

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)  
УДК 536.24:66.045  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-242-254>

Поступила в редакцию 30.03.2021  
Received 30.03.2021

**Т. Б. Карлович, А. Б. Сухоцкий, Е. С. Данильчик**

*Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь*

## **КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКОВ В ВЫТЯЖНОЙ ШАХТЕ НАД ЧЕТЫРЕХРЯДНЫМ ОРЕБРЕННЫМ ПУЧКОМ**

**Аннотация.** Рассмотрены разнонаправленные квазипериодические воздушные течения в вытяжной шахте над четырехрядным горизонтальным пучком, состоящим из биметаллических ребристых труб, которые служат для отвода теплоты в теплообменных аппаратах. Проведено моделирование движения воздуха на основе уравнений для термогравитационной конвекции, включающей тепловую и гидродинамическую задачи для свободно-конвективного течения вязкой жидкости в приближении Буссинеска. Предложена интерпретация квазипериодических воздушных течений в шахте на основе конвекции Рэлея – Бенара, в результате которой в жидкости или газе формируются правильные структуры, называемые ячейками Рэлея – Бенара. Ячейки Рэлея – Бенара появляются при переходе из устойчивого состояния системы в неустойчивое в результате действия возмущений скорости и температуры. Рассмотрены возможные двумерные (конвективные валы) и трехмерные (прямоугольные ячейки) структуры, формирующиеся в шахте для различных подведенных электрических мощностей к пучку оребренных труб. Для оценки числа возникающих структур рассчитаны критические числа Рэлея, характеризующие критические градиенты температур и критические движения в системе. Для двух экспериментов проведено сравнение экспериментальных чисел Рэлея с их критическими значениями. Также обсуждаются отличия условий проведения эксперимента от используемых в расчетах идеальных граничных условий и частичном разрушении квазипериодических структур вследствие этого.

**Ключевые слова:** свободная конвекция, вытяжная шахта, оребренная труба, теплопередача, приближение Буссинеска, уравнение Навье – Стокса, уравнение теплопроводности, конвективная неустойчивость, ячейка Рэлея – Бенара

**Для цитирования.** Карлович, Т. Б. Конвективная неустойчивость воздушных потоков в вытяжной шахте над четырехрядным оребренным пучком / Т. Б. Карлович, А. Б. Сухоцкий, Е. С. Данильчик // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 242–254. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-242-254>

**Tatyana B. Karlovich, Albert B. Sukhotskii, Ekaterina S. Danilchik**

*Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus*

## **CONVECTIVE INSTABILITY OF AIR FLOWS IN THE EXHAUST SHAFT ABOVE A FOUR-ROW FINNED BEAM**

**Abstract.** Herein, multidirectional quasiperiodic air flows in an exhaust shaft above a four-order horizontal bundle consisting of bimetallic finned tubes used to remove heat in heat exchangers are considered. Modeling of the air movement is carried out on the basis of equations for thermogravitational convection in the Boussinesq approximation. It takes into account the viscosity of the air and the dependence of the air density on the temperature. An interpretation of quasiperiodic airstreams is proposed on the basis of Rayleigh – Bénard convection, as a result of which regular structures, called Rayleigh – Bénard cells, are formed in a liquid or gas. Rayleigh – Bénard cells are an analytical solution to the problem of the stability of hydrodynamics flows in the linear approximation. The appearance of two-dimensional (convective rolls) and three-dimensional (rectangular cells) is possible. To estimate the number of emerging structures, the critical Rayleigh numbers were calculated, which characterizes the transition from an unstable mode of the convective fluid flow to a stable mode. For two experiments, the experimental Rayleigh numbers are compared with their critical values. The differences between the experimental conditions and the ideal boundary conditions used in the calculations and the partial destruction of quasiperiodic structures as a result of this are also discussed.

**Keywords:** free convection, exhaust shaft, finned tube, heat transfer, Boussinesq approximation, Navier – Stokes equation, heat conduction equation, convective instability, Rayleigh – Bénard cell

**For citation.** Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danilchik E. S. Convective instability of air flows in the exhaust shaft above a four-row finned beam. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 242–254 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-242-254>

**Введение.** Конвекция Рэлея – Бенара, возникающая в тонком протяженном слое жидкости при ее подогреве снизу, экспериментально наблюдалась в опытах Г. Бенара [1] и теоретически была объяснена Д. У. Рэлеем [2]. Суть явления заключается в образовании правильных периодических структур (ячеек Рэлея – Бенара) в жидкости за счет совместного действия выталкивающей силы и силы вязкого трения. На нижние более теплые слои жидкости с меньшей плотностью действует подъемная сила, и они стремятся подняться вверх, в то время как более тяжелые холодные слои стараются опуститься вниз. Если градиент температуры будет достаточно велик, так что равновесие в жидкости за счет наличия возмущений в среде станет неустойчивым, возникнет конвекция, при этом пороговое значение для устойчивого течения определится критическим числом Рэлея. Критический режим течения жидкости приводит к образованию в ней правильных структур в виде ячеек Рэлея – Бенара. Форма и число ячеек во многом зависят от формы и размеров области, ограничивающей жидкость [3]. В отдельной ячейке вследствие действия конвективных сил организуется направленное движение жидкости – подъем по центру более теплой жидкости и опускание по периферии холодной. Для газов, наоборот, в центре ячейки газ опускается и поднимается по краям ячейки. Такое поведение жидкостей и газов было теоретически обосновано в [4] и экспериментально подтверждено в [5]. Оно обусловлено различной зависимостью вязкости для жидкостей и газов от температуры: вязкость жидкостей с температурой уменьшается, а вязкость газов, наоборот, возрастает. В случае дальнейшего роста температурного градиента происходит распад существующих конвективных ячеек на более мелкие структуры, а затем осуществляется переход к хаотическому режиму течения жидкости.

Важную роль в формировании ячеек играет температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения, приводящая к так называемому термокапиллярному эффекту. В случае критического соотношения сил поверхностного натяжения и сил вязкого трения в жидкости появляются периодические структуры – ячейки Бенара – Марангони. В [6] наблюдались периодические ячейки в пленках даже при отсутствии действия термогравитационного механизма.

Отдельным вопросом является обоснование устойчивости конвективных ячеек Рэлея – Бенара, поскольку процесс перемешивания слоев жидкостей, обусловленный неоднородным нагревом, представляет собой пример неустойчивого течения в вязкой среде [7]. Теоретическое описание неустойчивых течений основано на тепловых и гидродинамических уравнениях, связанных с решением нелинейных задач на устойчивость. Большинство из них поддаются решению только с помощью численных методов. Однако конвекция Рэлея – Бенара служит примером аналитически решаемой задачи, основанной на расщеплении временных и пространственных характеристик [8] и демонстрирующей возникновение правильных устойчивых периодических структур. Примером двумерных структур являются конвективные валы, примерами трехмерных структур – треугольные, прямоугольные и гексагональные ячейки [3]. Также под влиянием случайных внешних возмущений могут формироваться сложные неоднородные структуры – текстуры [9]. Их динамика с учетом крупномасштабного дрейфа может быть описана на основе двумерной модели конвекции с использованием метода Бубнова – Галеркина [10], суть которого состоит в использовании конечного числа собственных функций невозмущенной задачи, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям в качестве базиса для разложения решения в виде возмущений.

В настоящее время широко используются различные численные методы расчета уравнений термогравитационной конвекции. Их можно разделить на две группы: конечно-разностные и спектральные методы (типа метода Бубнова – Галеркина). Как отмечается в [11], спектральные методы приблизительно на два порядка эффективнее конечно-разностных схем, однако существуют определенные трудности в вычислении нелинейных слагаемых с их помощью. В [12] использовался метод спектральных элементов NEC5000 для трехмерных прямых численных расчетов уравнений в приближении Буссинеска. В этой статье проведено численное моделирование для широкого ряда чисел Прандтля от 0,005 до 70 и чисел Рэлея до  $10^7$ .

Конвекция Рэлея – Бенара находит многочисленные экспериментальные подтверждения в различных областях исследований. Прежде всего речь идет об атмосферных явлениях, таких как вихри, циклоны, ветры [13]. В небе можно наблюдать правильные дорожки из обла-

ков [14], за самолетами возможно образование нестационарных периодических структур [15]. Периодические столбчатые структуры, обусловленные наличием ячеек Рэлея – Бенара, образуются в базальтовых породах [16] и при выращивании кристаллов методом Чохральского [17]. Периодические конвекционные потоки встречаются в мантии Земли [18] и приповерхностном слое океана [19]. Также на основе конвекции Рэлея – Бенара описываются явления самоорганизации в различного рода стохастических системах, где из первоначального хаоса возникают самоорганизованные структуры [20].

В настоящей работе проводится моделирование течения воздуха в шахте над четырехрядным пучком оребренных труб на основе уравнений термогравитационной конвекции с идеализированными граничными условиями. Интерпретация полученных результатов с использованием конвекции Рэлея – Бенара позволяет объяснить возникновение гейзерных течений в вытяжной шахте над горизонтальным пучком оребренных труб, к которому подводится тепловая мощность. Такие пучки являются составной частью теплообменных устройств и служат для быстрого отведения большого количества теплоты от охлаждаемого объекта [21].

**Экспериментальная установка.** При экспериментальном моделировании процесса теплообмена в установке (рис. 1) для его интенсификации используется прямоугольная  $b \times c = 38 \times 31$  см вытяжная шахта высотой  $H = 52$  см. Общий вид установки показан на рис. 2. При определенной мощности, подводимой к тепловым трубам пучка, разогретый воздух образует направленный вертикально вверх неустойчивый поток в шахте [22]. Выходя из шахты, он смешивается с холодным воздухом, образуя нестационарные гейзерные течения. В данной работе исследуется природа возникновения этих течений, их зависимость от мощности нагрева и локализация в пространстве шахты.

Также рассматривается четырехрядный шахматный пучок, состоящий из оребренных труб и служащий для воздушного охлаждения в теплообменных устройствах (см. рис. 2). Он состоит из  $m = 22$  шт. ребристых труб с поперечным  $S_1 = 64$  мм и продольным  $S_2 = 55,4$  мм шагами. Геометрические размеры биметаллической оребренной трубы со спиральными накатными ребрами следующие: наружный диаметр –  $d = 56$  мм; диаметр трубы по основанию –  $d_0 = 26,8$  мм; высота ребра –  $h = 14,6$  мм; шаг ребра –  $s = 2,5$  мм; средняя толщина ребра –  $\Delta = 0,5$  мм; длина трубы –  $l_{\text{п}} = 330$  мм (теплотдающая длина  $l = 300$  мм); коэффициент оребрения трубы –  $\phi = 19,26$ . Материал ребристой оболочки – алюминиевый сплав АД1М, материал несущей трубы – углеродистая сталь. Диаметр несущей трубы  $d_{\text{н}} = 25$  мм; толщина стенки  $\delta = 2$  мм.

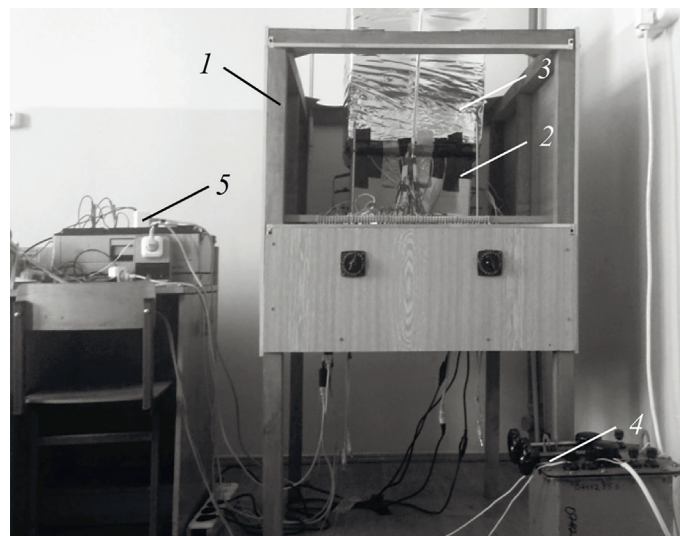


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1 – камера; 2 – пучок оребренных труб; 3 – вытяжная шахта; 4 – трансформатор; 5 – измерительная аппаратура

Fig. 1. Experimental setup: 1 – camera; 2 – bundle of finned tubes; 3 – exhaust shaft; 4 – transformer; 5 – measuring equipment

Движение воздуха в экспериментальной установке можно условно разделить на три этапа: засасывание холодного воздуха в межреберное пространство пучка и его нагрев, ускорение теплового потока в шахте и выброс нагретого воздуха в окружающую среду. Описание движения воздуха в шахте является сложной тепло-гидравлической задачей, связанной с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для термогравитационной конвекции в четырехмерной области с координатами  $(x, y, z, \tau)$ . Для реальной сжимаемой жидкости (в случае отсутствия внутренних источников тепловыделения и пренебрежения теплотой, которая выделяется за счет внутреннего трения) система уравнений имеет вид

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{w} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} + \rho \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \mathbf{w} \cdot \nabla t = a \Delta t,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{w}) = 0,$$
(1)

где  $\tau$  – время,  $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}$  – скорость,  $p$  – давление,  $\eta$  и  $\xi$  – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно,  $t$  – температура,  $\rho$  – плотность жидкости,  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Систему уравнений (1) можно упростить в случае достаточно слабой конвекции (малой скорости потока жидкости), когда термодинамические переменные  $(t, p)$  представимы в виде суммы средних значений и малых добавок  $(t_m + t_1, p_m + p_1)$ , так что в термодинамической зависимости  $\rho = \rho(t, p)$  можно ограничиться слагаемыми первого порядка малости

$$\rho = \rho_m + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p t_1 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t p_1 = \rho_m (1 - \beta t_1 + \alpha p_1),$$
(2)

где  $\beta$  и  $\alpha$  – коэффициенты теплового расширения и изотермической сжимаемости

$$\beta = -\frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p, \quad \alpha = \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t.$$
(3)

И далее будем предполагать, что изменение плотности воздуха за счет неоднородности температуры значительно превышает изменение плотности воздуха из-за неоднородности давления

$$|\beta t_1| \ll |\alpha p_1|,$$
(4)

тогда зависимостью плотности от давления можно пренебречь и записать формулу (2) в виде

$$\rho = \rho_m (1 - \beta t_1).$$
(5)

Равенство (5) позволяет упростить систему уравнений (1), сохранив зависимость плотности от температуры только в уравнении Навье – Стокса в слагаемом с подъемной силой.

**Модель Буссинеска.** Линеаризованная система уравнений для конвекции воздуха в поле силы тяжести, дополненная уравнением непрерывности для несжимаемой жидкости, в приближении Обербека – Буссинеска (5), имеет вид [8]

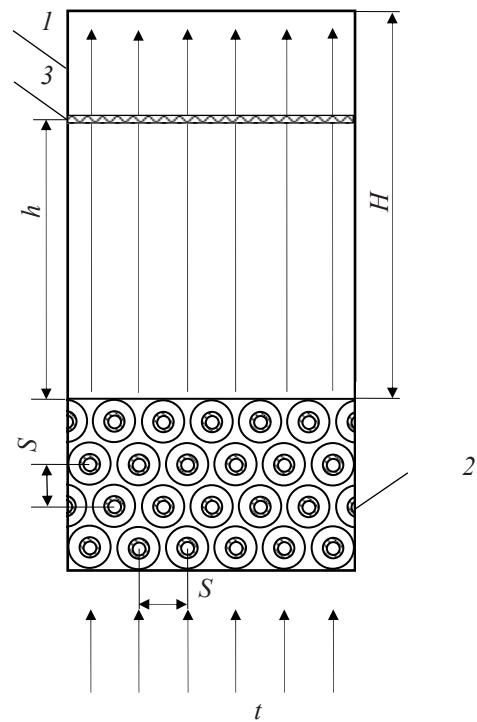


Рис. 2. Схема экспериментальной установки: 1 – вытяжная шахта; 2 – пучок оребренных труб; 3 – сетка из легких нитей

Fig. 2. Scheme of the experimental setup: 1 – exhaust shaft; 2 – bundle of finned tubes; 3 – mesh of light

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\rho_m} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{w} - \beta t_1 \mathbf{g}, \\ \frac{\partial t_1}{\partial \tau} + \mathbf{w} \cdot \nabla t_m &= a \Delta t_1, \\ \nabla \mathbf{w} &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость. Допустим, что в системе существует механическое равновесие жидкости или ее скорость  $\mathbf{w} = 0$ , тогда для стационарного температурного распределения в шахте получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho_m} \nabla p_0 + \beta t_0 \mathbf{g} &= 0, \\ \Delta t_0 &= 0,\end{aligned}\tag{7}$$

где давление и температура в равновесном состоянии соответствуют значениям  $p_0$  и  $t_0$ . Система (7) имеет решение в виде постоянного температурного градиента, направленного вдоль оси  $z$ :

$$\nabla t_0 = -A \mathbf{k},\tag{8}$$

где  $A$  – модуль градиента. Это значит, что температура меняется только вдоль оси  $z$ :  $t = t(z)$ , а в направлении других осей ее изменения отсутствуют. Предположим, что из состояния равновесия система выходит под действием малых нестационарных возмущений температуры  $\theta$ ,  $t_1 = t_0 + \theta$ , скорости  $\mathbf{v}$  и давления в шахте  $p_2$ ,  $p_1 = p_0 + p_2$ . Тогда система (6) может быть записана для малых возмущений в безразмерном виде с использованием чисел Прандтля ( $Pr$ ) и Рэлея ( $Ra$ ):

$$Pr = \frac{\nu}{a}, \quad Ra = Ag \frac{\beta H^4}{a\nu},\tag{9}$$

где  $H$  – характерный линейный размер рассматриваемого объема воздуха;  $a/H$ ,  $H^2/\nu$ ,  $\rho_0 \nu a/H^2$  – характерные скорость, время и давление соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} &= -\nabla p_2 + \Delta \mathbf{v} + Ra \cdot \theta \cdot \mathbf{k}, \\ Pr \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= \Delta \theta, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Дальнейшее решение задачи (10) связано с рассмотрением различных граничных условий для возникновения периодических структур при свободном движении жидкости. Наиболее простой задачей является исследование течения жидкости между двумя бесконечными плоскостями при равномерном подогреве нижней плоскости. Если температуры плоскостей равны  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , а расстояние между плоскостями –  $H$ , то постоянный температурный градиент определится соотношением

$$A = (\theta_1 - \theta_2)/H.\tag{11}$$

В этом случае возможно рассмотрение двух видов граничных условий: так называемых жестких и свободных границ. Для жестких границ выполняется условие прилипания жидкости или обращение в нуль всех компонент скорости

$$\mathbf{v} = 0.\tag{12}$$

Для свободных границ считается, что конвективные возмущения не приводят к деформации плоских границ и  $z$ -компонента скорости обращается в нуль. Также предполагается, что в жидкости отсутствуют касательные напряжения и исчезают температурные флуктуации на границах. Эти граничные условия будут использоваться далее в решении задачи (10). В координатах, нормированных на расстояние между плоскостями  $H$ , граничные условия запишутся в виде

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \text{ при } z = 0, 1. \quad (13)$$

Дифференцируя уравнение непрерывности в системе (6) по переменной  $z$ , получаем граничное соотношение (13) в виде

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0, \quad \theta = 0 \text{ при } z = 0, 1. \quad (14)$$

**Задача Рэлея.** Задача (10), (14) носит название задачи Рэлея о конвективной устойчивости бесконечного плоскопараллельного слоя жидкости. Для ее решения применим операцию двойного ротора  $\nabla \times \nabla \times$  к уравнению Навье – Стокса в системе (10). Эта операция повышает порядок уравнения со второго до четвертого, но позволяет исключить переменную давления  $p_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial \tau} &= \Delta \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\kappa}) \theta, \\ \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \mathbf{v} \boldsymbol{\kappa} &= \Delta \theta, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Спроецируем скорость на ось  $z$  и запишем линейную замкнутую систему уравнений относительно компоненты скорости  $v_z = v_z(x, y, z, \tau)$  и флуктуаций температуры  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v_z}{\partial \tau} &= \Delta \Delta v_z + \text{Ra} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \\ \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - v_z &= \Delta \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение линейной двумерной задачи (16) представимо в виде совокупности нормальных возмущений, экспоненциально зависящих от времени и осциллирующих в плоскости  $(x, z)$ :

$$\begin{aligned} v_z(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{1nl} \exp(-\lambda_{nl} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x), \\ \theta(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{2nl} \exp(-\lambda_{nl} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $k_x$  – минимальное волновое число вдоль направления  $x$ ;  $\lambda_{nl}$  – декремент, характеризующий временной ход возмущения. При  $\lambda_{nl} > 0$  возмущения будут затухать, решение устойчиво; при  $\lambda_{nl} < 0$  возмущения будут нарастать, решение неустойчиво. При этом решение (16) будет неустойчивым, если хотя бы один из декрементов  $\lambda_{nl}$  будет отрицательным. Условие  $\lambda_{nl} = 0$  соответствует периодическому решению в плоскости  $(x, z)$ . Коэффициенты  $c_{1nl}$  и  $c_{2nl}$  определяются из линейной однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_{nl} c_{1nl} d_{nl}^2 &= c_{1nl} d_{nl}^4 - \text{Ra} c_{2nl} (lk_x)^2, \\ \lambda_{nl} \text{Pr} c_{2nl} + c_{1nl} &= c_{2nl} d_{nl}^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где введено обозначение  $d_{nl}^2 = (n\pi)^2 + (lk_x)^2$ . Система уравнений (18) является задачей на отыскание собственных функций и собственных значений для стационарной системы, описывающей нейтральные возмущения

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\kappa}) \theta &= 0, \\ \Delta \theta + \mathbf{v} \boldsymbol{\kappa} &= 0, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом собственные функции

$$\varphi_{nl} = \begin{pmatrix} c_{1nl} \\ c_{2nl} \end{pmatrix} \sin(n\pi z) \sin(lk_x x), \quad (20)$$

относящиеся к различным индексам  $n$  и  $l$ , ортогональны друг другу в силу выполнения соотношений

$$\int_{-1}^1 \sin m\pi x \cdot \sin n\pi x dx = \delta_{nm}, \quad \frac{k_x}{\pi} \int_{-\pi/k_x}^{\pi/k_x} \sin(lk_x x) \cdot \sin(mk_x x) dx = \delta_{lm} \quad (21)$$

и образуют полный набор. Коэффициенты  $c_{1nl}$  и  $c_{2nl}$  с учетом условия нормировки

$$\frac{\pi}{k_x} (c_{1nl}^2 + c_{2nl}^2) = 1 \quad (22)$$

имеют вид

$$c_{1nl} = d_{nl}^2 \sqrt{\frac{k_x}{\pi(1+d_{nl}^2)}}, \quad c_{2nl} = \sqrt{\frac{k_x}{\pi(1+d_{nl}^2)}}. \quad (23)$$

Однородная линейная система уравнений (18) имеет нетривиальное решение в случае, если ее определитель равен нулю. Соответствующие корни характеристического уравнения вычисляются по формуле

$$\lambda_{nl\pm} = \frac{d_{nl}^2(1+\text{Pr})}{2\text{Pr}} \pm \sqrt{\frac{d_{nl}^4(\text{Pr}-1)^2}{4\text{Pr}^2} + \frac{\text{Ra}(lk_x)^2}{d_{nl}^2\text{Pr}}}. \quad (24)$$

В общем случае декремент  $\lambda_{nl}$  может быть комплексным числом. Однако в случае подогрева снизу число Рэлея положительно, поэтому подкоренное выражение в формуле (24) всегда является вещественным и флуктуации температуры и скорости имеют монотонный характер. С ростом числа Рэлея корень  $\lambda_{nl-}$  может изменить знак с «+» на «-», тогда решение (17) станет неустойчивым. Соответствующий переход из режима устойчивого молекулярного теплопереноса к режиму неустойчивого вихревого течения определяется равенством  $\lambda_- = 0$ , из которого следует формула для критического числа Рэлея:

$$\text{Ra}_{cr} = \frac{(n^2\pi^2 + l^2k_x^2)^3}{l^2k_x^2}. \quad (25)$$

Критическое число Рэлея может принимать минимальное значение, которое согласно (20) рассчитывается по формуле

$$\text{Ra}_{\min} = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 657,5, \quad n=1, \quad l=1. \quad (26)$$

В системе с числом Рэлея меньше минимального критического значения наблюдение конвективных упорядоченных структур невозможно.

Согласно (25) в случае  $\text{Ra} = \text{Ra}_{cr}$  задача Рэлея имеет нестационарное периодическое решение в виде конвективных валов с осями, параллельными оси  $y$ . Каждая конвективная ячейка состоит из двух валов, при этом вращение соседних валов осуществляется в противоположные стороны.

Проведем оценку критического числа Рэлея на основе формулы (25), справедливой для бесконечного плоского горизонтального слоя со свободными границами. Строго говоря, такое приближение будет верным для большого аспектного отношения  $G$ :

$$G = L/H, \quad (27)$$

где  $L$  – характерный горизонтальный размер области, в остальных случаях требуется уточнение расчетов. Как показано в работе [23] с использованием метода Бубнова – Галеркина и подтверждено в эксперименте [24] для прямоугольной шахты – наличие боковых стенок в случае жестких границ приводит к формированию валов, параллельных короткой стороне резервуара. Тогда за приоритетное направление ориентации конвективных валов выберем ширину шахты  $c = 0,31m$ . Безразмерное минимальное волновое число оценим с учетом длины шахты  $b = 0,38m$ :

$$k_x = \frac{2\pi}{b} H = 8,6, \tag{28}$$

а минимальное критическое число Рэлея имеет значение  $Ra_{2min} = 8000$ .

Кроме двумерных конвективных валов в шахте возможно появление трехмерных периодических ячеек. Как отмечается в [8], формирование устойчивых двумерных или трехмерных конвективных структур во многом определяется температурной зависимостью вязкости жидкости, числом Прандтля, а также формой и теплопроводностью стенок, ограничивающих жидкость.

Для решения трехмерной задачи Рэлея дополним систему (16) уравнениями для  $x$ - и  $y$ -компонент скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v_x}{\partial \tau} &= \Delta \Delta v_x - Ra \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial \Delta v_y}{\partial \tau} &= \Delta \Delta v_y - Ra \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \tag{29}$$

Решение систем уравнений (16) и (29) с использованием [25, 26] представляется в виде

$$\begin{aligned} v_z(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{1nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x) \cos(mk_y y), \\ v_x(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{3nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \cos(n\pi z) \sin(lk_x x) \cos(mk_y y), \\ v_y(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{4nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \cos(n\pi z) \cos(lk_x x) \sin(mk_y y), \\ \theta(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{2nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x) \cos(mk_y y), \end{aligned} \tag{30}$$

где  $m$  – номер гармоники колебания вдоль оси  $y$ ,  $k_y$  – минимальное волновое число вдоль направления  $y$ :  $k_y = 2\pi H/c$ . Коэффициенты  $c_{3nlm}$  и  $c_{4nlm}$  связаны с коэффициентом  $c_{1nlm}$  равенствами

$$c_{3nlm} = -\frac{\pi n l k_x}{l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2} c_{1nlm}, \quad c_{4nlm} = -\frac{\pi n m k_y}{l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2} c_{1nlm}. \tag{31}$$

Решение (30) также удовлетворяет необходимым граничным условиям: на боковых стенках шахты должны исчезать нормальные составляющие горизонтальной скорости. Подставляя граничные значения для компонент скорости  $v_x$  и  $v_y$ , имеем

$$v_x(x = 0, b; y; z) = 0, \quad v_y(x; y = 0, c; z) = 0. \tag{32}$$

Соответствующее критическое число Рэлея для трехмерного случая имеет вид

$$Ra_{cr} = \frac{(n^2 \pi^2 + l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2)^3}{l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2}, \tag{33}$$



а его минимальное значение для  $n = 1, l = 1, m = 1$  с учетом

$$k_y = \frac{2\pi}{c} H = 10,5 \quad (34)$$

равно  $Ra_{3\min} = 40000$ .

В шахте (см. рис. 1) исследовались два режима истечения теплового потока, интерпретируемые на основе периодических решений задачи Рэля. Для первого режима мощность составляла 90 Вт, температуры на входе и выходе из шахты – 84 и 57 °С. Для второго режима мощность была 125 Вт, температуры на входе и выходе из шахты – 103 и 68 °С. Температура воздуха окружающей среды равнялась 21 °С. Соответствующие экспериментальные числа Рэля можно оценить с использованием формулы (9), тогда в первом режиме  $Ra_1 = 1,89 \cdot 10^8$ , во втором –  $Ra_2 = 1,99 \cdot 10^8$ . Квазипериодические конвективные структуры наблюдались и в первом, и во втором случае, однако при подводе меньшей мощности размах колебаний нитей был более значительным.

Оценим максимальный порядок конвективных валов и ячеек на основе критических чисел Рэля в соответствии с формулами (25) и (33). Подберем номера гармоник  $n, l, m$  таким образом, чтобы они максимально приближались к экспериментальным значениям  $Ra_1$  и  $Ra_2$ . Для равных значений  $n$  и  $l$  в случае конвективных валов имеем  $n = l = 12$  и  $Ra_{1cr} = 1,7 \cdot 10^8$ . Для равных значений  $n, l, m$  в случае конвективных ячеек имеем  $n = l = m = 8$  и  $Ra_{2cr} = 1,6 \cdot 10^8$ . В обоих случаях теоретические критические числа Рэля ближе к экспериментальному значению  $Ra_1$ , что возможно и обуславливает более ярко выраженные квазипериодические движения воздуха в шахте. Поскольку порядок конвективных ячеек меньше, чем конвективных валов, вероятнее всего именно трехмерные ячейки присутствуют в шахте. При этом на основании решения (30) устойчивыми будут ячейки всех порядков с первого по восьмой, однако в силу неидеальности граничных условий появляется только часть из них. Внешний вид конвективных структур можно наглядно представить с помощью визуализации поля скоростей в каждой точке пространства шахты, выбрав, например, одно слагаемое в решении (30). На рис. 3 и 4 представлены проекции трехмерной конвективной ячейки в плоскости  $(x, y)$  и плоскости  $(x, z)$  для гармоник  $n = 1, l = 2$  и  $m = 2$ .

**Эксперимент.** Конвективные ячейки Бенара наблюдались в шахте над четырехрядным оребранным пучком в виде гейзерных течений воздуха. Обратное течение воздуха в шахте фиксировалось путем установки внутрь шахты сетки из легких нитей, закрепленной на жесткой рамке. Рамка устанавливалась на высоте  $h = 37$  см от оребранный пучка труб (см. рис. 2). На рис. 5

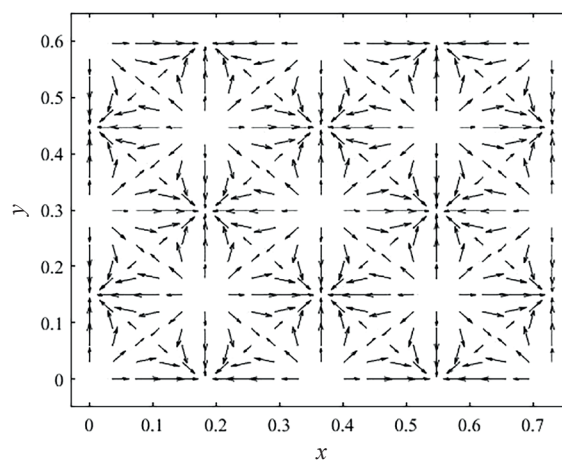


Рис. 3. Ячейки Рэля – Бенара в вытяжной шахте для  $n = 1, l = 2, m = 2$ ; стрелками обозначено направление скорости воздуха в плоскости  $(x, y)$

Fig. 3. Rayleigh – Benard cells in the exhaust shaft for  $n = 1, l = 2, m = 2$ ; arrows indicate the direction of the air velocity in the plane  $(x, y)$

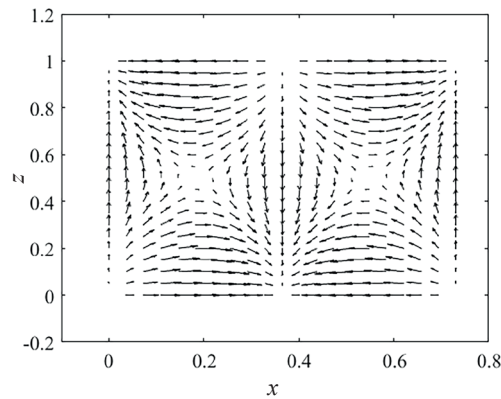


Рис. 4. Параметры для ячеек Рэлея – Бенара те же, что и на рис. 3; стрелками обозначено направление скорости воздуха в плоскости  $(x, z)$

Fig. 4. The parameters for the Rayleigh – Benard cells are the same as in Fig. 3; the arrows indicate the direction of the air velocity in the plane  $(x, z)$

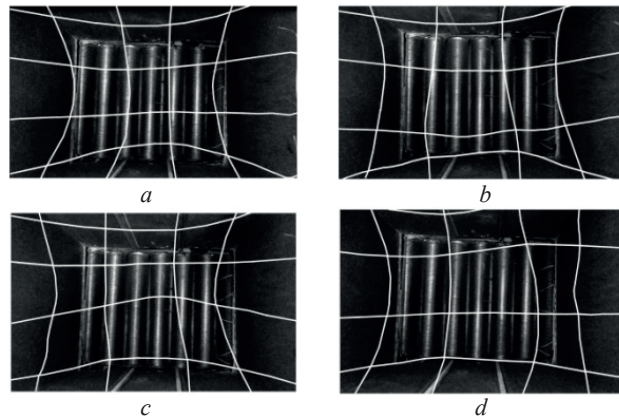


Рис. 5. Квазипериодические структуры воздушных потоков в шахте. Время съемок: 4-я (a), 13-я (b), 17-я (c), 20-я (d) секунды от начала наблюдения (для лучшей видимости нити утолщены и выделены белым цветом)

Fig. 5. Quasiperiodic structures of air flows in the shaft. Shooting time: 4th (a), 13th (b), 17th (c), 20th (d) seconds from the start of observation (for the better visibility, the threads are thickened and highlighted in white)

продемонстрировано положение нитей в различные моменты времени для подведенной мощности 90 Вт. По направлению деформации нитей можно судить о направлении воздушных потоков в шахте. Так, на рис. 5, a отчетливо видно, что холодный воздух задувается в шахту с четырех сторон возле стенок, однако потоки возле боковых поверхностей шахты гораздо интенсивнее, чем возле передней и задней стенок. На рис. 5, b деформация сетки видна в центре, на рис. 5, c наблюдается задувание потока воздуха ближе к правой боковой поверхности шахты, причем на крайней левой нити заметны волны. На рис. 5, d показан задув воздуха в центре справа, также хорошо заметны волны на крайней правой нити, свидетельствующие о наличии близко расположенных противоположных по направлению воздушных потоков в шахте.

Если нити находятся на небольшой высоте над пучком шахты, то амплитуда колебаний резко снижается. Видимо, в непосредственной близости от поверхности нагрева идет перестройка температурного поля от неоднородного распределения с максимумами в межреберном пространстве к равномерному нагреву по мере удаления от пучка.

Течение воздуха в шахте является более сложным по сравнению с предсказаниями конвективной модели Рэлея – Бенара. Это обусловлено в первую очередь неравномерным подогревом воздуха оребренным пучком труб. Воздух засасывается в шахту снизу, проходя расстояние между четырьмя рядами труб и образуя ряд вторичных тепловых источников на входе в шахту, име-

ющих ненулевую начальную скорость. Конвекция Рэлея – Бенара для плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами рассматривалась в [27], где было показано, что наличие ненулевой средней скорости жидкости приводит к значительному росту критического числа Рэлея и повышению устойчивости ее течения. Также являются идеализированными условия исчезновения на границах флуктуаций температуры и скорости, не учитывается конечная теплопроводность стенок шахты. Тем не менее при достижении режима конвективной неустойчивости теплопроводный режим переноса тепла нарушается, появляется конвективная составляющая теплового потока и происходит интенсификация процесса теплообмена [3]. Распад воздушных потоков на квазипериодические структуры и движение в противоположном направлении соседних слоев воздуха приводят к росту скорости передачи теплоты. Увеличение теплоотдачи воздуха в рамках конвекции Рэлея – Бенара может найти применение в теплообменных аппаратах, использующих для охлаждения теплоносителей атмосферный воздух.

**Заключение.** Рассмотрены разнонаправленные течения воздуха в вытяжной шахте над горизонтальным четырехрядным оребренным пучком на основе задачи Рэлея. С использованием рамки с легкими нитями зафиксировано возникновение квазипериодических воздушных структур в шахте над оребренным пучком. Предложена модель для описания течения воздуха внутри шахты на основе линеаризованных уравнений для термогравитационной конвекции с идеализированными граничными условиями. Данная модель позволяет интерпретировать гейзерные течения воздуха в шахте как трехмерные конвективные ячейки Рэлея – Бенара. Представлено решение уравнений термогравитационной конвекции в виде рядов Фурье, коэффициенты которых находятся с программой Matlab. Рассчитаны критические числа Рэлея для двумерного и трехмерного случаев и проведено сравнение с экспериментальными числами Рэлея.

#### Список использованных источников

1. Bénard, H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid / H. Bénard // *Rev. Gen. Sci. Pure Appl.* – 1900. – Vol. 11. – P. 1261–1271, 1309–1328.
2. Rayleigh, L. On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side / L. Rauleigh // *London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag and J. Sci.* – 1916. – Vol. 32, № 192. – P. 529–546.
3. Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
4. Graham, A. Shear patterns in an unstable layer of air / A. Graham // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* – 1933. – Vol. 232, № 707–720. – P. 285–296. <https://doi.org/10.1098/rsta.1934.0008>
5. Tippleskirch, H. V. Über Konvektionzellen, insbesondere im flüssigen Schwefel / H. V. Tippleskirch // *Beitr. Phys. Atmos.* – 1956. – Bd. 29. – P. 37–54.
6. Block, M. J. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film / M. J. Block // *Nature.* – 1956. – Vol. 178, № 4534. – P. 650–651. <https://doi.org/10.1038/178650a0>
7. Ландау, Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3 изд. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
8. Гетлинг, А. В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея – Бенара / А. В. Гетлинг // *Успехи физ. наук.* – 1991. – Т. 161, № 9. – С. 1–80.
9. Manneville, P. A two-dimensional model for three-dimensional convective patterns in wide containers / P. Manneville // *J. de Phys. Fr.* – 1983. – Vol. 44, № 7. – P. 759–765. <https://doi.org/10.1051/jphys:01983004407075900>
10. Finlayson, B. A. The Galerkin method applied to convective instability problems / B. A. Finlayson // *J. Fluid Mech.* – 1968. – Vol. 33, № 1. – P. 201–208. <https://doi.org/10.1017/s0022112068002454>
11. Палымский, И. Б. Численное моделирование сложных режимов конвекции Рэлея – Бенара: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05 / И. Б. Палымский. – Пермь, 2012. – 206 л.
12. Pandey, A. Turbulent superstructures in Rayleigh-Bénard convection / A. Pandey, J. D. Scheel, J. Schumacher // *Nature Commun.* – 2018. – Vol. 9, № 1. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-04478-0>
13. Когерентные структуры в турбулентной атмосфере. Эксперимент и теория / В. В. Носов [и др.] // *Солнечно-земная физика.* – 2009. – Вып. 14. – С. 97–113.
14. Шмерлин, Б. Я. Конвективная неустойчивость Рэлея в присутствии фазовых переходов влаги. Формирование крупномасштабных вихрей и облачных структур / Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник // *Успехи физ. наук.* – 2013. – Т. 183, № 5. – С. 497–510. <https://doi.org/10.3367/ufnr.0183.201305d.0497>
15. Аржаник, А. Р. Постановка демонстраций ячеек Бенара и вихрей Тейлора / А. Р. Аржаник, Ю. П. Михайличенко, Р. Н. Сотириади // *Физ. образование в вузах.* – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 60–67.
16. Трапезников, Д. Е. К вопросу о происхождении столбчатой отдельности в базальтах и ее аналогов / Д. Е. Трапезников, А. С. Сунцов, Т. М. Рыбальченко // *Вестн. Перм. ун-та. Геология.* – 2012. – Вып. 2 (15). – С. 8–15.
17. Теплообмен в классическом методе Чохральского / В. С. Бердников [и др.] // *ИФЖ.* – 2001. – Т. 74, № 4. – С. 122–127.

18. Travis, B. The transition from two-dimensional to three dimensional planforms in infinite-Prandtl-number thermal convection / B. Travis, P. Olson, G. Schubert // *J. Fluid. Mech.* – 1990. – Vol. 216. – P. 71–91. <https://doi.org/10.1017/s0022112090000349>
19. Физика океана / В. В. Богородский [и др.]. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 294 с.
20. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах / Г. Николис, И. М. Пригожин. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
21. Мильман, О. О. Экспериментальное исследование теплообмена при естественной циркуляции воздуха в модели воздушного конденсатора с вытяжной шахтой / О. О. Мильман // *Теплоэнергетика.* – 2005. – № 5. – С. 16–19.
22. Сухоцкий, А. Б. Особенности гравитационного течения нагретого воздуха в вытяжной шахте над многорядным оребренным пучком / А. Б. Сухоцкий, Г. С. Маршалова // *ИФЖ.* – 2019. – Т. 92, № 3. – С. 1–7.
23. Davis, S. H. Convection in a box: linear theory / S. H. Davis // *J. Fluid Mech.* – 1967. – Vol. 30, № 3. – P. 465–478. <https://doi.org/10.1017/s0022112067001545>
24. Stork, K. Convection in boxes: experiments / K. Stork, U. Müller // *J. Fluid Mech.* – Vol. 54, № 4. – P. 599–611. <https://doi.org/10.1017/s0022112072000898>
25. Chandrasekhar, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* / S. Chandrasekhar. – Oxford at the Clarendon Press, 1961. – 654 p.
26. Палымский, И. Б. О моделировании сложных режимов конвекции Рэлея – Бенара / И. Б. Палымский // *Сиб. журн. вычисл. математики.* – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 179–204.
27. Шварцблат, Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами / Д. Л. Шварцблат // *Приклад. математика и механика.* – 1968. – Вып. 2. – С. 276–281.

## References

1. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 1900, vol. 11, pp. 1261–1271, 1309–1328.
2. Rayleigh L. On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1916, vol. 32, no. 192, pp. 529–546.
3. Gershuni G. Z., Zhuhovickij E. M. *Convective Stability of an Incompressible Fluid*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 392 p. (in Russian).
4. Graham A. Shear patterns in an unstable layer of air. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1933, vol. 232, no. 707–720, pp. 285–296. <https://doi.org/10.1098/rsta.1934.0008>
5. Tippelskirch H. V. Über Konvektionzellen, insbesondere im flüssigen Schwefel. *Beiträge zur Physik der Atmosphäre*, 1956, Bd. 29, pp. 37–54 (in German).
6. Block M. J. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature*, 1956, vol. 178, no. 4534, pp. 650–651. <https://doi.org/10.1038/178650a0>
7. Landau L. D., Livshic E. M. *Hydrodynamics*, 3d ed. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p. (in Russian).
8. Getling A. V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Soviet Physics Uspekhi*, 1991, vol. 34, no. 9, pp. 737–776. <https://doi.org/10.1070/pu1991v034n09abeh002470>
9. Manneville P. A two-dimensional model for three-dimensional convective patterns in wide containers. *Journal de Physique France*, 1983, vol. 44, no. 7, pp. 759–765. <https://doi.org/10.1051/jphys:01983004407075900>
10. Finlayson B. A. The Galerkin method applied to convective instability problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 1968, vol. 33, no. 1, pp. 201–208. <https://doi.org/10.1017/s0022112068002454>
11. Palymskiy I. B. *Numerical modeling of complex Releigh–Bénard convections regimes*. Permian, 2012. 206 p. (in Russian).
12. Pandey A., Scheel J. D., Schumacher J. Turbulent superstructures in Rayleigh–Bénard convection. *Nature Communications*, 2018, vol. 9, no. 1. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-04478-0>
13. Nosov V. V., Grigor'ev V. M., Kovadlo P. G., Lukin V. P., Nosov E. V., Torgaev E. V. Coherent structures in a turbulent atmosphere. Experiment and theory. *Solnechno-zemnaya fizika = Solar-Terrestrial Physics*, 2009, iss. 14, pp. 97–113.
14. Shmerlin B. Ja., Kalashnik M. V. Rayleigh convective instability in the presence of phase transitions of water vapor. The formation of large-scale eddies and cloud structures. *Physics-Uspekhi*, 2013, vol. 56, no. 5, pp. 473–485. <https://doi.org/10.3367/ufne.0183.201305d.0497>
15. Arzhanik A. R., Mihajlichenko Ju. P., Sotoriadi R. N. Staging demonstrations of Benard cells and Taylor vortices. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzah = Physics in Higher Education*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 60–67 (in Russian).
16. Trapeznikov D. E., Suncov A. S., Rybal'chenko T. M. On the origin of columnar separation in basalts and its analogues. *Vestnik Permskogo universiteta. Geologiya = Bulletin of Perm University. Geology*, 2012, iss. 2 (15), pp. 8–15 (in Russian).
17. Berdnikov V. S., Vinokurov V. V., Panchenko V. I., Solov'ev S. V. Heat transfer in the classical Czochralski method. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, no. 4, pp. 1007–1014. <https://doi.org/10.1023/a:1012375827219>
18. Travis B., Olson P., Schubert G. The transition from two-dimensional to threedimensional planforms in infinite-Prandtl-number thermal convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, vol. 216, pp. 71–91. <https://doi.org/10.1017/s0022112090000349>
19. Bogorodskii V. V., Gusev A. V., Doronin Yu. P. [et al.] *Ocean Physics*. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1978. 294 p. (in Russian).
20. Nicolis G., Prigozhin I. *Self-organization in Nonequilibrium Systems*. Moscow, Mir Publ., 1979. 512 p. (in Russian).

21. Mil'man O. O. An experimental study of heat transfer during natural air circulation in an air condenser model with an exhaust shaft. *Teploenergetika = Thermal Engineering*, 2005, no. 5, pp. 16–19 (in Russian).

22. Suhockii A. B., Marshalova G. S. Features of the gravitational flow of heated air in an exhaust shaft above a multi-row finned beam. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2019, vol. 92, no. 3, pp. 596–602. <https://doi.org/10.1007/s10891-019-01967-x>

23. Davis S. H. Convection in a box: linear theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 30, no. 3, pp. 465–478. <https://doi.org/10.1017/s0022112067001545>

24. Stork K., Müller U. Convection in boxes: experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 54, no. 4, pp. 599–611. <https://doi.org/10.1017/s0022112072000898>

25. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford at the Clarendon Press, 1961. 654 p.

26. Palymskii I. B. Modeling complex Rayleigh-Benard convection regimes. *Sibirskii zhurnal vychislitelnoi matematiki = Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 179–204 (in Russian).

27. Shvartsblat D. L. On the spectrum of perturbations and convective instability of a plane horizontal layer of a liquid with permeable boundaries. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1968, vol. 32, no. 2, pp. 266–271. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(68\)90127-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(68)90127-5)

### Информация об авторах

**Карлович Татьяна Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [tbkar@mail.ru](mailto:tbkar@mail.ru)

**Сухоцкий Альберт Борисович** – кандидат технических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [alk2905@mail.ru](mailto:alk2905@mail.ru)

**Данильчик Екатерина Сергеевна** – аспирант, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [katya.156.156@gmail.com](mailto:katya.156.156@gmail.com)

### Information about the authors

**Tatyana B. Karlovich** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [tbkar@mail.ru](mailto:tbkar@mail.ru)

**Albert B. Sukhotskii** – Ph. D. (Engineering), Associate Professor of the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [alk2905@mail.ru](mailto:alk2905@mail.ru)

**Ekaterina S. Danilchik** – Postgraduate Student, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [katya.156.156@gmail.com](mailto:katya.156.156@gmail.com)