ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.21+519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205

Поступила в редакцию 11.03.2021
Received 11.03.2021

А. Д. Егоров

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКОРОХОДА

Аннотация. Данная работа посвящена приближенному вычислению математических ожиданий нелинейных функционалов от решения линейного уравнения Скорохода с ведущим винеровским процессом и случайным начальным условием. Предложен новый подход к построению квадратурных формул, точных для функциональных многочленов третьей степени, который основан на использовании кратных интегралов Стилтьеса. Также построена составная приближенная формула, точная для функциональных многочленов третьего порядка, сходящаяся к точному значению ожидания, основанная на комбинации полученной квадратурной формулы и аппроксимации ведущего винеровского процесса. Рассмотрены тестовые примеры, иллюстрирующие применение полученных формул.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, уравнение Скорохода, математические ожидания функционалов от решения, приближенные формулы

Для цитирования. Егоров, А. Д. Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Скорохода / А. Д. Егоров // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 198–205. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205

Alexandr D. Egorov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

APPROXIMATE FORMULAS FOR THE EVALUATION OF THE MATHEMATICAL EXPECTATION OF FUNCTIONALS FROM THE SOLUTION TO THE LINEAR SKOROHOD EQUATION

This paper is devoted to the construction of approximate formulas for calculating the mathematical expectation of non-linear functionals from the solution to the linear Skorohod stochastic differential equation with a random initial condition. To calculate the mathematical expectations of nonlinear functionals from random processes, functional analogs of quadrature formulas have been developed, based on the requirement of their accuracy for functional polynomials of a given degree. Most often, formulas are constructed that are exact for polynomials of the third degree [1–9], which are used to obtain an initial approximation and in combination with approximations of the original random process. In the latter case, they are usually also exact for polynomials of a given degree and are called compound formulas. However, in the case of processes specified in the form of compound functions from other random processes the constructed functional quadrature formulas, as a rule, have great computational complexity and cannot be used for computer implementation. This is exactly what happens in the case of functionals from the solutions of stochastic equations. In [1, 2], the approaches to solving this problem were considered for some types of Ito equations in martingales. The solution of the problem is simplified in the cases when the solution of the stochastic equation is found in explicit form: the corresponding approximations were obtained in the cases of the linear equations of Ito, Ito – Levy and Skorohod in [3–11]. In [7, 8, 11], functional quadrature formulas were constructed that are exact for the approximations of the expansions of the solutions in terms of orthonormal functional polynomials and in terms of multiple stochastic integrals. This work is devoted to the approximate calculation of the mathematical expectations of non-linear functionals from the solution of the linear Skorokhod equation with a leading Wiener process and a random initial condition. A new approach to the construction of quadrature formulas, exact for functional polynomials of the third degree, based on the use of multiple Stieltjes integrals over functions of bounded variation in the sense of Hardy – Krause, is proposed. A composite approximate formula is also constructed, which is exact for second-order functional polynomials, converging to the exact expectation value, based on a combination of the obtained quadrature formula and an approximation of the leading Wiener process. The test examples illustrating the application of the obtained formulas are considered.

Keywwords: stochastic differential equations, Skorochod equation, mathematical expectations of functionals from solutions, approximate formulas

For citation. Egorov A. D. Approximate formulas for the evaluation of the mathematical expectation of functionals from the solution to the linear Skorohod equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 198–205 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205

Введение. Приближенное вычисление математического ожидания функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений является актуальной и в общем случае чрезвычайно трудной задачей. Это связано с большой вычислительной сложностью алгоритмов, в которых должны соединиться аппроксимации траекторий решений стохастических уравнений и аппроксимации интегрируемых функционалов от решений, которые обеспечили бы достаточную для сходимости метода суммарную погрешность аппроксимации. Известные функциональные квадратурные формулы для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов от траекторий случайных процессов требуют выполнения условия их точности для полиномиальных функционалов заданной степени. Наиболее часто используются формулы, точные для полиномов третьей степени, которые применяются для получения быстрого первоначального приближения, а также в комбинации с другими аппроксимациями (составные формулы [1–9]). Однако в случае процессов, заданных в виде сложных функций от других случайных процессов, как это имеет место для функционалов от решений стохастических уравнений, построенные функциональные квадратурные формулы, как правило, обладают большой вычислительной сложностью и не могут быть использованы для компьютерной реализации. В [1, 2] рассмотрены подходы к решению этой задачи для некоторых видов уравнений Ито по мартингалам. Решение задачи упрощается в случаях, когда решение стохастического уравнения находится в явном виде: соответствующие аппроксимации получены для случая линейных уравнений Ито, Ито – Леви и Скорохода в работах [3–11]. В [7, 8, 11] построены функциональные квадратурные формулы, точные для некоторых аппроксимаций, полученных разложением решений по ортонормированным функциональным полиномам и по кратным стохастическим интегралам. В настоящей работе предлагается новый подход к построению квадратурных приближенных формул для вычисления ожиданий функционалов от решения уравнений Скорохода со случайным начальным условием. Формулы основаны на использовании кратного интеграла Стилтьеса по функциям ограниченной вариации в смысле Харди – Краузе и точны для функциональных многочленов второго и третьего порядков. Рассмотрены тестовые примеры, иллюстрирующие применение полученных формул.

Предварительные сведения. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s) X_s \delta W_s, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где W_t, $t \in [0,1]$, – стандартный винеровский процесс, определенный на вероятностном пространстве $\Omega = C_0([0,1])$, $W_t(\omega) = \omega(t)$; $\sigma(s)$ – детерминированная функция, $\int_0^1 \sigma^2(s)ds < \infty$; $X_0 = X_0(W_{(\cdot)}) \in L_p(\Omega)$ для некоторого $p > 2$. Интеграл в правой части (1) понимается в смысле интеграла Скорохода, поскольку X_t не адаптирован к процессу W_t. Известно [12, 13], что единственное решение (1) дается равенством

$$X_t = X_0\left(T_t^{-\sigma}\omega\right)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right\},$$

где $T_t^{-\sigma}$ – преобразование на Ω, определяемое равенством

$$\left(T_t^{-\sigma}\omega\right)(s) = \omega(s) - \int_0^{t\wedge s} \sigma(\tau)d\tau.$$

Далее, в силу принятого отождествления $W_t(\omega) = \omega(t)$ нам будет удобно использовать запись решения в виде

$$X_t = X_0\left(W_{(\cdot)} - \int_0^{t\wedge\cdot} \sigma(s)ds\right)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right\}. \tag{2}$$

При построении приближенных формул используются первых три момента решения. В общем случае моменты не могут быть вычислены в явном виде, тем не менее соответствующие математические ожидания, задающие моменты, можно несколько упростить и свести к вычислению ожиданий функционалов от винеровского процесса, не содержащих второго множителя в (2), используя формулу Гирсанова

$$E\left[F\left(W_{(\cdot)}\right)\right]=E\left[F\left(W_{(\cdot)}-\int_0^{(\cdot)}b(s)ds\right)\right]\exp\left\{\int_0^1 b(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s)ds\right\}, \tag{3}$$

где $b(s)$ – детерминированная функция. Заметим, что первый момент имеет вид

$$M_t=E\left[X_0\left(W_{(\cdot)}+\int_0^{t\wedge\cdot}\sigma(\tau)d\tau\right)\right].$$

Далее, последовательно применяя (3) при $b(s)=1_{[0,t]}(s)\sigma(s)$, получим [9]

$$M_2(t_1,t_2)\equiv E[X_{t_1}X_{t_2}]=\exp\left\{\int_0^{t_1\wedge t_2}\sigma^2(\tau)d\tau\right\}\times$$

$$\times E\left[X_0\left(W_{(\cdot)}+\int_0^{t_1\wedge\cdot}\sigma(\tau)d\tau\right)X_0\left(W_{(\cdot)}+\int_0^{t_2\wedge\cdot}\sigma(\tau)d\tau\right)\right],$$

$$M_3\left(t_1,t_2,t_3\right)\equiv E\left[\prod_{k=1}^{3}X_{t_k}\right]=E\left[X_0\left(W_{(\cdot)};t_1,t_2\right)X_0\left(W_{(\cdot)};t_1,t_3\right)X_0\left(W_{(\cdot)};t_2,t_3\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\int_0^{t_1\wedge t_2}\sigma^2(\tau)d\tau\right\}\left\{\int_0^{t_1\wedge t_3}\sigma^2(\tau)d\tau\right\}\exp\left\{\int_0^{t_2\wedge t_3}\sigma^2(\tau)d\tau\right\}, \tag{4}$$

где

$$X_0\left(W_{(\cdot)};t_i,t_j\right)=X_0\left(W_{(\cdot)}+\int_0^{t_i\wedge\cdot}\sigma(\tau)d\tau+\int_0^{t_j\wedge\cdot}\sigma(\tau)d\tau\right).$$

Мы будем также использовать в (2) сходящуюся в $L_2(\Omega)$ аппроксимацию винеровского процесса:

$$W_t^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\alpha_j(\tau)dW_\tau\int_0^t\alpha_j(\tau)d\tau=\int_0^1\left(1[0,t]\right)_n(\tau)dW_\tau,$$

где

$$a_n(t)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\int_0^1 a(\tau)\alpha_j(\tau)d\tau,\quad \alpha_j(t),\quad j=1,2,\ldots,$$

– ортонормированный базис в $L_2([0,1])$, и соответствующую аппроксимацию решения:

$$X_t^{(n)}=X_0\left(\int_0^1\left(1_{[0,\cdot]}\right)_n(\tau)dW_\tau-\int_0^{t\wedge\cdot}\sigma(\tau)d\tau\right)\exp\left\{\int_0^1(1_{[0,t]}\sigma)_n(\tau)dW_\tau-\frac{1}{2}\int_0^1\sigma^2(\tau)d\tau\right\}, \tag{5}$$

при условии сходимости $M_k^{(n)}\left(t_1,t_2,t_k\right)\to M_k\left(t_1,t_2,t_k\right),\ k=1,2,3.$

Заметим, что (5) может быть представлено в виде

$$X_t^{(n)}=X_0\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int_0^{(\cdot)}\alpha_j(\tau)d\tau-\int_0^{t\wedge\cdot}\sigma(s)ds\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int_0^t\sigma(\tau)\alpha_j(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^1\sigma^2(\tau)d\tau\right\},$$

где

$$\xi_j = \int_0^1 \alpha_j(\tau) dW_\tau, \quad j = 1, 2, ...,$$

являются независимыми стандартными гауссовскими величинами.

Моменты процесса (5) будем обозначать $M_k^{(n)}$, $k = 1, 2, 3$.

Основные результаты. Задачей данной работы является построение приближенных формул, точных для функциональных многочленов третьего порядка, для вычисления математических ожиданий от функционалов вида $F\left(X_{(\cdot)}\right)$, где F – нелинейный функционал, заданный на траекториях $X_{(\cdot)}$. Предполагается, что F допускает аппроксимацию функциональными многочленами $P_3\left(X_{(\cdot)}\right)$, достаточную для получения начального приближения для $E\left[F\left(X_{(\cdot)}\right)\right]$, которое может быть использовано само по себе, либо при построении составных приближенных формул, сходящихся к точному значению ожидания. Предполагается, что функциональные многочлены на пространстве траекторий процесса X_t, $t \in [0,1]$, могут быть представлены в виде

$$P^{(3)}\left(X_{(\cdot)}\right) = \text{const} + \sum_{k=1}^{3} \int_{[0,1]^k} \prod_{l=1}^{k} X_{t_l} d^{(l)} A_l(t_1, ..., t_l), \tag{6}$$

где в правой части стоят кратные интегралы Стилтьеса, $A_l(t_1, t_2, t_3)$ – функции ограниченной вариации, а X_t непрерывно зависит от t.

Теорема 1. *Пусть* $M_k\left(t_1, \ldots, t_k\right)$, $k = 2, 3$, *непрерывны на* $[0,1]^k$, *а функции* $F\left(\sum_{j=1}^{k} 1_{[0,\cdot]}(u_j)\right)$, $k = 2, 3$, *имеют ограниченную вариацию на* $[0,1]^k$ *в смысле Харди – Краузе. Тогда имеет место следующая приближенная формула, точная для функциональных многочленов третьей степени:*

$$E\left[F\left(X_{(\cdot)}\right)\right] \approx \sum_{k=1}^{3} J_k(F) \equiv J(F), \tag{7}$$

где

$$J_1(F) = F(0) + \sum_{j=1}^{2} A_j \Lambda F\left(c_j M_{(\cdot)}\right),$$

$$J_2(F) = 0{,}5 \int_{[0,1]^2} M_2(u_1, u_2) d^2_{u_1,u_2} \Delta F\left(1_{[0,\cdot]}(u_1) + 1_{[0,\cdot]}(u_2)\right),$$

$$J_3(F) = -\frac{1}{6} \int_{[0,1]^3} M_3(u_1, u_2, u_3) d^3_{u_1,u_2,u_3} \Lambda F\left(\sum_{j=1}^{3} 1_{[0,\cdot]}(u_j)\right);$$

где в правой части стоят кратные интегралы Стилтьеса; константы A_1, A_2, c_1, c_2 *находятся из условий* $A_1 c_1 + A_2 c_2 = 1$, $A_1 c_1^3 + A_2 c_2^3 = 0$; $\Delta F(x) = 0{,}5\left(F(x) + F(-x)\right)$, $\Lambda F(x) = 0{,}5\left(F(x) - F(-x)\right)$.

Доказательство. Справедливость теоремы доказывается непосредственным вычислением правой и левой частей формулы (7) для указанных функциональных многочленов (из (6) следует, что достаточно доказать ее для мономов $P_k = \prod_{l=1}^{k} X_{t_l}$, $k = 1, 2, 3$, и постоянного функционала). Приведем лишь доказательство точности формулы для мономов P_3; случаи P_1 и P_2 рассматриваются аналогично. Поскольку $J_1(P_3) = 0$, в силу определения коэффициентов A_k, c_k, $k = 1, 2, 3$, и $J_2(P_3) = 0$, в силу свойств оператора Δ достаточно рассмотреть только случай $J_3(P_3)$. Кратный интеграл Стилтьеса

$$\int_{[0,1]^3} f(u_1, u_2, u_3) d^3_{u_1,u_2,u_3} g(u_1, u_2, u_3)$$

определяется как предел сумм

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f\left(u_{1,i}^{*},u_{2,j}^{*},u_{3,k}^{*}\right)\Big[g(u_{1,i},u_{2,j},u_{3,k})-g(u_{1,i-1},u_{2,j},u_{3,k})-$$
$$-g(u_{1,i},u_{2,j-1},u_{3,k})+g(u_{1,i-1},u_{2,j-1},u_{3,k})-g(u_{1,i},u_{2,j},u_{3,k-1})+$$
$$+g(u_{1,i-1},u_{2,j},u_{3,k-1})+g(u_{1,i},u_{2,j-1},u_{3,k-1})-g(u_{1,i-1},u_{2,j-1},u_{3,k-1})\Big], \tag{8}$$

где $u_{1,i-1}<u_{1,i}^{*}<u_{1,i}$, $u_{2,j-1}<u_{2,j}^{*}<u_{2,j}$, $u_{3,k-1}<u_{3,k}^{*}<u_{3,k}$ при бесконечном измельчении промежутков деления отрезков $0\le u_1\le 1$, $0\le u_2\le 1$, $0\le u_3\le 1$. Если функция $f(u_1,u_2,u_3)$ непрерывна на $[0,1]^3$, а $g(u_1,u_2,u_3)$ – функция ограниченной вариации в смысле Харди – Краузе [14], то интеграл Стилтьеса существует. Ограниченность вариации функции трех переменных в смысле Харди – Краузе означает помимо ограниченности вариации как функции трех переменных дополнительное требование ограниченности вариации по каждой переменной отдельно. Для функций

$$f(u_1,u_2,u_3)=M_k(u_1,u_2,u_3),\quad g(u_1,u_2,u_3)=\Lambda F\left(\sum_{j=1}^{3}1_{[0,\cdot]}(u_j)\right)$$

приведенные условия существования выполнены и, таким образом, соответствующий интеграл Стилтьеса в (7) определен.

Проверим точность формулы:

$$J_3\left(P_3\left(X_{(\cdot)}\right)\right)=-\frac{1}{6}\int_{[0,1]^3}M_3(u_1,u_2,u_3)d^3_{u_1,u_2,u_3}\prod_{l=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}1_{[0,t_l]}(u_j)\right)=$$
$$=-\int_{[0,1]^3}M_3(u_1,u_2,u_3)d^3_{u_1,u_2,u_3}\left(1_{[0,t_1]}(u_1)1_{[0,t_2]}(u_2)1_{[0,t_3]}(u_3)\right). \tag{9}$$

Здесь мы использовали симметричность функции $M_3(u_1,u_2,u_3)$ и тот факт, что

$$\int_{[0,1]^3}M_3(u_1,u_2,u_3)d^3_{u_1,u_2,u_3}g(u_1,u_2,u_3)=0,$$

если в $g(u_1,u_2,u_3)$ хотя бы одна из переменных u_1,u_2,u_3 отсутствует (см. выше определение кратного интеграла Стилтьеса). Далее вычисление интеграла в правой части (9) несложно произвести по формуле (8), поскольку интегрирующая функция $1_{[0,t_1]}(u_1)1_{[0,t_2]}(u_2)1_{[0,t_3]}(u_3)$ является простой, и результатом вычислений служит значение подынтегральной функции в точках скачка, т. е. $M_3(u_1,u_2,u_3)$.

Заметим, что $J_3(F)=0$ для мономов четного порядка в силу наличия оператора Λ. Очевидно также, что параметры A_1, A_2, c_1, c_2 заданными условиями определяются неоднозначно.

З а м е ч а н и е. В рассмотренных далее примерах используется для сравнения точности аппроксимаций также приближенная формула, точная для функциональных многочленов второй степени, представляющая собой сумму первых двух слагаемых правой части (7).

Приведем составную приближенную формулу, при построении которой используется приближенная формула, точная для функциональных многочленов третьей степени.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $M_k^{(n)}(t_1,\ldots,t_k)$, $k=1,2,3$, *непрерывны и равномерно сходятся на* $[0,1]^k$ *к* $M_k(t_1,\ldots,t_k)$ *при* $n\to\infty$. *Пусть* $F\left(X_{(\cdot)}(\omega)\right)$ *– непрерывный на* $L_2(\Omega)$ *функционал, такой что определены и равномерно ограничены по n последовательности функционалов*

$$\int_{[0,1]^k}M_k^{(n)}(u_1,\ldots,u_k)d^2_{u_1,\ldots,u_k}\Delta F\left(\sum_{j=1}^{k}1_{[0,\cdot]}(u_j)\right),\quad k=2,3. \tag{10}$$

Тогда приближенная формула

$$E\left[F\left(X_{(\cdot)}\right)\right] \approx E\left[F\left(X_{(\cdot)}^{(n)}\right)\right] - J^{(n)}(F) + J(F) \equiv J_2^{(n)}(F), \tag{11}$$

где аппроксимация $X_t^{(n)}$ *определена формулой* (5), *а* $J^{(n)}(F)$ *– формулой* (7), *в которой надо положить* $M_k^{(n)}$ *вместо* M_k, $k = 1,2,3$, *точна для функциональных многочленов третьей степени и сходится к точному значению при n → ∞.*

Доказательство точности формулы для функциональных многочленов проводится аналогично доказательству теоремы 1. Сходимость следует из сходимости $W_n(t) \to W(t)$ в $L_2(\Omega)$, непрерывности $F\left(X_{(\cdot)}(\omega)\right)$ на $L_2(\Omega)$ и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса.

Численные результаты. Рассмотрим численные примеры применения формул (7) и (10)–(11).

Пример 1. $F\left(X_{(\cdot)}\right) = \sin\left(\lambda X_t + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [0,1]$, $X_0 = \int_0^1 a(\tau)dW_\tau$, $a(\tau)$ – детерминированная функция. Приближенное значение, полученное по формуле (7), в данном случае приводится к виду

$$J(F) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + M_2(t,t)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(2\lambda + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right)0,5 +$$

$$+M_3(t,t,t)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(3\lambda) - 3\sin(2\lambda) + 3\sin(\lambda)\right)\frac{1}{6}.$$

Точные значения ожидания $E\left[\sin\left(\lambda X_t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ и моментов при $a(\tau) = \tau$, $\sigma(\tau) = \sqrt{\tau}$, полученные их сведением к двойному интегралу по гауссовскому распределению (по формуле вычисления ожиданий от функции двух линейных функционалов от винеровского процесса), и их приближенные значения для различных значений *t* приведены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

t	Точное	2-й степени точности	3-й степени точности	Аппроксимация $n = 2$	3-й степени точности, $n = 2$	Сост. 3-й степени, $n = 2$	Сост. 3-й степени, $n = 4$
0,2	0,677621	0,681326	0,681167	0,678346	0,681913	0,6776	0,677595
0,3	0,676426	0,686589	0,680116	0,677115	0,680729	0,676503	0,676477
0,4	0,674660	0,679541	0,678459	0,675314	0,679016	0,676503	0,674694
0,5	0,671991	0,677983	0,675790	0,673401	0,677167	0,672025	0,671979
0,6	0,668173	0,675660	0,671462	0,671508	0,675145	0,667825	0,668025
0,7	0,663061	0,672152	0,664238	0,669033	0,671844	0,661428	0,662487
0,8	0,656736	0,666768	0,651718	0,664280	0,668126	0,64802	0,655296
0,9	0,649404	0,663671	0,644558	0,641323	0,671312	0,614569	0,651912

Пример 2. Пусть $X_0 = \exp\left\{\int_0^1 a(\tau)dW_\tau\right\}$, $F\left(X_{(\cdot)}\right) = \sin\left(\lambda X_t\right)$, $a(\tau) = \tau$, $\sigma(\tau) = \sqrt{\tau}$, $t \in [0,1]$, $\lambda = 0,5$. Приближенные значения, полученные по формуле (7), в данном случае приводятся к виду

$$J(F) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\lambda\sqrt{2}\exp\left(\frac{1}{6}\right)\right) + 2\sin\left(\lambda\exp\left(\frac{1}{6}\right)\right) +$$

$$+M_3(t,t,t)\frac{1}{6}\left(\sin(3\lambda) - 3\sin(2\lambda) + 3\sin(\lambda)\right).$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Точное	0,5092	0,5045	0,4956	0,4818	0,4630
2-й степени	0,5895	0,5895	0,5895	0,5895	0,5895
3-й степени	0,5218	0,5161	0,5042	0,4820	0,4423

Заметим, что в обоих примерах использовались значения $A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $A_2 = 2$, $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = 1$. Точные значения $E\left[\sin(X_t)\right]$ и $M_3(t,t,t)$ получены сведением, как и в предыдущем примере, к двойному интегралу по гауссовскому распределению и его приближенным вычислением, $M_1 = E[X_t] = \exp\left(\frac{1}{6}\right)$. Приведенные численные результаты показывают типичную для формул, точных для функциональных многочленов третьей степени от процесса, точность аппроксимации в заданном временном интервале. По причине быстрого роста значений моментов решения X_t использовался малый параметр λ. Поскольку в примере 2 первый момент M_t не зависит от t, а слагаемое $J_2(F) = J_2(\sin)$ в (7) обращается в нуль для четных функционалов, полученное по формуле точной для многочленов второй степени приближенное значение в этом случае не зависит от t.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция-20» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Ф20МС-005.

Acknowledgements. The work was financially supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Government Research Program “Convergence-20” and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research within the framework of Project no. Ф20МС-005.

Список использованных источников

1. Egorov, A. D. Functional Integrals: Approximate Evaluations and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Kluwer Academic Publ., 1993. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6

2. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.

3. Egorov, A. D. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov, K. K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods Appl. – 2010. – Vol. 16, № 2. – P. 95–127. https://doi.org/10.1515/mcma.2010.003

4. Егоров, А. Д. Приближенные формулы третьего порядка точности для вычисления математического ожидания функционалов от решения стохастического уравнения / А. Д. Егоров, А. Ф. Уласик // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 8–12.

5. Егоров, А. Д. О составных приближенных формулах для ожиданий функционалов от случайных процессов // Тр. Ин-та математики. – 2014. – Т. 22, № 1. – С. 70–77.

6. Егоров, А. Д. О приближенном вычислении математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Ито – Леви / А. Д. Егоров // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 1. – С. 13–17.

7. Егоров, А. Д. О приближенных формулах для вычисления одного класса функционалов от пуассоновского процесса / А. Д. Егоров // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 7–13.

8. Approximate formulas for mathematical expectations of functionals of random processes defined by Ito – Levy multiple integral expansions / E. A. Ayryan [et al.] // Math. Modell. Geometry. – 2017. – Vol. 5, № 3. – P. 1–15. https://doi.org/10.26456/mmg/2017-531

9. Egorov, A. D. Approximate formulas for expectation of functionals from solution to linear Skorohod stochastic differential equation / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Proc. of the XII Int. Conf. “Computer Data Analysis and Modeling 2019. Stochastics and Data Science”. Sept. 18–22, 2019, Minsk. – Minsk, 2019. – P. 158–162.

10. Egorov, A. D. Approximate formulas of the second order of accuracy for expectation of functionals from solution to linear SDE in Skorohod sence / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2019. – Vol. 22, № 3. – P. 292–298.

11. Egorov, A. D. An approximate formulas for calculating the expectations of functionals from random processes based on using the Wiener chaos expansion / A. D. Egorov // Monte Carlo Methods Appl. – 2020. – Vol. 26, № 4. – P. 285–292. https://doi.org/10.1515/mcma-2020-2074

12. Buckdahn, R. Linear Skorohod stochastic differential equations / R. Buckdahn // Probab. Th. Rel. Fields. – 1991. – Vol. 90, № 2. – P. 223–240. https://doi.org/10.1007/bf01192163

13. Buckdahn, R. Linear stochastic differential equations and Wick products / R. Buckdahn, D. Nualart // Probab. Th. Rel. Fields. – 1994. – Vol. 99, № 4. – P. 501–526. https://doi.org/10.1007/bf01206230

14. Ковальчик, И. М. Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения / И. М. Ковальчик, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1989. – 119 с.

References

1. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional Integrals: Approximate Evaluations and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1993. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6

2. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction to Theory and Applications of Functional Integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian).

3. Egorov A. D., Sabelfeld K. K. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 95–127. https://doi.org/10.1515/mcma.2010.003

4. Egorov A. D., Ulasik A. F. Approximate formulas of third accuracy degree for evaluation of mathematical expectation of functionals from solution to stochastic equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 1, pp. 8–12 (in Russian).

5. Egorov A. D. On the composite approximate formulas for for expectation of functionals from random processes. *Trudy Instituta Matematiki = Proceeding of the Institute of Mathematics*, 2014, vol. 22, no. 1, pp. 70–77 (in Russian).

6. Egorov A. D. On approximate evaluation of mathematical expectation of functionals from solution to the Itô-Levy linear equation. *Doklady of the National'nai akademii navuk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 13–17 (in Russian).

7. Egorov A. D. On apprpximate formulas for evaluation a class of functionals from the Poisson process. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 1, pp. 7–13 (in Russian).

8. Ayryan E. A., Egorov A. D., Malyutin V. B. and Sevastianov L. A. Approximate formulas for mathematical expectations of functionals of random processes defined by Ito – Levy multiple integral expansions. *Mathematical Modelling and Geometry*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 1–15. https://doi.org/10.26456/mmg/2017-531

9. Egorov A. D., Zherelo A. V. Approximate formulas for expectation of functionals from solution to linear Skorohod stochastic differential equation. *Proceedings of the XII International conference "Computer Data Analysis and Modeling 2019. Stochastics and Data Science», Septtmber 18–22, 2019, Minsk*. Minsk, 2019, pp. 158–162.

10. Egorov A. D., Zherelo A. V. Approximate formulas of the second order of accuracy for expectation of functionals from solution to linear SDE in Skorohod sence. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2019, vol. 22, no. 3, pp. 292–298.

11. Egorov A. D. An approximate formulas for calculating the expectations of functionals from random processes based on using the Wiener chaos expansion. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 285–292. https://doi.org/10.1515/mcma-2020-2074

12. Buckdahn R. Linear Skorohod stochastic differential equations. *Probability Theory and Related Fields*, 1991, vol. 90, no. 2, pp. 223–240. https://doi.org/10.1007/bf01192163

13. Buckdahn R., Nualart D. Linear stochastic differential equations and Wick products. *Probability Theory and Related Fields,* 1994, vol. 99, no. 4, pp. 501–526. https://doi.org/10.1007/bf01206230

14. Koval'chik I. M., Yanovich L. A. *Generalized Wiener Integral and Some of its Applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1989. 119 p. (in Russian).

Информация об авторе

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Information about the author

Alexandr D. Egorov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), E-mail: egorov@im.bas-net.by