ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.9
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-190-197

Поступила в редакцию 13.02.2020
Received 13.02.2020

Р. Р. Амирова[1], Ж. Б. Ахмедова[2,3], К. Б. Мансимов[2,3]

[1]Азербайджанский университет языков, Баку, Азербайджан
[2]Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан
[3]Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматриваются некоторые классы линейных двумерных разностных уравнений типа Вольтерра. Получены представления решений с помощью аналогов резольвенты и матрицы Римана.

Ключевые слова: двумерное разностное уравнение Вольтерра, аналог матрицы Римана, представление решения краевой задачи, сопряженное уравнение, аналог резольвенты уравнения

Для цитирования. Амирова, Р. Р. О представлении решений некоторых классов линейных двумерных разностных уравнений / Р. Р. Амирова, Ж. Б. Ахмедова, К. Б. Мансимов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 190–197. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-190-197

Rasmiyya Rza Amirova[1], Zhalya Bilal Ahmedova[2,3], Kamil Bayramali Mansimov[2,3]

[1]Azerbaijan University of Languages, Baku, Azerbaijan
[2]Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
[3]Baku State University, Baku, Azerbaijan

ON THE REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF SOME CLASSES OF TWO-LINEAR DIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATIONS

Abstract. Herein, some classes of linear two-dimensional difference equations of Volterra type are considered. Representations of solutions using analogs of the resolvent and the Riemann matrix are obtained.

Keywords: two-dimensional difference Volterra equation, analogue of the Riemann matrix, representation of the solution of a boundary value problem, adjoint equation, analogue of the resolvent of an equation

For citation. Amirova R. R., Ahmedova Zh. B., Mansimov K. B. On the representation of solutions of some classes of two-linear dimensional difference equations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 190–197 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-190-197

Введение. При исследовании различных задач оптимального управления, описываемых как линейными, так и нелинейными уравнениями, существенную роль играет представление решений линейных или линеаризованных уравнений (см., напр., [1–4]). Исходя из этого настоящая статья посвящена нахождению представления решений двух классов линейных разностных уравнений. Найдено представление решения двумерных линейных разностных уравнений типа Вольтерра, а также решение краевой задачи для линейного разностного уравнения, представляющего собой дискретный аналог гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра.

1. Представление решения двумерных линейных неоднородных уравнений типа Вольтерра. ***Постановка задачи.*** Рассмотрим систему двумерных линейных разностных уравнений типа Вольтерра:

$$z(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}K(t,x,\tau,s)\,z(\tau,s)+f(t,x), \tag{1}$$

$$(t,x)\in D=\left\{(t,x):\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1;\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1\right\}.$$

Здесь $K(t,x,\tau,s)$ – заданная $(n \times n)$ дискретная матричная функция, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности $t_1 - t_0$, $x_1 - x_0$ – есть натуральные числа, $f(t,x)$ – заданная n-мерная дискретная вектор-функция, $z(t,x)$ – искомая n-мерная вектор-функция.

Система уравнений (1) является дискретным аналогом системы двумерных линейных интегральных уравнений типа Вольтерра (см., напр., [5–7]).

Требуется найти представления решения системы уравнений (1) через дискретный аналог резольвенты матрицы $K(t,x,\tau,s)$.

Представление решения. Пусть $R(m,\ell;t,x)$ $(t_0 \le t \le m \le t_1;\ x_0 \le x \le \ell \le x_1)$ – пока неизвестная $(n \times n)$ матричная функция. Тогда для произвольных (m,ℓ) справедливо соотношение

$$\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m,\ell;t,x)\big(z(t,x)-f(t,x)\big)=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m,\ell;t,x)\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} K(t,x,\tau,s)z(\tau,s)\right]. \tag{2}$$

Имеет место

Л е м м а. *Пусть $L(t,x,\tau,s)$ и $M(t,x,\tau,s)$ – заданные $(n \times n)$ дискретные матричные функции. Тогда справедливо тождество*

$$\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} L(m,\ell,t,x)M(t,x,\tau,s)\right]=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} L(m,\ell,\tau,s)M(\tau,s,t,x)\right]. \tag{3}$$

Лемма представляет собой дискретный аналог двумерной леммы Фубини (см. напр., [8–11]).

Предположим, что матричная функция $R(m,\ell;t,x)$ является решением матричного разностного уравнения Вольтерра

$$R(m,\ell;t,x)=\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m,\ell;\ \tau,s)K(\tau,s,t,x)-K(m,\ell,t,x). \tag{4}$$

Далее, с учетом леммы из (2) получаем справедливость тождества

$$\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m,\ell;t,x)\big(z(t,x)-f(t,x)\big)=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m,\ell;\tau,s)K(\tau,s,t,x)\right]z(t,x). \tag{5}$$

Из (4) ясно, что

$$R(m,\ell;t,x)+K(m,\ell,t,x)=\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m,\ell;\ \tau,s)K(\tau,s,t,x). \tag{6}$$

Поэтому из (5) с учетом (6) получаем

$$\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m,\ell;t,x)\big(z(t,x)-f(t,x)\big)=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\big[R(m,\ell;t,x)+K(m,\ell,t,x)\big]z(t,x).$$

Следовательно,

$$\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m,\ell;t,x)f(t,x)=-\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} K(m,\ell,t,x)z(t,x).$$

Последнее означает, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} K(t,x,\tau,s)z(\tau,s)=-\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} R(t,x;\ \tau,s)f(\tau,s). \tag{7}$$

Принимая во внимание тождества (7) и (1), приходим к соотношению

$$z(t,x) = f(t,x) - \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} R(t,x;\, \tau,s)\, f(\tau,s). \tag{8}$$

Далее можно показать, что

$$\sum_{\tau=t}^{m} \sum_{s=x}^{\ell} R(m,\ell;\, \tau,s)\, K(\tau,s,t,x) = \sum_{\tau=t}^{m} \sum_{s=x}^{\ell} K(m,\ell;\, \tau,s)\, R(\tau,s,t,x) \quad \left(\tau \le t \le m;\; s \le x \le \ell\right). \tag{9}$$

Принимая во внимание тождество (9) в (4), получим

$$R(m,\ell;\, t,x) = \sum_{\tau=t}^{m} \sum_{s=x}^{\ell} K(m,\ell;\, \tau,s)\, R(\tau,s,t,x) - K(m,\ell,t,x). \tag{10}$$

Матричную функцию $R(m,\ell;\, t,x)$ по аналогии с работами [8–11] назовем резольвентой уравнения (1), а матричные разностные уравнения (4) и (10) – уравнениями резольвенты.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Решение* $z(t,x)$ *системы линейных двумерных разностных уравнений типа Вольтерра* (1) *допускает представление в виде* (8).

Здесь $R\left(t,x;\, \tau,s\right)$ является решением двумерных линейных матричных разностных уравнений типа Вольтерра (4) и (9).

Об одном обобщении. Предположим, что в уравнении (1) свободный член $f(t,x)$ имеет вид

$$f(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} g(t,x,\tau,s), \tag{11}$$

где $g(t,x,\tau,s)$ – заданная дискретная ограниченная n-мерная вектор-функция. Другими словами, рассмотрим уравнение

$$z(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} K(t,x,\tau,s)\, z\left(\tau,s\right) + \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} g(t,x,\tau,s). \tag{12}$$

Его решение на основе теоремы 1 (см. (8)) допускает представление

$$z(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} g(t,x,\tau,s) - \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} R(t,x;\tau,s) \left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau} \sum_{\beta=x_0}^{s} g(\tau,s,\alpha,\beta) \right]. \tag{13}$$

Применяя лемму, получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} \left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau} \sum_{\beta=x_0}^{s} R(t,x;\tau,s) g(\tau,s,\alpha,\beta) \right] = \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t} \sum_{\beta=s}^{x} R(t,x;\alpha,\beta)\, g(\alpha,\beta,\tau,s) \right].$$

Тогда представление (13) принимает вид

$$z(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} \left[g(t,x,\tau,s) - \sum_{\alpha=\tau}^{t} \sum_{\beta=s}^{x} R(t,x;\alpha,\beta)\, g(\alpha,\beta,\tau,s) \right]. \tag{14}$$

Таким образом, удалось решение уравнения (12) представить в виде (14).

2. Представление решения системы линейных неоднородных разностных уравнений, являющееся разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа. ***Постановка задачи.*** Рассмотрим систему разностных уравнений

$$z(t+1,\, x+1) = A(t,x)\, z(t,x) + \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} \left[B(t,x,\tau,s)\, z(\tau,s) + f(t,x,\tau,s) \right], \tag{15}$$

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=a(x), \quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \\ z(t,x_0)=b(t), \quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \\ a(x_0)=b(t_0)=a_0. \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $A(t,x)$, $B(t,x,\tau,s)$ – заданные ($n\times n$) дискретные матричные функции, $f(t,x,\tau,s)$ – заданная n-мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$ и $b(t)$ – заданные n-мерные дискретные вектор-функции, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности t_1-t_0 и x_1-x_0 есть натуральные числа.

Представление решения. Через $R(m,\ell;t,x)$ обозначим пока неизвестную ($n\times n$) матричную функцию. Пусть $z(t,x)$ – решение краевой задачи (15)–(16).

Умножим обе части уравнения (15) слева на матричную функцию $R(m+1,\ell+1;t+1,x+1)$ и просуммируем обе части полученного соотношения по $t(x)$ от $t_0(x_0)$ до $m(\ell)$ $(m\ge t_0)$, $(\ell\ge x_0)$. Имеем

$$\begin{gathered} \sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t+1,x+1)\,z(t+1,x+1)=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t+1,x+1)\times \\ \times A(t,x)\,z(t,x)+\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t+1,x+1)\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} B(t,x,\tau,s)\,z(\tau,s)\right]+ \\ +\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t+1,x+1)\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} f(t,x,\tau,s)\right]. \end{gathered} \tag{17}$$

Займемся преобразованием левой части тождества (17). Делая замену переменных $\alpha=t+1$, $\beta=x+1$, получим

$$\begin{gathered} \sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t+1,x+1)\,z(t+1,x+1)=\sum_{t=t_0+1}^{m+1}\sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1,\ell+1;t,x)\,z(t,x)= \\ =\sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1,\ell+1;m+1,x)\,z(m+1,x)-\sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1,\ell+1;t_0,x)\,z(t_0,x)+ \\ +\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1,\ell+1;t,x)\,z(t,x)=R(m+1,\ell+1;m+1,\ell+1)\,z(m+1,\ell+1)- \\ -R(m+1,\ell+1;m+1,x_0)\,z(m+1,x_0)+ \\ +\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;m+1,x)\,z(m+1,x)-R(m+1,\ell+1;t_0,\ell+1)\,z(t_0,\ell+1)+R(m+1,\ell+1;t_0,x_0)\,z(t_0,x_0)- \\ -\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t_0,x)\,z(t_0,x)+\sum_{t=t_0}^{m} R(m+1,\ell+1;t,\ell+1)\,z(t,\ell+1)- \\ -\sum_{t=t_0}^{m} R(m+1,\ell+1;t,x_0)\,z(t,x_0)+\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t,x)\,z(t,x)\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Используя дискретный аналог двумерной леммы Фубини, получим

$$\begin{gathered} \sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;t+1,x+1)\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} B(t,x,\tau,s)\,z(\tau,s)\right]= \\ =\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\tau+1,s+1)\,B(\tau,s,t,x)\right]z(t,x), \end{gathered} \tag{19}$$

$$\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,t+1,x+1)\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} f(t,x,\tau,s)\right]=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,\tau+1,s+1)\,f(\tau,s,t,x)\right]. \tag{20}$$

С учетом тождеств (18)–(20) из (17) будем иметь

$$R(m+1,\ell+1;\,m+1,\ell+1)\,z(m+1,\ell+1)-R(m+1,\ell+1;\,m+1,x_0)\,z(m+1,x_0)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,m+1,x)\,z(m+1,x)-R(m+1,\ell+1;\,t_0,\ell+1)\,z(t_0,\ell+1)+$$
$$+R(m+1,\ell+1;\,t_0,x_0)\,z(t_0,x_0)-\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,t_0,x)\,z(t_0,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{m} R(m+1,\ell+1;\,t,\ell+1)z(t,\ell+1)-\sum_{t=t_0}^{m} R(m+1,\ell+1;\,t,x_0)\,z(t,x_0)+\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,t,x)\,z(t,x)=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,\tau+1,s+1)\,B(\tau,s,t,x)\right]z(t,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,t+1,x+1)\,A(t,x)\,z(t,x)+\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,\tau+1,s+1)\,f(\tau,s,t,x)\right]. \tag{21}$$

Пусть матричная функция $R(m,\ell;\,t,x)$ является решением краевой задачи

$$R(m+1,\ell+1;\,t,x)=R(m+1,\ell+1;\,t+1,x+1)A(t,x)+\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,\tau+1,s+1)\,B(\tau,s,t,x), \tag{22}$$

$$\begin{gathered} R(m+1,\ell+1;\,m+1,x)=0,\\ R(m+1,\ell+1;\,t,\ell+1)=0,\\ R(m+1,\ell+1;\,m+1,\ell+1)=E, \end{gathered} \tag{23}$$

(E – $(n \times n)$ – единичная матрица).

Тогда из тождества (21) следует, что

$$z(m+1,\ell+1)=\sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,t_0,x)\,a(x)+\sum_{t=t_0}^{m} R(m+1,\ell+1;\,t,x_0)\,b(t)+$$
$$+R(m+1,\ell+1;\,t_0,x_0)\,z(t_0,x_0)+\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell} R(m+1,\ell+1;\,\tau+1,s+1)\,f(\tau,s,t,x)\right].$$

Отсюда имеем

$$z(m,\ell)=R(m,\ell;\,t_0,x_0)\,a_0+\sum_{x=x_0}^{\ell-1} R(m,\ell;\,t_0,x)\,a(x)+\sum_{t=t_0}^{m-1} R(m,\ell;\,t,x_0)\,b(t)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{m-1}\sum_{x=x_0}^{\ell-1}\left[\sum_{\tau=t}^{m-1}\sum_{s=x}^{\ell-1} R(m,\ell;\,\tau+1,s+1)\,f(\tau,s,t,x)\right].$$

Таким образом,

$$z(t,x)=R(t,x;\,t_0,x_0)\,z(t_0,x_0)+\sum_{\ell=x_0}^{x-1}R(t,x;\,t_0,\ell)\,a(\ell)+\sum_{m=t_0}^{t-1}R(t,x;\,m,x_0)b(m)+$$
$$+\sum_{m=t_0}^{t-1}\sum_{\ell=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=m}^{t-1}\sum_{s=\ell}^{x-1}R(t,x;\,\tau+1,s+1)\,f(\tau,s,m,\ell)\right]. \qquad (24)$$

Т е о р е м а 2. *Решение краевой задачи* (15)–(16) *допускает представление в виде* (24).

Дадим второе представление решения задачи (15)–(16) с помощью дискретного аналога матрицы Римана [7].

Пусть $Q(t,x;\tau,s)$ – пока произвольная, т. е. неизвестная ($n \times n$) матричная функция, а $z(t,x)$ является решением задачи (15)–(16). Тогда для любых (t,x) справедливо соотношение

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,\tau,s)\,z(\tau+1,s+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,\tau,s)\,A(\tau,s)\,z(\tau,s)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau}\sum_{\beta=x_0}^{s}Q(t,x;\,\tau,s)\,B(\tau,s,\alpha,\beta)\,z(\alpha,\beta)\right]+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau}\sum_{\beta=x_0}^{s}Q(t,x;\,\tau,s)\,f(\tau,s,\alpha,\beta)\right]. \qquad (25)$$

Отсюда на основе двумерного аналога формулы Фубини имеем:

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau}\sum_{\beta=x_0}^{s}Q(t,x;\,\tau,s)\,B(\tau,s,\alpha,\beta)\,z(\alpha,\beta)\right]=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1}\sum_{\beta=s}^{x-1}Q(t,x;\,\alpha,\beta)\,B(\alpha,\beta,\tau,s)\right]z(\tau,s), \qquad (26)$$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau}\sum_{\beta=x_0}^{s}Q(t,x;\,\tau,s)\,f(\tau,s,\alpha,\beta)\right]=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1}\sum_{\beta=s}^{x-1}Q(t,x;\,\alpha,\beta)\,f(\alpha,\beta,\tau,s)\right]. \qquad (27)$$

Далее, делая замену переменных $\tau+1=\alpha,\ s+1=\beta,$ получаем справедливость цепочки равенств

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,\tau,s)\,z(\tau+1,s+1)=\sum_{\tau=t_0+1}^{t}\sum_{s=x_0+1}^{x}Q(t,x;\,\tau-1,s-1)\,z(\tau,s)=\sum_{s=x_0+1}^{x}Q(t,x;\,t-1,s-1)\,z(t,s)-$$
$$-\sum_{s=x_0+1}^{x}Q(t,x;\,t_0-1,s-1)\,z(t_0,s)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0+1}^{x}Q(t,x;\,\tau-1,s-1)\,z(\tau,s)=Q(t,x;\,t-1,x-1)z(t,x)-$$
$$-Q(t,x;\,t-1,x_0-1)z(t,x_0)+\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,t-1,s-1)\,z(t,s)-Q(t,x;\,t_0-1,x-1)\,z(t_0,x)+$$
$$+Q(t,x;\,t_0-1,x_0-1)\,z(t_0,x_0)-\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,t_0-1,s-1)\,z(t_0,s)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q(t,x;\,\tau-1,x-1)\,z(\tau,x)-$$
$$-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q(t,x;\,\tau-1,x_0-1)\,z(\tau,x_0)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,\tau-1,s-1)\,z(\tau,s). \qquad (28)$$

Учитывая соотношения (26)–(28) в (25), приходим к соотношению

$$Q(t,x;\,t-1,x-1)\,z(t,x)-Q(t,x;\,t-1,x_0-1)\,z(t,x_0)-Q(t,x;\,t_0-1,x)\,z(t_0,x)+$$
$$+Q(t,x;\,t_0-1,x_0-1)\,z(t_0,x_0)+\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,t-1,s-1)\,z(t,s)-\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,t_0-1,s-1)\,z(t_0,s)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q(t,x;\,\tau-1,x-1)\,z(\tau,x)-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q(t,x;\,\tau-1,x_0-1)\,z(\tau,x_0)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,\tau-1,s-1)z(\tau,s)=$$

$$= \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t,x;\,\tau,s)\,A(\tau,s)\,z(\tau,s) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t,x;\,\alpha,\beta)\,B(\alpha,\beta,\tau,s) \right] z(\tau,s) +$$
$$+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t,x;\,\alpha,\beta)\,f(\alpha,\beta,\tau,s) \right]. \qquad (29)$$

Предположим, что матричная функция $Q(t,x;\,\tau,s)$ является решением разностного двумерного уравнения Вольтерра

$$Q(t,x;\,\tau-1,s-1) = Q(t,x;\,\tau,s)\,A(\tau,s) + \sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t,x;\,\alpha,\beta)\,B(\alpha,\beta,\tau,s) \qquad (30)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &Q(t,x;\,\tau-1,x-1) = 0, \\ &Q(t,x;\,t-1,s-1) = 0, \\ &Q\big(t,x;\,t-1,x-1\big) = E. \end{aligned} \qquad (31)$$

Тогда из соотношения (29) следует представление

$$z(t,x) = -Q(t,x;\,t_0-1,x_0-1)\,z(t_0,x_0) + Q(t,x;\,t_0-1,x-1)\,a(x) + Q(t,x;\,t-1,x_0-1)\,b(t) +$$
$$+ \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t,x;\,t_0-1,s-1)\,a(s) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t,x;\,\tau-1,x_0-1)\,b(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t,x;\,\alpha,\beta)\,f(\alpha,\beta,\tau,s) \right]. \qquad (32)$$

Теорема 3. *При сделанных предположениях решение краевой задачи* (15)–(16) *допускает представление в виде* (32)*, где матричная функция* $Q(t,x;\,\tau,s)$ *является решением матричного разностного уравнения* (30)*, с краевыми условиями* (31).

Заключение. Таким образом, для двух типов линейных разностных уравнений Вольтерра двумя способами получены представления решений. Отметим, что полученные в настоящей работе представления решений для двух классов линейных двумерных разностных уравнений Вольтерра могут найти применение при доказательстве ограниченности и устойчивости решений соответствующих уравнений, а также при исследовании соответствующих задач оптимального управления подобными нелинейными уравнениями.

Список использованных источников

1. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Либроком, 2011. – 272 с.

2. Габасов, Р. Оптимизация линейных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: БГУ, 1973. – 256 с.

3. Габасов, Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Либроком, 2011. – 256 с.

4. Мансимов, К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. – Баку, Изд-во Бак. ун-та, 2013. – 151 с.

5. Петровский, И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Физматлит, 2009. – 136 с.

6. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1974 – Т. 4, ч. 1. – 336 с.

7. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: МГУ, 1997. – 793 с.

8. Choi, S. K. Boundedness of discrete Volterra systems / S. K. Choi, Y. U. Goo, N. J. Koo // Bull. Korean Math. Soc. – 2007. – Vol. 44, № 4. – P. 663–675. https://doi.org/10.4134/bkms.2007.44.4.663

9. Song, Y. Linearized, stability analysis of discrete Volterra equations / Y. Song, C. T. H. Baker // J. Math, Anal. Appl. – 2004. – Vol. 294, № 1. – P. 310–333. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.02.019

10. Ивинская, Е. В. Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра / Е. В. Ивинская, В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 8. – С. 86–97.

11. Колмановский, В. Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 4. – С. 42–50.

References

1. Gabasov R., Kirillova F. M. *The Maximum Principle in Optimal Control Theory*. Moscow, Librokom Publ., 2011. 272 p. (in Russian).

2. Gabasov R., Kirillova F. M. *Linear Systems Optimization*. Minsk, BSU, 1973. 256 p. (in Russian).

3. Gabasov R., Kirillova F. M. *Special Optimal Controls*. Moscow, Librokom Publ., 2011. 256 p. (in Russian).

4. Mansimov K. B. *Discrete Systems*. Baku, Baku University Publishing House, 2013. 151 p. (in Russian).

5. Petrovskii I. G. *Lectures on the Theory of Integral Equations.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 136 p. (in Russian).

6. Smirnov V. I. *Higher Mathematics Course. Vol. 4, Part. 1.* Moscow, Nauka Publ., 1974. 336 p. (in Russian).

7. Tikhonov A. I., Samarskiy A. A. *Equations of Mathematical Physics.* Moscow, Moscow State University, 1997. 793 p. (in Russian).

8. Choi S. K., Goo Y. U., Koo N. J. Bounded ness discrete Volterra systems. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2007, vol. 44, no. 4, pp. 663–675. https://doi.org/10.4134/bkms.2007.44.4.663

9. Song Y., Baker C. T. H. Linearized, stability analysis of discrete Volterra equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 2004, vol. 294, no. 1, pp. 310–333 p. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.02.019

10. Ivinskaya E. V., Kolmanovskiy V. B. On the boundedness of the solutions of some Volterra difference equations. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control,* 2000, no. 8, pp. 86–97 (in Russian).

11. Kolmanovskiy V. B. On the asymptotic properties of solutions of some nonlinear Volterra systems. *Avtomatika i telemekhanika Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2000, no. 4. pp. 42–50 (in Russian).

Информация об авторах

Амирова Расмия Рза кызы – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и информатика», Азербайджанский университет языков (ул. Рашида Бехбудова, 2, г. Баку, Азербайджанская Республика). E-mail: akja@rambler.ru

Ахмедова Жаля Билал кызы – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика», Бакинский государственный университет (ул. З. Халилова, 23, Az 1148, г. Баку, Азербайджанская Республика).

Мансимов Камиль Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика», Бакинский государственный университет; заведующий лабораторией «Управление в сложных динамических системах», Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана (ул. Б. Вагабзаде, 9, Az 1141, г. Баку, Азербайджанская Республика). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Information about the authors

Rasmiyya Rza kyzy Amirova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Mathematics of Informatics, Azerbaijan University of Languages (2, Rashid Behbudov Str., Baku, Republic of Azerbaijan). E-mail: akja@rambler.ru

Zhalya Bilal kyzy Akhmedova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University (23, Z. Khalilova Str., Az 1148, Baku, Republic of Azerbaijan).

Kamil Bayramali oglu Mansimov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University (9, B. Vahabzade Str., Az 1141, Baku, Republic of Azerbaijan). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com