при* $r\to1,\ 0<r\le1,$ *равномерно относительно* $x\in[-1,1]$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x,\alpha)=\frac{1}{\sin\frac{\pi\gamma}{2}}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^{\gamma}+o\left(\left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^{\gamma}\right)+\delta_r^{(\gamma)}(x),\quad\gamma\in(0,1), \tag{21}$$

$$\mathcal{E}_r^{(1)}(x,\alpha)=\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}+O\left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)^2}{\lambda^2(u)}\right)+\delta_r^{(1)}(x),\quad\gamma=1, \tag{22}$$

где для $|x|<1$

$$\delta_r^{(\gamma)}(x)=\begin{cases}O\left(\left(\dfrac{\sqrt{|x|}(1-r)}{2\lambda(u)}\right)^{2\gamma}\right), & \gamma\in(0,1),\\[2ex] O\left(\left(\dfrac{\sqrt{|x|}(1-r)}{2\lambda(u)}\right)^{2}\ln\dfrac{\lambda(u)}{1-r},\right), & \gamma=1.\end{cases} \tag{23}$$

При этом

$$\begin{cases}\delta_r^{(\gamma)}(\pm1)=\dfrac{1}{\sin\pi\gamma}\left(\dfrac{1-r}{\sqrt{2}\beta}\right)^{2\gamma}+O\left(\left(\dfrac{1-r}{\beta}\right)^{2}\right), & \gamma\in(0,1),\\[2ex] \delta_r^{(1)}(\pm1)=\dfrac{2(1-r)^2}{\pi\beta^2}\ln\dfrac{\beta}{1-r}+O\left(\left(\dfrac{1-r}{\beta}\right)^{2}\right), & \gamma=1,\quad\beta=\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.\end{cases} \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая легко проверяемые равенства

$$\cos\varphi(u,v)=\frac{\sqrt{\lambda(u)\lambda(v)}}{1-\alpha^4}\Big((1+2\alpha^2\cos2u+\alpha^4)\cos(v-u)-2\alpha^2\sin2u\sin(v-u)\Big),$$

$$\sin\varphi(u,v)=\sin(v-u)\sqrt{\lambda(u)\lambda(v)},$$

где $\varphi(u,v)$, $\lambda(v)$ определены в (8), а также воспользовавшись соотношением (14), из (18) получим

$$\hat{\varepsilon}_r(f,x,\alpha)=-\frac{1}{\lambda(u)\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f(\cos v)-f(\cos u)\right)\frac{\lambda(v)\cos(v-u)dv}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(v)\sin^2(v-u)\right)\sin(v-u)}+$$

$$+\frac{2\alpha^2\sin 2u}{(1-\alpha^4)\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f(\cos v)-f(\cos u)\right)\frac{\lambda(v)dv}{1+R^2\lambda(u)\lambda(v)\sin^2(v-u)},\quad R=\frac{2r}{1-r^2},\quad x=\cos u.$$

В силу π-периодичности подынтегральных функций обоих интегралов по переменной интегрирования, придем к представлению

$$\hat{\varepsilon}_r(f,x,\alpha)=-\frac{1}{\lambda(u)\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(\cos(t+u)\right)-f(\cos u)\right)\frac{\lambda(t+u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t+u)\sin^2 t\right)\sin t}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(\cos(t-u)\right)-f(\cos u)\right)\frac{\lambda(t-u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t-u)\sin^2 t\right)\sin t}\right]+$$

$$+\frac{2\alpha^2\sin 2u}{(1-\alpha^4)\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(\cos(t+u)\right)-f(\cos u)\right)\frac{\lambda(t+u)dt}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t+u)\sin^2 t}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(\cos(t-u)\right)-f(\cos u)\right)\frac{\lambda(t-u)dt}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t-u)\sin^2 t}\right],\quad R=\frac{2r}{1-r^2},\ x=\cos u.$$

Тогда

$$|\hat{\varepsilon}_r(f,x,\alpha)|\le\frac{1}{\lambda(u)\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(t+u)-\cos u|^{\gamma}\frac{\lambda(t+u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t+u)\sin^2 t\right)\sin t}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(t-u)-\cos u|^{\gamma}\frac{\lambda(t-u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t-u)\sin^2 t\right)\sin t}\right]+$$

$$+\frac{2\alpha^2|\sin 2u|}{(1-\alpha^4)\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(t+u)-\cos u|^{\gamma}\frac{\lambda(t+u)dt}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t+u)\sin^2 t}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(t-u)-\cos u|^{\gamma}\frac{\lambda(t-u)dt}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t-u)\sin^2 t}\right],\quad R=\frac{2r}{1-r^2},\quad x=\cos u.$$

С другой стороны, это неравенство обращается в точное равенство для функции $f_x(y)=|x-y|^{\gamma}$, которая, очевидно, принадлежит классу $H^{(\gamma)}[-1,1]$. Следовательно,

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x,\alpha)=\left[I_1(+u,r)+I_1(-u,r)\right]+\left[I_2(+u,r)+I_2(-u,r)\right], \tag{25}$$

где

$$I_1(\pm u,r)=\frac{1}{\lambda(u)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(t\pm u)-\cos u|^\gamma \frac{\lambda(t\pm u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t\right)\sin t},$$

$$I_2(\pm u,r)=\frac{2\alpha^2\,|\sin 2u|}{(1-\alpha^4)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(t\pm u)-\cos u|^\gamma \frac{\lambda(t\pm u)dt}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t}.$$

Исследуем асимптотическое поведение каждого из интегралов при $r \to 1$ в зависимости от значения $\gamma\in(0,1]$. Так, для интеграла $I_1(\pm u,r)$ имеем

$$I_1(\pm u,r)=\frac{1}{\lambda(u)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin u\sin t\pm 2\cos u\sin^2\frac{t}{2}\right|^\gamma \frac{\lambda(t\pm u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t\right)\sin t}, \quad x=\cos u.$$

Учитывая, что

$$|A\pm B|^\gamma=|A|^\gamma+\theta|B|^\gamma, \quad \theta\in[-1,1],$$

получим

$$I_1(\pm u,r)=|\sin u|^\gamma\, I_3(u,r)+2^\gamma\theta|\cos u|^\gamma\, I_4(u,r), \quad x=\cos u, \quad r\in(0,1), \tag{26}$$

где

$$I_3(u,r)=\frac{1}{\lambda(u)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda(t\pm u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t\right)\sin^{1-\gamma} t},$$

$$I_4(u,r)=\frac{1}{\lambda(u)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2\gamma}(t/2)\lambda(t\pm u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t\right)\sin t}.$$

Проведем исследование каждого из двух интегралов по отдельности. Нетрудно заметить, что их асимптотическое поведение при $r \to 1$ зависит исключительно от значений, принимаемых переменной интегрирования в непосредственной близости нуля. В этом случае для произвольно малого $\varepsilon > 0$ интеграл $I_3(u,r)$ примет вид

$$I_3(u,r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda^2(u)\sin^2 t\right)\sin^{1-\gamma} t}+\frac{1}{\lambda(u)\pi}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda(t\pm u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t\right)\sin^{1-\gamma} t}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda(u)\pi}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda(t\pm u)\cos t\,dt}{\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t\right)\sin^{1-\gamma} t}\le\frac{c(\varepsilon)}{\lambda^2(u)R^2\pi},$$

где $c(\varepsilon)$ – некоторая величина, зависящая от ε, но не зависящая от u и R, заключаем, что второй интеграл имеет порядок

$$O\left(\left(\frac{1-r^2}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad r \to 1.$$

В первом интеграле выполним замену переменного по формуле $R\lambda(u)\sin t \mapsto t.$ Тогда

$$I_3(u,r) = \frac{1}{\pi[R\lambda(u)]^\gamma} \int_0^{R\lambda(u)\sin\varepsilon} \frac{t^{\gamma-1}dt}{1+t^2} + O\left(\left(\frac{1-r^2}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad r \to 1.$$

Считая выполненными условия (20), при $r \to 1$ и $\gamma \in (0,1]$ интеграл справа примет вид

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1}dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\gamma}{2}}.$$

Отсюда

$$I_3(u,r) = \frac{(1-r)^\gamma}{2\sin\frac{\pi\gamma}{2}[\lambda(u)]^\gamma} + O\left(\left(\frac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad \gamma \in (0,1], \quad r \to 1. \tag{27}$$

Исследуем интеграл $I_4(u,r)$. Перепишем его в виде

$$I_4(u,r) = \frac{1}{2^{2\gamma}\lambda(u)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda(t \pm u)\cos t\,dt}{\cos^{2\gamma}(t/2)\left(1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t\right)\sin^{1-2\gamma} t}.$$

Рассуждая совершенно аналогичным образом, как в случае с интегралом $I_3(u,r)$, заключаем, что

$$I_4(u,r) = \frac{1}{2^{2\gamma}[R\lambda(u)]^{2\gamma}\pi} \int_0^{R\lambda(u)\sin\varepsilon} \frac{t^{2\gamma-1}dt}{1+t^2} + O\left(\left(\frac{1-r^2}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad r \to 1. \tag{28}$$

Опять же, считая выполненными условия (20), при $r \to 1$ и $\gamma \in (0,1)$ интеграл справа примет вид

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\gamma-1}dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2\sin\pi\gamma}.$$

Если $\gamma = 1$, то интеграл в (28) примет вид

$$\int_0^{R\lambda(u)\sin\varepsilon} \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+R^2\lambda^2(u)\sin\varepsilon\right) \sim \ln R\lambda(u), \quad r \to 1.$$

Подставляя полученные выражения в (28), будем иметь

$$I_4(u,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\pi\gamma}\left(\dfrac{1-r}{2\lambda(u)}\right)^{2\gamma} + O\left(\left(\dfrac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\right), & \gamma \in (0,1), \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1-r}{2\lambda(u)}\right)^2 \ln\dfrac{\lambda(u)}{1-r}, + O\left(\left(\dfrac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\right), & \gamma = 1. \end{cases} \tag{29}$$

Из (27) и (29) в (26) придем к выражению

$$I_1(\pm u,r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi\gamma}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^{\gamma}+o\left(\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^{\gamma}\right)+\dfrac{\delta_r^{(\gamma)}(x)}{2}, & \gamma\in(0,1),\\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{2\lambda(u)}+O\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-r)^2}{\lambda^2(u)}\right)+\dfrac{\delta_r^{(1)}(x)}{2}, & \gamma=1,\end{cases}\tag{30}$$

где $\delta_r^{(\gamma)}(x)$ определена в (23).

Рассмотрим теперь интеграл $I_2(\pm u,r)$. Применив аналогичные рассуждения, что и при исследовании интеграла $I_1(\pm u,r)$, получим

$$I_2(\pm u,r)=\frac{2\alpha^2|\sin 2u|}{(1-\alpha^4)\pi}\Big(|\sin u|^{\gamma}\, I_5(u,r)+2^{\gamma}\theta_2\,|\cos u|^{\gamma}\, I_6(u,r)\Big),\quad x=\cos u,\tag{31}$$

для некоторого $\theta_2\in(-1,1)$, где

$$I_5(u,r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\gamma}t\frac{\lambda(t\pm u)dt}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t},\quad I_6(u,r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2\gamma}(t/2)\lambda(t\pm u)dt}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t}.$$

Используя методы исследований из работы [21], заключаем, что равномерно по $r\in[0,1)$, $\alpha\in[0,1)$ и $t\in[0,\ \pi/2]$ при выполнении условия (20)

$$\frac{\sin^{\gamma}t\lambda(t\pm u)}{1+R^2\lambda(u)\lambda(t\pm u)\sin^2 t}-\frac{t^{\gamma}\lambda(u)}{1+R^2\lambda^2(u)t^2}=O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right).$$

Применив последнее соотношение к интегралу $I_5(u,r)$, получим

$$I_5(u,r)=\lambda(u)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\gamma}dt}{1+R^2\lambda^2(u)t^2}+O\left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)}\right)=\frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{\gamma+1}}\int_0^{R\lambda(u)\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\gamma}\,dt}{1+t^2}+O\left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)}\right),\quad r\to 1.$$

При $\gamma\in(0,1)$ и выполнении условий (20) будем иметь

$$\begin{aligned}I_5(u,r)&=\frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{\gamma+1}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma}\,dt}{1+t^2}+O([R\lambda(u)]^{\gamma-1})\right)+O\left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)}\right)=\\&=\frac{\pi\lambda(u)(1-r)^{\gamma+1}}{2\cos\dfrac{\pi\gamma}{2}[\lambda(u)]^{\gamma+1}}+O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right),\quad r\to 1.\end{aligned}\tag{32}$$

Если $\gamma = 1$, то

$$I_5(u,r)=\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\ln\frac{\lambda(u)}{1-r}+O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right),\quad r\to 1.\tag{33}$$

Из (32) и (33) следует, что

$$I_5(u,r)=\begin{cases}\dfrac{\pi\lambda(u)}{2\cos\dfrac{\pi\gamma}{2}}\left(\dfrac{1-r}{\lambda(u)}\right)^{\gamma+1}+O\left(\dfrac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma\in(0,1),\\ \lambda(u)\left(\dfrac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\ln\dfrac{\lambda(u)}{1-r},+O\left(\dfrac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma=1.\end{cases}\tag{34}$$

Наконец рассмотрим интеграл $I_6(u,r)$. Известными рассуждениями он приводится к виду

$$I_6(u,r)=\frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{2\gamma+1}}\int_0^{R\lambda(u)\frac{\pi}{2}}\frac{t^{2\gamma}\,dt}{1+t^2}+O\left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)}\right),\quad r\to 1.$$

При $\gamma\in(0,1/2)$

$$I_6(u,r)=\frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{2\gamma+1}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{2\gamma}\,dt}{1+t^2}+O\left([R\lambda(u)]^{2\gamma-1}\right)\right)+O\left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)}\right)=$$

$$=\frac{\pi\lambda(u)(1-r)^{2\gamma+1}}{2\cos\pi\gamma[\lambda(u)]^{2\gamma+1}}+O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right),\quad r\to 1. \tag{35}$$

При $\gamma=1/2$

$$I_6(u,r)=\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\ln\frac{\lambda(u)}{1-r}+O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right),\quad r\to 1. \tag{36}$$

Если $\gamma\in(1/2,1)$, то

$$I_6(u,r)\le\frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{2\gamma+1}}\int_0^{R\lambda(u)\frac{\pi}{2}}t^{2\gamma-2}\,dt=O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right),\quad r\to 1. \tag{37}$$

Из (35), (36) и (37) следует, что

$$I_6(u,r)=\begin{cases}\dfrac{\pi\lambda(u)}{2\cos\pi\gamma}\left(\dfrac{1-r}{\lambda(u)}\right)^{2\gamma+1}+O\left(\dfrac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\ \lambda(u)\left(\dfrac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\ln\dfrac{\lambda(u)}{1-r},+O\left(\dfrac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma=\dfrac{1}{2},\\ O\left(\dfrac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma=\left(\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases} \tag{38}$$

Подставив (34) и (38) в (31), получим

$$I_2(\pm u,r)=\frac{4\alpha^2\lambda(u)}{1-\alpha^4}\begin{cases}\dfrac{|x|}{2\cos\dfrac{\pi\gamma}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^{\gamma+1}+\mu_r^{(\gamma)}(x), & \gamma\in(0,1),\\ \dfrac{|x|}{\pi}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^2\ln\dfrac{\lambda(u)}{1-r}+\mu_r^{(1)}(x), & \gamma=1,\end{cases} \tag{39}$$

где величины $\mu_r^{(\gamma)}(x)$ равномерно зависят от $x\in[-1,1]$, $r\in(0,1)$, $\alpha\in[0,1)$, $\gamma\in(0,1]$ и имеют больший порядок малости в сравнении с главными частями соответствующих асимптотических разложений.

Из (30) и (39), заключаем, что

$$I_2(\pm u,r)=o(I_1(\pm u,r)),\quad r\to 1,$$

равномерно по $x\in\left[-1,1\right]$, $x=\cos u$. Следовательно, в (25)

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x,\alpha) = 2I_1(\pm u,r) + o\left(I_1(\pm u,r)\right), \quad r\to 1,\ \gamma\in(0,1],$$

и приходим к (21) и (22). Из (25) и (29) следует (24). Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 3. В отличие от уже известных асимптотических выражений верхних граней уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на классах $\bar{H}^{(\gamma)}$, (см., напр., [23]), правые части соотношений (21) и (22) существенным образом зависят от положения точки x на концах отрезка [–1,1], а также от полюсов аппроксимирующей функции. Причем скорости приближений на концах отрезка выше, чем в целом на отрезке.

4. Приближения сопряженной функции с плотностью $|x|^s$. Изучим приближения суммами Абеля – Пуассона (6) индивидуальных сопряженных функций.

Пусть на отрезке [–1,1] задана функция $|x|^s,\ s>0.$ Из (1) следует, что функция, сопряженная к ней, задается соотношением

$$\hat{f}_{|x|^s}(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_0^1 \frac{t^s}{t^2-x^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x\in(-1,1),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим. что при $x = 0$ последний интеграл существует при выполнении условия s > 1. Это замечание будем учитывать в дальнейшем.

Т е о р е м а 4. *Для величины* $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,x,\alpha),\ x\in[-1,1],\ \alpha\in[0,1),\ s\in(1,2),$ *имеют место:*

1) интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,x,\alpha) = \frac{(1-r^2)\sin 2u}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}\left(1-r^2\chi^2(t)\right)dt}{(1+2t^2\cos 2u+t^4)\left(1+2r^2\chi(t)M_2(x)+r^4\chi^2(t)\right)}; \tag{40}$$

2) поточечная оценка

$$|\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,x,\alpha)| \le \hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s,x,\alpha), \quad r\in(0,1), \tag{41}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s,x,\alpha) = \frac{(1-r^2)|\sin 2u|}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left[I_1(\alpha,r,s)+I_2(\alpha,r,s)\right], \tag{42}$$

$$I_1(\alpha,r,s) = \int_\alpha^1 \frac{(1-t^2)^{s-2}t^{1-s}\left(1-r^2\chi^2(t)\right)}{\left(1-r^2\chi(t)\right)^2}dt, \quad I_2(\alpha,r,s) = \int_0^\alpha \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}\left(1-r^2\chi^2(t)\right)}{\left(1-r^2|\chi(t)|\right)^2}dt,$$

$M_2(x)$ *– косинус-дробь Чебышева – Маркова второго порядка,* $x=\cos u,$

$$\chi(t) = \frac{t^2-\alpha^2}{1-\alpha^2t^2}. \tag{43}$$

Оценка (41) *является точной. Равенство достигается при* $x = 0$, *а также на концах отрезка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно (см., напр., [29, с. 403]), что суммы Абеля – Пуассона и частичные суммы рядов Фурье связывает соотношение, которое в нашем случае имеет вид

$$\hat{f}(x,r) = (1-r^2)\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}\hat{s}_{2n}(f,x), \quad 0<r<1,\ x\in(-1,1).$$

Из последнего равенства и (17) нетрудно получить, что

$$\hat{\varepsilon}_r(f,x,\alpha) = (1-r^2)\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}\hat{\delta}_{2n}(f,x,\alpha), \quad 0<r<1,\ x\in(-1,1), \quad x\in[-1,1], \tag{44}$$

где $\hat{\delta}_{2n}(f,x,\alpha)$ – приближения сопряженных функций (1) частичными суммами сопряженных рядов (5). С другой стороны, известно [28], что

$$\hat{\delta}_{2n}(|x|^s,x,\alpha)=\frac{(-1)^n i}{2^{s-1}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\left[\frac{1+\xi^2\alpha^2}{\xi^2+t^2}\overline{\pi^n(\xi)}-\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+t^2\xi^2}\pi^n(\xi)\right]\chi^n(t)dt,$$

где $\pi(\xi)$ из (10), $\chi(t)$ из (43), $\xi=\mathrm{e}^{iu}$, $x=\cos u$.

Подставив последнее интегральное представление в (44) и поменяв порядок интегрирования и суммирования, что оправдано равномерной сходимостью ряда, получим

$$\hat{\varepsilon}_r(|x|^s,x,\alpha)=\frac{i(1-r^2)}{2^{s-1}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\hat{P}_r(t,x)dt,\quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u. \tag{45}$$

где

$$\hat{P}_r(t,x)=\frac{1+\xi^2\alpha^2}{\xi^2+t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n r^{2n}\overline{\pi^n(\xi)}\chi^n(t)-\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+t^2\xi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n r^{2n}\pi^n(\xi)\chi^n(t).$$

В выражении $\hat{P}_r(t,x)$ находятся суммы геометрических прогрессий со знаменателями $-r^2\chi(t)\pi(\xi)$ и $-r^2\chi(t)\overline{\pi(\xi)}$, модули которых, очевидно, меньше единицы при $0<r<1$. Учитывая равенства

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n r^{2n}\chi^n(t)\pi^n(\xi)=\frac{1}{1+r^2\chi(t)\pi(\xi)},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n r^{2n}\chi^n(z)\overline{\pi^n(\xi)}=\frac{1}{1+r^2\chi(t)\overline{\pi(\xi)}},$$

получим

$$\hat{P}_r(t,x)=\frac{(1+\alpha^2\xi^2)(1+\xi^2t^2)\left(1+r^2\chi(t)\pi(\xi)\right)-(\xi^2+\alpha^2)(\xi^2+t^2)\left(1+r^2\chi(t)\overline{\pi(\xi)}\right)}{(1+\xi^2t^2)(\xi^2+t^2)\left(1+2r^2\chi(t)M_2(x)+r^4\chi^2(t)\right)},\quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u.$$

После необходимых преобразований будем иметь

$$\hat{P}_r(t,x)=\frac{-2i\sin 2u(1-\alpha^2t^2)\left(1-r^2\chi^2(t)\right)}{(1+2t^2\cos 2u+t^4)\left(1+2r^2\chi(t)M_2(x)+r^4\chi^2(t)\right)},\quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u.$$

Подставив последнее соотношение в (45), получим (40). Отметим, что ограничения на параметр $s\in(1,2)$ объясняются существованием интеграла в (40).

Для доказательства второго утверждения настоящей теоремы в представлении (40) воспользуемся хорошо известным неравенством

$$\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}\ge 1-t^2,\quad t\in[0,1],\ u\in\mathbb{R}.$$

Тогда

$$|\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,x,\alpha)|\le\frac{(1-r^2)|\sin 2u|}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^{s-2}t^{1-s}\left(1-r^2\chi^2(t)\right)dt}{1+2r^2\chi(t)M_2(x)+r^4\chi^2(t)},\quad x=\cos u. \tag{46}$$

Нетрудно показать, что

$$\sqrt{1+2r^2\chi(t)M_2(x)+r^4\chi^2(t)}\geq\begin{cases}1-r^2\,|\chi(t)|, & t\in(0,\alpha),\\ 1-r^2\chi(t), & t\in(\alpha,1).\end{cases}$$

Разбивая интеграл в (46) на два интеграла по промежуткам $[0,\alpha]$ и $[\alpha,1]$ и применив указанную оценку, найдем

$$|\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,x,\alpha)|\leq\frac{(1-r^2)\,|\sin 2u|}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left[\int\limits_{\alpha}^{1}\frac{(1-t^2)^{s-2}t^{1-s}\left(1-r^2\chi^2(t)\right)}{\left(1-r^2\chi(t)\right)^2}dt+\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{(1-t^2)^{s}t^{1-s}\left(1-r^2\chi^2(t)\right)}{\left(1-r^2\,|\chi(t)|\right)^2}dt\right],$$
$$r\in(0,1).$$

Из последней оценки приходим к (41), чем докажем второе утверждение теоремы 4.

Точность оценки (41) при $x = 0$, а также на концах отрезка проверяется непосредственно, если учесть, что приближения $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,x,\alpha)$ в этих точках обращаются в нуль. Доказательство теоремы 4 завершено.

В формулировке теоремы 4 положим значение параметра $\alpha = 0$. Тогда величина $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,x,0)=\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s,x)$ – есть поточечные приближения сопряженной функции с плотностью $|x|^s$, $s\in(1,2)$, на отрезке [–1,1] суммами Абеля – Пуассона полиномиальных сопряженных рядов Фурье – Чебышева.

Следствие 2 (полиномиальный случай). *Для величины* $\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s,x)$, $r\in(0,1)$, $s\in(1,2)$, *на отрезке* [–1,1] *справедливы:*

1) интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s,x)=\frac{(1-r^2)\sin 2u}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}(1-r^2t^4)\,dt}{(1+2t^2\cos 2u+t^4)(1+2r^2t^2\cos 2u+r^4t^4)},\quad x=\cos u,\quad r\in(0,1);$$

2) оценка сверху

$$|\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s,x)|\leq\frac{(1-r^2)\,|\sin 2u|}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^{s-2}t^{1-s}(1-r^2t^4)}{(1-r^2t^2)^2}dt,\quad r\in(0,1),$$

равномерно по $x, x\in[-1,1]$.

5. Асимптотическое выражение мажоранты приближений. Изучим асимптотическое поведение величины (42) при $r\to 1$. С этой целью в интегралах, в ее правой части выполним замену переменного по формуле $t^2=(1-u)/(1+u)$, $dt=-du/\left((1+u)^{3/2}(1-u)^{1/2}\right)$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s,x,\alpha)=\frac{R\,|\sin 2u|}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left[I_1(\alpha,r,s)+I_2(\alpha,r,s)\right],\quad s\in(1,\,2),\tag{47}$$

где

$$I_1(\alpha,r,s)=\int\limits_0^{\beta}\frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{\beta^2R+2u\beta+u^2R}{(\beta R+u)^2}du,$$

$$I_2(\alpha,r,s)=\int\limits_{\beta}^{1}\frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{\beta^2R+2u\beta+u^2R}{(uR+\beta)^2}du,\quad R=\frac{1-r^2}{1+r^2},\quad\beta=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

Теорема 5. *Для мажоранты* $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s,\alpha)$ *при* $r\to 1$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha) \sim |\sin 2u| \left[\frac{\beta^{s-1} R^{s-1} s}{2\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|} + \sin\frac{\pi s}{2} \frac{2R}{\pi\beta} \int_\beta^1 \frac{u^{s-1}du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} \right], \quad r \to 1, \ s \in (1,2). \tag{48}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем каждый из интегралов, входящих в выражение (47) по отдельности. Изучим их асимптотическое поведение при $r \to 1$. Дальнейшему доказательству теоремы 5 предпошлем две леммы.

Л е м м а 1. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_1(\alpha, r, s) \sim -\frac{\beta^{s-1} R^{s-2} \pi s}{\sin \pi s}, \quad r \to 1, \quad s \in (1,2). \tag{49}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интеграле $I_1(\alpha, r, s)$ выполним замену переменного по формуле $u \mapsto \beta R u$. Тогда

$$I_1(\alpha, r, s) = \beta^{s-1} R^{s-2} \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{u^{s-2}(1+2u+Ru^2)du}{(1-\beta^2 R^2 u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)^2}.$$

Очевидно, что при $r \to 1$ для интеграла $I_1(\alpha, r, s)$ справедливо асимптотическое представление

$$I_1(\alpha, r, s) \sim \beta^{s-1} R^{s-2} \int_0^\infty \frac{u^{s-2}(1+2u)du}{(1+u)^2}, \quad s \in (1,2).$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{u^{s-2}(1+2u)du}{(1+u)^2} = -\frac{\pi s}{\sin \pi s}, \quad s \in (1,2),$$

приходим к (49). Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2**.** *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_2(\alpha, r, s) \sim \frac{2}{\beta} \int_\beta^1 \frac{u^{s-1}du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}, \quad r \to 1, \quad s \in (1,2). \tag{50}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнив в интеграле $I_2(\alpha, r, s)$ предельный переход при $r \to 1$ с выполнением условия (20), сразу же приходим к (50). Лемма 2 доказана.

Из (49), (50) и (47) приходим к (48). Теорема 5 доказана.

С л е д с т в и е 3 (полиномиальный случай). *Положив в формулировке теоремы* 5 *значение параметра* $\alpha = 0$, *получим*

$$|\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s, x)| \le |x|\sqrt{1-x^2}\, \frac{s(1-r)^{s-1}}{\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|}, \quad r \to 1, \ s \in (1,2).$$

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (48) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра α. Другими словами, искать наименьшую мажоранту приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$, на отрезке [–1,1] сопряженными суммами Абеля – Пуассона (6). С этой целью положим

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x) = \inf_{\alpha \in (0,1)} \hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha), \quad r \in (0,1).$$

Справедлива

Т е о р е м а 6. *Для заданного* $s \in (1,2)$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x) \sim |\sin 2u| \left(\frac{s(s-1)}{2\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|} \right)^{\frac{1}{s}} \frac{s}{s-1}(1-r)^{\frac{2}{s}(s-1)}, \quad r \to 1. \tag{51}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем равенство (48). Очевидно, что при постоянных значениях параметра $\beta, \beta \in (0,1),$ порядок убывания правой части при $r \to 1$ не отличается от полиномиального. Пусть $\beta = \beta(r) \to 0$ при $r \to 1$ с обязательным выполнением условия (20). При этом находим, что

$$\int\limits_{\beta}^{1} \frac{u^{s-1}du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} \xrightarrow[r\to 1]{} \int\limits_{0}^{1} \frac{u^{s-1}du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi s}{2}}, \quad s \in (1,2).$$

Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha) \sim |\sin 2u| \left[\frac{\beta^{s-1}R^{s-1}s}{2\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|} + \frac{R}{\beta} \right], \quad r \to 1, \ s \in (1,2). \tag{52}$$

При каждом заданном $s \in (1,2)$ соответствующие значения величины, стоящей в квадратных скобках (52), имеют строгий минимум как функции переменного $\beta, \beta \in (0,1].$ Действительно, функция в квадратных скобках является непрерывно дифференцируемой по $\beta, \beta \in (0,1].$ Естественно искать точку минимума этой функции по β там, где выполняется необходимое условие экстремума. Решая эту задачу, находим, что оптимальным при заданном $s \in (1,2)$ будет значение

$$\beta^* = \left(\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right| \frac{2R^{2-s}}{s(s-1)} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad s \in (1,2), \quad \alpha^* = \sqrt{\frac{1-\beta^*}{1+\beta^*}}.$$

При найденном оптимальном значении параметра, учитывая, что $R \sim 1-r, \ r \to 1,$ из (52) приходим к (51). Теорема 6 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Сравнивая результаты теоремы 6 и следствия 3, приходим к выводу, что при $s \in (1,2)$ специальным выбором параметра α = α(*r*) возможно добиться более высокой скорости приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s$ сопряженными суммами Абеля – Пуассона в сравнении с полиномиальным случаем. Данный результат отражает особенности рациональной аппроксимации в равномерной метрике сопряженных функций с плотностью, имеющей степенную особенность.

Заключение. Изучены аппроксимационные свойства сумм Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Установлено интегральное представление изучаемых сумм Абеля – Пуассона и приближений сопряженной функции на отрезке [–1,1] данным методом. Получены асимптотически точные верхние грани отклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на классах $\overline{H}^{(\gamma)}[-1,1], \ \gamma \in (0,1],$ сопряженных функций $\hat{f},$ определяющихся интегралом (1), когда функция *f* удовлетворяет на отрезке [–1,1] условию Липшица, порядка $\gamma, \ \gamma \in (0,1].$ Проведено исследование приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s, \ s \in (1,2),$ изучаемым методом. Установлено интегральное представление и оценки сверху приближений, найдено асимптотическое выражение мажоранты приближений, получено оптимальное значение параметра, обеспечивающее максимальную скорость убывания мажоранты. Следствием полученных результатов являются асимптотические оценки приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$, суммами Абеля – Пуассона полиномиальных сопряженных рядов Фурье – Чебышева.

Список использованных источников

1. Пыхтеев, Г. Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши / Г. Н. Пыхтеев // Приклад. математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 6. – С. 1074–1082.
2. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Физматлит, 1958. – 543 с.
3. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
4. Butzer, P. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives / P. L. Butzer, R. L. Stens // Теория приближения функций: Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24–28 июля 1975 г.: труды. – М.: Наука, 1977. – С. 49–61.
5. Моторный, В. П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами / В. П. Моторный // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 331–345.
6. Мисюк, В. Р. Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений / В. Р. Мисюк, А. А. Пекарский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 37–40.
7. Priwaloff, J. Sur les fonctions conjuguees / J. Priwaloff // Bull. Soc. Math. Fr. – 1916. – Vol. 44. – P. 100–103. https://doi.org/10.24033/bsmf.965
8. Привалов, И. И. К теории сопряженных тригонометрических рядов / И. И. Привалов // Мат. сб. – 1923. – № 2. – С. 224–228.
9. Kolmogoroff, A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les series de Fourier / A. Kolmogoroff // Fundam. Math. – 1925. – Vol. 7. – P. 24–29. https://doi.org/10.4064/fm-7-1-24-29
10. Riesz, M. Les fonctions conjuguées et les series de Fourier / M. Riesz // C. R. Acad. Sci. – 1924. – Vol. 178. – P. 1464–1467.
11. Riesz, M. Sur les fonctions conjuguees / M. Riesz // Math. Z. – 1927. – Vol. 27, № 1. – P. 218–244. https://doi.org/10.1007/bf01171098
12. Бари, Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций / Н. К. Бари // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – Т. 19, № 5. – С. 285–302.
13. Стечкин, С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 197–206.
14. Русак, В. Н. Равномерная рациональная аппроксимация сопряженных функций / В. Н. Русак, И. В. Рыбаченко // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2013. – №. 3. – С. 83–86.
15. Натансон, И. П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И. П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 72, № 1. – С. 11–14.
16. Тиман, А. Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. / А. Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 74, № 1. – С. 17–20.
17. Штарк, Э. Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона / Э. Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – Т. 13, № 1. – С. 21–28.
18. Жук, В. В. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи средних Фейера и Пуассона ее ряда Фурье / В. В. Жук // Мат. заметки. – 1968. – Т. 4, № 1. – С. 21–32.
19. Русецкий, Ю. И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона / Ю. И. Русецкий // Сиб. мат. журн. – 1968. – Т. 9, № 1. – С. 136–144.
20. Жигалло, Т. В. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона – Чебышева / Т. В. Жигалло // Проблемы управления и информатики. – 2018. – № 3. – С. 1–14.
21. Sz.-Nagy, B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson / B. Sz.-Nagy // Acta Math. Acad. Sci. Huugar. – 1950. – Vol. 1, № 2–4. – P. 183–188. https://doi.org/10.1007/bf02021310
22. Баскаков, В. А. Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абеля – Пуассона / В. А. Баскаков // Применение функционального анализа в теории приближений. – Калинин, 1975. – Вып. 5. – С. 14–20.
23. Жигало, К. М. Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона / К. М. Жигало, Ю. И. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 1. – С. 43–52.
24. Жигало, К. М. Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля – Пуассона / К. М. Жигало, Ю. И. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 1. – С. 73–82.
25. Китбалян, А. А. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам / А. А. Китбалян // Изв. АН Армян. ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1963. – Т. 16, № 6. – С. 3–24.
26. Джрбашян, М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М. М. Джрбашян // Изв. АН Армян. ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.

27. Rouba, Y. On one system of rational Chebyshev – Markov fractions / Y. Rouba, P. Patseika, K. Smatrytski // Anal. Math. – 2018. – Vol. 44, № 1. – P. 115–140. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7

28. Ровба, Е. А. Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова / Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко // Изв. вузов. Математика. – 2020. – № 9. – С. 68–84.

29. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 1970. – Т. 2. – 800 с.

References

1. Pykhteev G. N. On the evaluation of certain singular integrals with a kernel of the cauchy type. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, no. 6, pp. 1536–1548. https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90010-3

2. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1958. 543 p. (in Russian).

3. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p. (in Russian).

4. Butzer P. L., Stens R. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives. *Teoriia priblizheniia funktsii: Mezhdunarodnaya konferentsiya po teorii priblizheniia funktsii, Kaluga, 24–28 iyulya 1975 g.: tr.* [Approximation Theory of Functions: International Conference on the Theory of Approximation of Functions, Kaluga, 24–28 July 1975. Proceedings]. Moscow, Nauka Publ., 1977, pp. 49–61 (in Russian).

5. Motornyi V. P. Approximation of some classes of singular integrals by algebraic polynomials. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 2001, vol. 53, no. 3, pp. 331–345 (in Russian).

6. Misiuk V. R., Pekarskii A. A. Conjugate functions on an interval and relations for their best uniform polynomial approximations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 2, pp. 37–40 (in Russian).

7. Priwaloff J. Sur les fonctions conjuguées. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1916, vol. 44, pp. 100–103. https://doi.org/10.24033/bsmf.965

8. Privalov I. I. On the theory of conjugate trigonometric series. *Matematicheskii sbornik = Sbornik: Mathematics*, 1923, no. 2, pp. 224–228 (in Russian).

9. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les series de Fourier. *Fundamenta Mathematicae*, 1925, vol. 7, pp. 24–29 (in French). https://doi.org/10.4064/fm-7-1-24-29

10. Riesz M. Les fonctions conjuguées et les series de Fourier. *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*, 1924, vol. 178, pp. 1464–1467 (in French).

11. Riesz M. Sur les fonctions conjuguees. *Mathematische Zeitschrift*, 1927, vol. 27, no. 1, pp. 218–244 (in French). https://doi.org/10.1007/bf01171098

12. Bari N. K. Best approximation by trigonometric polynomials of two conjugate functions. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya = Izvestiya: Mathematics*, 1955, vol. 19, no. 5, pp. 285–302 (in Russian).

13. Stechkin S. B. Best approximation of conjugate functions by trigonometric polynomials. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya = Izvestiya: Mathematics*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 197–206 (in Russian).

14. Rusak V. N. Uniform rational approximation of conjugate functions. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika = Bulletin of the Belarusian State University. Series 1. Physics. Mathematics. Computer science*, 2013, vol. 3, pp. 83–86 (in Russian).

15. Natanson I. P. On the order of approximation of a continuous 2π-periodic function using its Poisson integral. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1950, vol. 72, no. 1, pp. 11–14 (in Russian).

16. Timan A. F. Exact estimate of the remainder in the approximation of periodic differentiable functions by Poisson integrals. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1950, vol. 74, no. 1, pp. 17–20 (in Russian).

17. Shtark E. L. Complete asymptotic expansion for the upper bound for the deviation of functions from Lip1 from the singular Abel – Poisson integral. *Matematicheskie zametki = Mathematical Notes*, 1973, vol. 13, no. 1, pp. 21–28 (in Russian).

18. Zhuk V. V. On the order of approximation of a continuous 2π -periodic function by means of the Fejér and Poisson means of its Fourier series. *Matematicheskie zametki = Mathematical Notes*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 21–32 (in Russian).

19. Rusetskii Yu. I. Approximation of continuous functions on an interval by Abel – Poisson means. *Sibirskii matematicheskii zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 1968, vol. 9, no. 1, pp. 136–144 (in Russian).

20. Zhigallo T. V. Approximation of functions satisfying the Lipschitz condition on a finite segment of the real axis by Poisson – Chebyshev integrals. *Problemy upravleniia i informatiki = Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, no. 3, pp. 1–14 (in Russian).

21. Sz.-Nagy B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1950, vol. 1, no. 2–4, pp. 183–188 (in French). https://doi.org/10.1007/bf02021310

22. Baskakov V. A. Asymptotic estimates for the approximation of conjugate functions by conjugate Abel – Poisson integrals. *Primenenie funktsional'nogo analiza v teorii priblizhenii = Application of Functional Analysis in Approximation Theory*. Kalinin, 1975, iss. 5, pp. 14–20 (in Russian).

23. Zhigalo K. M., Kharkevich Yu. I. The asymptotic behavior of the visualization of the class of differential functions of the set of the ith harmonic Poisson integrals. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 1, pp. 43–52 (in Ukrainian).

24. Zhigalo K. M., Kharkevich Yu. I. The approximation of conjugations of differential functions ix by Abel – Poisson integrals. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 2009, vol. 61, no. 1, pp. 73–82 (in Ukrainian).

25. Kitbalian A. A. Expansions in generalized trigonometric systems. *Izvestiia AN Armianskoi SSR, Seriya fiziko-matematicheskikh nauk* [Bulletin of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, Series Physical and Mathematical Sciences], 1963, vol. 16, no. 6, pp. 3–24 (in Russian).

26. Dzhrbashian M. M. On the theory of Fourier series in rational functions. *Izvestiia AN Armianskoi SSR, Seriya fiziko-matematicheskikh nauk* [Bulletin of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, Series Physical and Mathematical Sciences], 1956, vol. 9, no. 7, pp. 3–28 (in Russian).

27. Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. On one system of rational Chebyshev–Markov fractions. *Analysis Mathematica*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 115–140. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7

28. Rovba E. A., Patseika P. G. Approximations of conjugate functions by partial sums of conjugate Fourier series with respect to one system of algebraic fractions of Chebyshev – Markov. *Izvestiya vuzov. Matematika = Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, no. 9, pp. 61–75. https://doi.org/10.3103/s1066369x20090066

29. Fikhtengol'ts G. M. *Differential and Integral Calculus Course. Vol. 2*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1970. 800 p. (in Russian).

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: rovba.ea@gmail.com

Information about the authors

Pavel G. Patseika – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grod no (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Be larus). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500

Yauheni A. Rouba – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). Email: rovba.ea@gmail.com