ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.537.38
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184

Поступила в редакцию 19.03.2021
Received 19.03.2021

И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ *p*-ГОЛОМОРФНЫХ И *p*-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрена взаимосвязь условий *p*-дифференцируемости, *p*-голоморфности и существования производной функции *p*-комплексного переменного. Найден общий вид *p*-голоморфной функции. Получены достаточные условия *p*-аналитичности и локальной обратимости. Доказаны принципы сохранения области и максимума нормы для *p*-голоморфной функции и теорема единственности.

Ключевые слова: дуальные числа, кольцо *p*-комплексных чисел, *p*-комплексные функции, делители нуля, *p*-голоморфность, *p*-аналитичность, локальная обратимость, принцип сохранения области, принцип максимума нормы, теорема единственности

Для цитирования. Васильев, И. Л. О некоторых свойствах *p*-голоморфных и *p*-аналитических функций / И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 176–184. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184

Igor L. Vassilyev, Vladimir V. Dovgodilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus

ON SOME PROPERTIES OF *p*-HOLOMORPHIC AND *p*-ANALYTIC FUNCTIONS

Abstract. In this article the relationship between the conditions of *p*-differentiability, *p*-holomorphycity, and the existence of the derivative of a function of a *p*-complex variable is considered. The general form of a *p*-holomorphic function is found. The sufficient conditions for *p*-analyticity and local invertibility are obtained. The open mapping theorem and the principle of maximum of the norm for a *p*-holomorphic function and the uniqueness theorem are proved.

Keywords: dual numbers, ring of p-complex numbers, p-complex functions, zero divisors, *p*-holomorphycity, *p*-analyticity, local invertibility, domain preservation principle, open mapping theorem, norm maximum principle, uniqueness theorem

For citation. Vassilyev I. L., Dovgodilin V. V. On some properties of *p*-holomorphic and *p*-analytic function. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 176–184 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184

Введение. Теория *p*-комплексных (дуальных) чисел и функций *p*-комплексных переменных в математической литературе освещена недостаточно. Имеющиеся результаты, приведенные в [1–3], касаются в основном алгебраических свойств кольца *p*-комплексных чисел, а также непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости *p*-комплексных функций. В работе [4] исследованы некоторые свойства *p*-комплексных степенных рядов. Дуальные числа находят применение в различных областях математики и физики, поэтому актуальным является дальнейшее изучение свойств *p*-комплексных функций. В статье рассмотрены некоторые свойства *p*-голоморфных и *p*-аналитических функций, а также изучены вопросы их локальной обратимости, доказаны принципы сохранения области и максимума нормы, а также теорема единственности.

О *p*-голоморфных и *p*-аналитических функциях. Пусть $\mathbb{C}_p$ – кольцо *p*-комплексных чисел: чисел вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jy и только они. Топология на $\mathbb{C}_p$ порождается следующей нормой: $\| z \| = \| x + jy \| = \max\{| x |, | y |\}$. Эту норму будем называть параболической. Модулем *p*-комплексного числа называется $| z | = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Более подробно с *p*-комплексными числами можно ознакомиться в работах [1] и [4].) Пусть $D \subset \mathbb{C}_p$ – область.

Рассмотрим p-комплексную в области D функцию $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$, где функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в области $D^*=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : z=x+jy\in D\}$.

Определение 1. Говорят, что функция $f: D\subset\mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p$ имеет производную в точке $z\in\mathbb{C}_p$, если существует конечный предел

$$f'(z)=\lim_{\substack{h\to 0,\\ \mathrm{Re}h\neq 0}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

число $f'(z)$ называется производной в точке z.

Определение 2. Функция $f: D\subset\mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p$ называется p-дифференцируемой в $z\in\mathbb{C}_p$, если $\exists A\in\mathbb{C}_p$ такое, что

$$f(z+h)-f(z)=Ah+o(\|h\|),$$

при $\|h\|\to 0,\ \mathrm{Re}h\neq 0$.

Нетрудно проверить, что p-дифференцируемость в точке равносильна существованию производной в ней.

Теорема 1. *Функция $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ имеет производную в $D\subset\mathbb{C}_p$ тогда и только тогда, когда $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в $D^*\subset\mathbb{R}^2$ и выполнены следующие аналоги условий Коши – Римана*

$$\begin{cases} u'_x(x,y)=v'_y(x,y),\\ u'_y(x,y)=0, \end{cases} \tag{1}$$

причем $f'(z)=f'(x+jy)=u'_x(x,y)+jv'_x(x,y)$.

Доказательство. Допустим $f(z)$ имеет производную в точке $z\in D$. Возьмем $z=x+jy$ и $h=\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда

$$f'(z)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda,y)-f(x,y)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\big(u(x+\lambda,y)+jv(x+\lambda,y)\big)-\big(u(x,y)+jv(x,y)\big)}{\lambda}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{u(x+\lambda,y)-u(x,y)}{\lambda}+j\frac{v(x+\lambda,y)-v(x,y)}{\lambda}\right)=u'_x+jv'_x.$$

Теперь пусть $h=\lambda+j\lambda$. Тогда

$$f'(z)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda,y+\lambda)-f(x,y)}{\lambda(1+j)}=$$

$$=(1-j)\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{u(x+\lambda,y+\lambda)-u(x,y)}{\lambda}+j\frac{v(x+\lambda,y+\lambda)-v(x,y)}{\lambda}\right)=$$

$$=(1-j)\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{(u'_x\lambda+u'_y\lambda)+\alpha(\lambda)\lambda}{\lambda}+j\frac{(v'_x\lambda+v'_y\lambda)+\beta(\lambda)\lambda}{\lambda}\right)=$$

$$=(1-j)\big(u'_x+u'_y+j(v'_x+v'_y)\big),$$

где $\lim\limits_{\lambda\to 0}\alpha(\lambda)=0$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\beta(\lambda)=0$.

Сравнивая два выражения для $f'(z)$, получаем

$$u'_x+jv'_x=(1-j)\big(u'_x+u'_y+j(v'_x+v'_y)\big)=u'_x+u'_y+j(v'_x+v'_y-u'_x-u'_y),$$

откуда и следует, что $u'_x=v'_y$ и $u'_y=0$.

Теперь, пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x,y)\in D^*$ и удовлетворяют равенствам $u'_x=v'_y$ и $u'_y=0$. Тогда, при $h=s+jt$

$$f(z+h)-f(z)=\big(u(x+s,y+t)-u(x,y)\big)+j\big(v(x+s,y+t)-v(x,y)\big)=$$

$$= (u'_x s + u'_y t) + \alpha(h)h + j(v'_x s + v'_y t) + \beta(h)h = (u'_x + jv'_x)s + ju'_x t + \alpha(h)h + \beta(h)h =$$

$$= (u'_x + jv'_x)\left(\frac{h+\overline{h}}{2}\right) + u'_x\left(\frac{h-\overline{h}}{2}\right) + \big(\alpha(h)+\beta(h)\big)h =$$

$$= u'_x h + jv'_x h - jv'_x\frac{h}{2} + jv'_x\frac{\overline{h}}{2} + u'_x\frac{\overline{h}}{2} - u'_x\frac{\overline{h}}{2} + \big(\alpha(h)+\beta(h)\big)h =$$

$$= (u'_x + jv'_x)h - jv'_x\frac{s+jt}{2} + jv'_x\frac{s-jt}{2} + \big(\alpha(h)+\beta(h)\big)h =$$

$$= (u'_x + jv'_x)h - jv'_x\frac{s}{2} + jv'_x\frac{s}{2} + \big(\alpha(h)+\beta(h)\big)h = (u'_x + jv'_x)h + \nu(h)h,$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\nu(h) = \lim\limits_{h\to 0}\big(\alpha(h)+\beta(h)\big) = 0$. Отсюда следует, что

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0,\\ \mathrm{Re}h\neq 0}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = u'_x + jv'_x.$$

Таким образом, $f(z)$ имеет производную в области, где выполнены условия (1). Теорема 1 доказана.

Определение 3. Функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ называется p-голоморфной в $z_0 = x_0 + jy_0 \in \in \mathbb{C}_p$, если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и выполнены условия (1).

Замечание 1. Термин «p-голоморфность» объясняется тем, что функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ являются решениями параболической системы уравнений (1).

Лемма 1. *Если* $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ *удовлетворяет равенствам* $u'_x = v'_y$ *и* $u'_y = 0$ *в некоторой области, то она представима в виде* $f(z) = u(x) + j\big(yu'(x) + \varphi(x)\big)$, *где функция* $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *дифференцируема, а* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывна.*

Доказательство. Поскольку $u'_y = 0$, тогда $u(x,y) = u(x)$. Таким образом, получаем, что $u'(x) = u'_x = v'_y$, интегрируя по y получаем $v(x,y) = yu'(x) + \varphi(x)$. Лемма 1 доказана.

Очевидно, что функции данного вида p-голоморфны при условии, что $\varphi(x)$ дифференцируема, а $u(x)$ дважды дифференцируема.

Теорема 2. *Функция $f(z)$ p-голоморфна в z тогда и только тогда, когда представима в виде*

$$f(z) = f(x) + j f'(x)y. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ p-голоморфна в $z = x + jy$. Тогда $f(z) = u(x) + j\big(yu'(x) + \varphi(x)\big)$. При $y = 0$ получаем, что $f(x) = u(x) + j\varphi(x)$, а значит, $u(x) = f(x) - j\varphi(x)$ и $u'(x) = f'(x) - j\varphi'(x)$, следовательно,

$$f(z) = \big(f(x) - j\varphi(x)\big) + j\big(yu'(x) + \varphi(x)\big) = f(x) - j\varphi(x) + jyu'(x) + j\varphi(x) =$$
$$= f(x) + jy\big(f'(x) - j\varphi'(x)\big) = f(x) + jyf'(x),$$

что и требовалось получить.

Теперь пусть $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ представима в виде (2).

При $y = 0$ получаем, что $f(x) = u(x,0) + jv(x,0)$, а $f'(x) = u'_x(x,0) + jv'_x(x,0)$. Тогда по формуле (2)

$$f(z) = \big(u(x,0) + jv(x,0)\big) + jy\big(u'_x(x,0) + jv'_x(x,0)\big) =$$
$$= u(x,0) + j\big(yu'_x(x,0) + v(x,0)\big).$$

Очевидно, что данная функция удовлетворяет условиям (1). Теорема 2 доказана.

Далее нам понадобится следующая теорема из вещественного анализа, доказательство которой вытекает из [5, теорема 15.18, с. 261] и которое мы не приводим.

Теорема 3. *Пусть* $F: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *дифференцируема в окрестности точки* $(a,b)\in D$. *Тогда*

$$|F(a+s, b+t) - F(a,b)| \le \sup_{0<\theta<1}\left| F'(a+\theta s, b+\theta t)\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\right|. \tag{3}$$

Поставим в соответствие функции $f(z)$ отображение $F(x,y)=\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$, будем называть его сопутствующим. Его матрица Якоби

$$F'(x,y)=\begin{bmatrix} u'_x(x,y) & u'_y(x,y) \\ v'_x(x,y) & v'_y(x,y) \end{bmatrix}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского и теоремы 3 получим

$$|F(a+s,b+t)-F(a,b)|=\left|\begin{bmatrix} u(a+s,b+t)-u(a,b) \\ v(a+s,b+t)-v(a,b) \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}\right|=$$

$$=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\le \sup_{0<\theta<1}\sqrt{(u'_x s+u'_y t)^2+(v'_x s+v'_y t)^2}\le$$

$$\le \sup_{0<\theta<1}\sqrt{\left((u'_x)^2+(u'_y)^2+(v'_x)^2+(v'_y)^2\right)(s^2+t^2)},$$

где все производные вычислены в точке $(a+\theta s, b+\theta t)$.

Таким образом, из (3) следует

$$|F(a+s,b+t)-F(a,b)|\le \sup_{0<\theta<1}\sqrt{\left((u'_x)^2+(u'_y)^2+(v'_x)^2+(v'_y)^2\right)(s^2+t^2)}. \tag{4}$$

Пусть $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ p-голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}_p$.
А значит, $u'_y=0,\ u'_x=v'_y,\ f'(z)=u'_x+jv'_x,\ \|f'(z)\|=\max\{|u'_x|,|v'_x|\}$. Тогда $|u'_x|\le\|f'(z)\|$, $|v'_x|\le\|f'(z)\|, |v'_y|=|u'_x|\le\|f'(z)\|$. Заметим, что

$$\|f(z+h)-f(z)\|=\|\Delta u+j\Delta v\|=\max\{|\Delta u|,|\Delta v|\}\le\sqrt{|\Delta u|^2+|\Delta v|^2},$$

и

$$|h|=|s+jt|=\sqrt{s^2+t^2}\le\sqrt{2}\max\{|s|,|t|\}=\sqrt{2}\,\|h\|.$$

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ p-голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}_p$. Тогда*

$$\|f(z+h)-f(z)\|\le\sqrt{6}\max_{\tau\in[z,z+h]}\|f'(\tau)\|\|h\|.$$

Доказательство. Пусть отрезок $[z,z+h]\subset D$. В силу теоремы 3 и следующего из него неравенства (4), а также приведенных выше рассуждений

$$\|f(z+h)-f(z)\|\le\sqrt{|\Delta u|^2+|\Delta v|^2}\le\max_{\tau\in[z,z+h]}\sqrt{\left((u'_x)^2+(u'_y)^2+(v'_x)^2+(v'_y)^2\right)(s^2+t^2)}\le$$

$$\le\max_{\tau\in[z,z+h]}\sqrt{\left(\|f'(\tau)\|^2+\|f'(\tau)\|^2+\|f'(\tau)\|^2\right)|h|^2}\le$$

$$\le\max_{\tau\in[z,z+h]}\sqrt{3\|f'(\tau)\|^2\,2\|h\|^2}=\sqrt{6}\max_{\tau\in[z,z+h]}\|f'(\tau)\|\|h\|.$$

Что и требовалось доказать.

Определение 4. Функция $f(z)$ называется p-аналитической в точке a, если существует ее окрестность $U(a)$ такая, что для любой точки $z\in U(a)$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k, \tag{5}$$

где $c_k\in\mathbb{C}_p$, $k=0,1,\ldots$.

Теорема 5. *Пусть функция f бесконечно p-дифференцируема в $D\subset\mathbb{C}_p$, и $\|f^{(n)}(z)\|\le Mn!$ при любых $n\in\mathbb{N}$, где $z\in U(a)=\{\|z-a\|\le R\}$, $R<1$, достаточно мало так, что $U(a)\subset D$. Тогда f разлагается в ряд* (5)*, равномерно сходящийся в $U(a)$.*

Доказательство. Пусть $z \in U(a)$. Перепишем $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + r_n(z) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + r_n(z) = T_n(z,a) + r_n(z).$$

Т. е. $r_n(z) = f(z) - T_n(z,a)$.

Рассмотрим функцию $F(t) = f(z) - T_n(z,t) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(z-t)^k$. Очевидно, что она p-голоморфна. Кроме того, $F(z) = 0$ и $F(a) = r_n(z)$, а ее производная

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(z-t)^n.$$

В силу теоремы 4 и условия $\| f^{(n)}(z) \| \le Mn!$ при $\| z-a \| \le R$, где $R < 1$ достаточно мало, и учитывая $\| (z-t)^n \| \le n \| z-t \|^n$, получаем

$$\| r_n(z) \| = \| F(z) - F(a) \| \le \sqrt{6} \max_{\tau \in [a,z]} \| F'(\tau) \| \| z-a \| \le$$
$$\le 2\sqrt{6} M \frac{(n+1)! n R^n}{n!} \| z-a \| \le 2\sqrt{6} M n (n+1) R^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Таким образом, f p-аналитична в точке $a \in D$ и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

причем ряд сходится равномерно в $U(a)$. Теорема 5 доказана.

Замечание 2. Из теоремы 5 следует, что ряд (5) есть ряд Тейлора своей суммы.

Теорема 6. *Пусть функция f бесконечно p-дифференцируема в $D \subset \mathbb{C}_p$, и* $\| f^{(n)}(z) \| \le Me^{AR^m}$ *при любых $n \in \mathbb{N}$, где $z \in U(a) = \{\| z-a \| \le R\} \subset D$. Тогда f разлагается в ряд* (5), *равномерно сходящийся в* $U(a)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. В силу теоремы 4 и $\| f^{(n)}(z) \| \le Me^{AR^m}$ при $\| z-a \| \le R$ и учитывая $\| (z-t)^n \| \le n \| z-t \|^n$, получаем

$$\| r_n(z) \| = \| F(z) - F(a) \| \le \sqrt{6} \max_{\tau \in [a,z]} \| F'(\tau) \| \| z-a \| \le$$
$$\le 2\sqrt{6} M \frac{e^{AR^m} n R^n}{n!} \| z-a \| \le 2\sqrt{6} M \frac{e^{AR^m} R^{n+1}}{(n-1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Таким образом, f p-аналитична в точке $a \in D$ и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

причем ряд сходится равномерно в $U(a)$. Теорема 6 доказана.

О локальной обратимости p-голоморфных функций. Пусть функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ p-голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$. В отличие от классических голоморфных функций условие $f'(z) \ne 0$ не является достаточным даже для локальной обратимости p-голоморфных функций. Например, для функции $f(z) = jz = jx$ производная $f'(z) = j$ всюду в $\mathbb{C}_p$, однако эта функция не обратима ни в одной точке, так как j делитель нуля. При более сильных ограничениях локальная обратимость p-голоморфных функций имеет место.

Теорема 7. *Пусть функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ p-голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$ и $a = \alpha + j\beta \in D$. Если $u'_x(\alpha,\beta) \ne 0$, то существуют открытая окрестность A точки a и откры-*

тая окрестность B точки $b = f(a)$ *такие, что функция* $f: A \to B$ *имеет обратную* $f^{-1}: B \to A$, *которая непрерывно p-дифференцируема в B, и*

$$\{f^{-1}\}'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \tag{6}$$

где $w = f(z)$. *Если же* $u'_x(x, y) \equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, *то f не обратима в соответствующей окрестности точки a.*

Доказательство. Поставим функции f в соответствие непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ сопутствующее отображение $F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$. Его якобиан

$$J = \det F'(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & 0 \\ v'_x & u'_x \end{vmatrix} = (u'_x)^2,$$

$J(\alpha, \beta) = \det F'(\alpha, \beta) \neq 0$. В силу теоремы об обратном отображении существуют открытая окрестность A^* точки $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ и открытая окрестность B^* точки $F(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ такие, что отображение $F: A^* \to B^*$ имеет обратное $F^{-1}: B^* \to A^*$. Это отображение также непрерывно дифференцируемо и

$$\{F^{-1}\}'(u, v) = \{F'(x, y)\}^{-1}. \tag{7}$$

Отображению $F^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$ поставим в соответствие функцию

$$z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v).$$

Окрестностям A^* и B^* соответствуют окрестности A и B точек $a = \alpha + j\beta$ и $b = f(a)$. Тогда функции $f: A \to B$ и $f^{-1}: B \to A$ являются обратными друг к другу.

Теперь докажем (6). Имеем:

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & 0 \\ v'_x & u'_x \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\{F'(x, y)\}^{-1} = \begin{bmatrix} u'_x / J & 0 \\ -v'_x / J & u'_x / J \end{bmatrix},$$

$$\{F^{-1}\}'(u, v) = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}.$$

Из (7) получим, что

$$x'_u = \frac{u'_x}{J}, \quad x'_v = 0, \quad y'_u = \frac{-v'_x}{J}, \quad y'_v = \frac{u'_x}{J}.$$

Для функции $z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v)$ имеем

$$x'_u = y'_v = \frac{u'_x}{J}, \quad x'_v = 0.$$

Следовательно, f^{-1} – p-голоморфна в B, тогда

$$\{f^{-1}\}'(w) = x'_u + jy'_u = \frac{u'_x - jv'_x}{J} = \frac{1}{u'_x + jv'_x} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Пусть теперь $u'_x(x,y) \equiv 0$ в некоторой окрестности A^* точки (α,β). Функция f в соответствующей окрестности A точки a имеет вид $f(z) = c + jv(x)$. Рассмотрим произвольный интервал $Y = \{z = x_0 + jy\} \subset A$. Его образом является точка $w_0 = c + jv(x_0)$. Таким образом, функция f не обратима в A, что и требовалось доказать.

Принцип сохранения области. Для p-голоморфных функций классический принцип сохранения области из комплексного анализа не имеет места. Например, образом области

$$D = \{z = x + jy \in \mathbb{C}_p : \alpha < x < \beta; \mu < y < \nu\}$$

при отображении $f(z) = jz = jx$ будет интервал $\{jy \in \mathbb{C}_p : \alpha < y < \beta\}$, который не является областью в $\mathbb{C}_p$. Тем не менее верна

Теорема 8. *Пусть функция* $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ *p-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_p$ *и* $u'_x(x,y) \neq 0$ *в области* D^*. *Тогда множество* $E = f(D)$ *также является областью. Если же* $u'_x(x,y) \equiv 0$ *в области* D^*, *то* $f(D)$ *– интервал вида* $\gamma = \{z = c + jy : m < y < M\}$, *где* $m = \inf_{z\in D} v(x)$, $M = \sup_{z\in D} v(x)$.

Доказательство. Пусть $u'_x(x,y) \neq 0$ для любой точки $(x,y) \in D^*$. Сперва докажем, что $E = f(D)$ открытое множество. Выберем произвольную точку $w_0 = f(z_0) \in E$, где $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. В силу теоремы 7 найдутся открытые окрестности A и B точек z_0 и w_0 соответственно такие, что функция $f : A \to B$ имеет обратную $f^{-1} : B \to A$. Тогда для любой $w_1 \in B$ существует единственная $z_1 \in A$ такая, что $z_1 = f^{-1}(w_1)$ и $w_1 = f(z_1) \in E$. Следовательно E – открытое множество.

Теперь докажем, что E – связное множество. Для открытых множеств связность эквивалентна линейной связности [6, с. 24]. Пусть $w_1, w_2 \in E$, $z_1 \in D$ – один из прообразов w_1, $z_2 \in D$ – один из прообразов w_2. Найдется путь $\gamma : z = z(t)$, $t \in [0,1]$, связывающий в D точки z_1 и z_2. Из непрерывности f вытекает, что образ $\gamma^* : z = f[z(t)]$, $t \in [0,1]$, будет путем, связывающим в E точки w_1 и w_2. Очевидно, что $\gamma^* \subset E$. Следовательно, E – связное множество.

Таким образом, при $u'_x(x,y) \neq 0$ в области D^* множество $E = f(D)$ является областью.

Пусть теперь $u'_x(x,y) \equiv 0$ во всей D^*. Тогда функция f имеет вид $f(z) = c + jv(x)$. Обозначим $m = \inf_{z\in D} v(x)$ и $M = \sup_{z\in D} v(x)$. Пусть $z_0 = x_0 + jy_0$ – произвольная точка из D. Тогда $w_0 = f(z_0) = c + jv(x_0)$. Следовательно, при этом отображении образом области D будет интервал $\gamma = \{z = c + jy : m < y < M\}$, который не является областью в $\mathbb{C}_p$. Теорема 8 доказана.

Принцип максимума нормы. Теорема 9. *Пусть функция* $w = f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ *p-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_p$ *и* $u'_x(x,y) \neq 0$ *в области* D^*. *Тогда функция* $\| f(z) \|$ *не может достигать максимума во внутренней точке области D.*

Доказательство. В силу теоремы 8 множество $E = f(D)$ является областью. Пусть $\| f(z) \|$ достигает максимума в $z_0 \in D$. Обозначим $w_0 = f(z_0) \in E$. Найдутся открытые окрестности A и B точек z_0 и w_0 соответственно такие, что функция $f : A \to B$ имеет обратную. Очевидно, что в окрестности B найдется сколько угодно близкая к w_0 точка w_1 такая, что $\| w_1 \| > \| w_0 \|$. Тогда в A найдется точка z_1 такая, что $w_1 = f(z_1)$. Это противоречит тому, что $\| f(z) \|$ достигает максимума в z_0. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 9 *функция* $f \in C(\overline{D})$, *то* $\| f(z) \|$ *достигает максимума на границе* ∂D.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 9 *функция* $f \neq 0$ *для любой* $z \in D$, *то* $\| f(z) \|$ *не может достигать минимума внутри D.*

Нули аналитических функций и теорема единственности. В отличие от классических голоморфных функций, нули которых всегда изолированы, если функция не тождественный нуль, нули p-голомофной функции могут быть не изолированы. Например, функции z^2 и z^3 имеют кратный корень 0, а следовательно, и вертикальную прямую нулей $I = \{z = jy : y \in \mathbb{R}\}$.

Для p-аналитических функций не будет выполняться теорема единственности в классической формулировке из комплексного анализа, что видно из примера выше. Действительно, обе функции равны на прямой I, однако ни в одной области они не будут совпадать. Тем не менее аналог теоремы единственности будет выполняться при более сильных ограничениях.

Сначала докажем следующее.

Лемма 2. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *аналитична на интервале* $I\subset\mathbb{R}$, *а точка* $x_0\in I$ – *нуль этой функции. Если в некоторой окрестности точки* x_0 *функция f отлична от тождественного нуля, то существует проколотая окрестность* $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ *такая, что для любой* $x\in U(x_0)\setminus\{x_0\}: f(x)\neq 0.$

Доказательство. Функция *f* – аналитична, поэтому разложим ее в ряд

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

сходящийся в некоторой окрестности $U_1(x_0)$. Заметим, что $a_0=f(x_0)=0$. Так как *f* отлична от тождественного нуля в $U_1(x_0)$, то среди остальных коэффициентов есть отличные от нуля. Пусть $a_n\neq 0$, а $a_0=a_1=...=a_{n-1}=0$. Тогда

$$f(x)=a_n(x-x_0)^n+a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+a_{n+2}(x-x_0)^{n+2}+...=(x-x_0)^n\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x)=a_n+a_{n+1}(x-x_0)+a_{n+2}(x-x_0)^2+...,$$

причем этот ряд сходится в той же окрестности $U_1(x_0)$. Так как $\varphi(x)$ – аналитична и $\varphi(x_0)=a_n$, то существует такая окрестность $U(x_0)\subset U_1(x_0)$, что в любой ее точке $\varphi(x)\neq 0$. Лемма 2 доказана.

Теорема 10. *Пусть функции* f_1 *и* f_2 *p-аналитичны в области* $D\subset\mathbb{C}_p$. *Также пусть* $f_1(z_n)=f_2(z_n)$, *где последовательность* $z_n\in D$, $n=0,1,...$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0\in D$. *Если* $\forall n\in\mathbb{N}$: $\mathrm{Re}z_n\neq\mathrm{Re}z_0$, *то* $f_1\equiv f_2$ *всюду в D.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $f:=f_1-f_2=0$ всюду в *D*. Введем в рассмотрение множество $\Phi:=\{z\in D: f(z)=0\}$. Покажем, что $\Phi=D$. Рассмотрим его внутренность $\mathrm{int}\,\Phi\subset\Phi$. Пусть $c_k=a_k+jb_k$, $z_0=x_0+jy_0$, $z=x+jy$. Нетрудно убедиться, что

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k+j\left((y-y_0)\sum_{k=1}^{\infty}a_kk(x-x_0)^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k\right). \tag{8}$$

В силу непрерывности *p*-аналитической функции $f(z_0)=0$, так как для любого $n\in\mathbb{N}$: $f(z_n)=0$. Тогда из (8) и леммы 2 следует, что сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ тождественно равна нулю на некотором интервале $I(x_0)\subset\mathbb{R}$, где $\mathrm{Re}z_0=x_0\in I(x_0)$, так как в любой проколотой окрестности точки x_0 найдутся нули указанной суммы. А значит, в этом же интервале будет равна нулю сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kk(x-x_0)^{k-1}$. В силу вышесказанного из леммы 2 и равенства (8) вытекает, что найдется содержащий x_0 интервал $I_1(x_0)\subset I(x_0)$ такой, что в нем $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k\equiv 0$. Отсюда и следует, что существует окрестность $U(z_0)$, в которой $f(z)\equiv 0$. Поэтому $z_0\in\mathrm{int}\,\Phi$, а значит, $\mathrm{int}\,\Phi\neq\varnothing$. Если $\mathrm{int}\,\Phi=D$, то теорема доказана. Если $\mathrm{int}\,\Phi\subset D$, но $\mathrm{int}\,\Phi\neq D$, то найдется граничная точка *d* множества $\mathrm{int}\,\Phi$, которая является внутренней точкой *D*. Тогда найдется последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{int}\,\Phi$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=d\in D$ и $\forall n\in\mathbb{N}:\mathrm{Re}d_n\neq\mathrm{Re}d$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}f(d_n)=f(d)=0$. Учитывая рассуждения, приведенные выше, заключаем, что найдется окрестность $U(d)$ такая, что в ней $f(z)\equiv 0$. Однако это противоречит тому, что *d* – граничная точка $\mathrm{int}\,\Phi$, а значит, $\mathrm{int}\,\Phi=D$. В силу включений $\mathrm{int}\,\Phi\subset\Phi\subset D$ имеем $\Phi=D$. Теорема 10 доказана.

Заключение. Рассмотрены условия *p*-дифференцируемости, *p*-голоморфности и существования производной функции *p*-комплексного переменного. Найден общий вид *p*-голоморфной функции. Получены условия *p*-аналитичности и локальной обратимости. Доказаны принципы сохранения области и максимума нормы для *p*-голоморфной функции и теорема единственности.

Список использованных источников

1. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стер. – М.: Едиториал УРСС. – 2004. – 192 с.

2. Messelmi, F. Analysis of Dual Functions / F. Messelmi // Ann. Rev. Chaos Theory, Bifurc. Dynam. Sys. – 2013. – Vol. 4. – P. 37–54.

3. DenHartigh, K. Liouville theorems in the Dual and Double Planes / K. DenHartigh, R. Flim // Rose-Hulman Undergraduate Mat. J. – 2011. – Vol. 12, № 2. – P. 37–60.

4. Довгодилин, В. В. Сходимость на множестве p-комплексных чисел и свойства p-комплексных степенных рядов / В. В. Довгодилин // Весцi БДПУ. Сер. 3. Фiзiка. Матэматыка. Iнфарматыка. Бiялогiя. Геаграфiя. – 2020. – № 4. – С. 32–39.

5. Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ: в 6 ч. / Э. И. Зверович. – Минск: Выш. шк., 2008. – Ч. 2: Интегральное исчисление функций скалярного аргумента; Ч. 3: Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента. – 319 с.

6. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ: в 2 ч. / Б. В. Шабат. – М.: Физматгиз, 1961. – Ч. 1: Функции одного переменного. – 336 с.

References

1. Yaglom I. M. *Complex Numbers in Geometry*. Moscow: Editorial URSS Publ., 2004. 192 p. (in Russian).

2. Messelmi F. Analysis of Dual Functions. *Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems*, 2013, vol. 4, pp. 37–54.

3. DenHartigh K., Flim R. Liouville theorems in the Dual and Double Planes. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 37–60.

4. Dovgodilin V. Convergense on a set of p-complex numbers and properties of p-complex power series. *Vestsi BDPU. Seriya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [BGPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2020, no. 4, pp. 32–39 (in Russian).

5. Zverovich E. I. *Real and Complex Analysis. In 6 chapters. Chapter 2. Integral calculus of functions of scalar argument. Chapter 3. Differential calculus of vector argument functions*. Minsk: Vysheishaya shkola Publ., 2008. 319 p. (in Russian).

6. Shabat B. V. *Introduction to Complex Analysis. Chapter 1. Functions of one variable.* Moscow, Fizmatlit Publ., 1961. 336 p. (in Russian).

Информация об авторах

Васильев Игорь Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: Vassilyevl@bsu.by

Довгодилин Владимир Владимирович – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: footballer4@mail.ru

Information about the authors

Igor L. Vassilyev – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Vassilyevl@bsu.by

Vladimir V. Dovgodilin – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: footballer4@mail.ru