ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517 Поступила в редакцию 31.03.2021
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-263-273 Received 31.03.2021

В. В. Амелькин[1], М. Н. Василевич[1], Л. А. Хвощинская[2]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Аннотация. Рассмотрена смешанная контактная задача теории упругости в верхней полуплоскости. Границей является действительная полуось, разделенная на четыре части, на каждой из которых заданы граничные условия для действительной или мнимой части двух искомых аналитических функций. С помощью новых неизвестных функций задача сведена к неоднородной краевой задаче Римана с 2 × 2 кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками. Построено дифференциальное уравнение класса Фукса с четырьмя особыми точками, матрицы-вычеты которого найдены «методом логарифмирования» произведения матриц. Единственное решение задачи выражено через интегралы типа Коши при выполнении одного условия разрешимости.

Ключевые слова: смешанная задача теории упругости, краевая задача Римана, проблема Римана, группа монодромии, каноническая матрица, метод логарифмирования

Для цитирования. Амелькин, В. В. Об одном подходе к решению смешанных задач теории упругости / В. В. Амелькин, М. Н. Василевич, Л. А. Хвощинская // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 263–273. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-263-273

Vladimir V. Amel'kin[1], Michail N. Vasilevich[1], Ludmila A. Khvostchinskaya[2]

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus*

ON ONE APPROACH TO THE SOLUTION OF MISCELLANEOUS PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

Abstract. Herein, a miscellaneous contact problem of the theory of elasticity in the upper half-plane is considered. The boundary is a real semi-axis separated into four parts, on each of which the boundary conditions are set for the real or imaginary part of two desired analytical functions. Using new unknown functions, the problem is reduced to an inhomogeneous Riemann boundary value problem with a piecewise constant 2 × 2 matrix and four singular points. A differential equation of the Fuchs class with four singular points is constructed, the residue matrices of which are found by the *logarithm method* of the product of matrices. The single solution of the problem is represented in terms of Cauchy-type integrals when the solvability condition is met.

Keywords: miscellaneous problem of the theory of elasticity, Riemann boundary value problem, Riemann problem, monodromy group, canonical matrix, logarithm method

For citation. Amel'kin V. V., Vasilevich M. N., Khvostchinskaya L. A. On one approach to the solution of miscellaneous problems of the theory of elasticity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 263–273 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-263-273

Формулировка задачи. При решении задач теории упругости исследователи сталкиваются с обширным классом так называемых «плоских задач теории упругости». Для решения таких задач применяются различные методы, начиная с работ Р. Гука, Д. Бернулли, Л. Эйлера, А. Навье и др. По мере применения более сложных материалов наряду с классическими появлялись и новые методы решения: в полиномах и с помощью тригонометрических рядов, методы вариационного исчисления, численные методы решений, метод функций комплексной переменной. В частности, Н. И. Мусхелишвили был предложен метод, основанный на применении теории конформных отображений и интегралов Коши [1]. При этом применялись аналитические функции комплексной переменной, которые представляют напряжения и перемещения, называемые функциями Колосова – Мусхелишвили. С помощью этого метода было дано решение ряда задач на плоскости (см., напр., [2, 3]).

В настоящей статье решается следующая смешанная задача теории упругости. Требуется определить функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ комплексной переменной z, аналитические в верхней полуплоскости, непрерывно продолжимые на $\mathbb{R}\setminus\{-\psi, 0, \psi\}$ и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im} F_1(x) = -\operatorname{Re} F_2(x), \quad x \in (-\infty, 0);\\
&\operatorname{Im} F_1(x) = \operatorname{Re} F_2(x), \quad x \in (0, +\infty);\\
&\operatorname{Re} F_1(x) = f_1(x), \quad x \in (-\psi, \psi);\\
&\operatorname{Im} F_2(x) = f_2(x), \quad x \in (-\infty, -\psi) \cup (\psi, +\infty),
\end{aligned} \tag{1}$$

где f_1 и f_1 – заданные функции. При этом решение задачи ищем в классе функций, ограниченных или почти ограниченных (допускающих логарифмическую особенность) при $z \to 0$, $z \to \pm\psi$, $z \to \pm\infty$.

Решение задачи. Результаты. Прежде всего сведем сформулированную задачу к краевой задаче Римана. Для этого с помощью формул, связывающих значения функций и их комплексно-сопряженные значения,

$$\operatorname{Re} F = \frac{1}{2}(F + \overline{F}), \qquad \operatorname{Im} F = \frac{1}{2i}(F - \overline{F}),$$

запишем четыре системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} F_1(x) - \overline{F}_1(x) = -iF_2(x) - i\overline{F}_2(x), \\ F_2(x) - \overline{F}_2(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_1, \qquad
\begin{cases} F_1(x) - \overline{F}_1(x) = -iF_2(x) - i\overline{F}_2(x), \\ F_1(x) + \overline{F}_1(x) = 2f_1(x), \end{cases} \quad x \in l_2,\\
&\begin{cases} F_1(x) - \overline{F}_1(x) = iF_2(x) + i\overline{F}_2(x), \\ F_1(x) + \overline{F}_1(x) = 2f_1(x), \end{cases} \quad x \in l_3, \qquad
\begin{cases} F_1(x) - \overline{F}_1(x) = iF_2(x) + i\overline{F}_2(x), \\ F_2(x) - \overline{F}_2(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_4,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $l_1 = (-\infty, -\psi)$, $l_2 = (-\psi, 0)$, $l_3 = (0, \psi)$, $l_4 = (\psi, +\infty)$.

Введем две новые неизвестные вектор-функции

$$\Phi^+(z) = \left(F_1(z), \overline{F_2(\overline{z})}\right) = \left(\Phi_1^+(z), \Phi_2^+(z)\right), \quad \Phi^-(z) = \left(\overline{F_1(\overline{z})}, F_2(z)\right) = \left(\Phi_1^-(z), \Phi_2^-(z)\right),$$

удовлетворяющие условию $\Phi^+(z) = \overline{\Phi^-(\overline{z})}$..

Систему (2) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_1, \qquad
\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_1^-(x) + \Phi_1^+(x) = 2f_1(x), \end{cases} \quad x \in l_2,\\
&\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = i\Phi_2^-(x) + i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_1^-(x) + \Phi_1^+(x) = 2f_1(x), \end{cases} \quad x \in l_3, \qquad
\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = i\Phi_2^-(x) + i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x). \end{cases} \quad x \in l_4.
\end{aligned} \tag{3}$$

Матричная форма записи системы (3) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}1 & i\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^+(x)\\\Phi_2^+(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -i\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^-(x)\\\Phi_2^-(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2if_2(x)\end{pmatrix},\quad x\in l_1,$$

$$\begin{pmatrix}1 & i\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^+(x)\\\Phi_2^+(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -i\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^-(x)\\\Phi_2^-(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2f_1(x)\end{pmatrix},\quad x\in l_2,$$

$$\begin{pmatrix}1 & -i\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^+(x)\\\Phi_2^+(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^-(x)\\\Phi_2^-(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2f_1(x)\end{pmatrix},\quad x\in l_3,$$

$$\begin{pmatrix}1 & -i\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^+(x)\\\Phi_2^+(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^-(x)\\\Phi_2^-(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2if_2(x)\end{pmatrix},\quad x\in l_4.$$

Таким образом, получили неоднородную краевую задачу Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками:

$$\Phi^+(x)=A_k\Phi^-(x)+G_k(x),\quad x\in l_k,\ k=1,...,4, \tag{4}$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -2i\\0 & 1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-2i & -1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\2i & -1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1 & 2i\\0 & 1\end{pmatrix};$$

$$G_1(x)=-2f_2(x)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\quad G_2(x)=2f_1(x)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\quad G_3(x)=2f_1(x)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix},\quad G_4(x)=2f_2(x)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}.$$

Следующий шаг состоит в решении неоднородной краевой задачи (4). Чтобы решить ее, построим каноническую матрицу $X(z)$, т. е. матрицу, являющуюся решением соответствующей однородной краевой задачи [4; 5, с. 52]:

$$X^+(x)=A_kX^-(x),\quad x\in l_k,\ k=1,...,4, \tag{5}$$

причем такую, что [2]:

1) $\det X(z)\neq 0$ для $\forall z\neq a_k$, где $a_1=-\psi,\ a_2=0,\ a_3=\psi,\ a_4=\infty$;

2) столбцы матрицы $X(z)$ принадлежат указанному классу функций;

3) порядок определителя $X(z)$ равен сумме порядков его столбцов, где под порядком столбца понимается наименьший из порядков нулей элементов этого столбца на ∞.

Отметим далее следующие два факта:

1) каноническая матрица $X(z)$ задачи (5) является решением дифференциального уравнения класса Фукса

$$\frac{dX}{dz}=X\sum_{k=1}^{3}\frac{U_k}{z-a_k} \tag{6}$$

с четырьмя особыми точками $a_1=-\psi,\ a_2=0,\ a_3=\psi,\ a_4=\infty$, матрицы-вычеты которого подобны матрицам

$$W_k=\frac{1}{2\pi i}\ln V_k,\quad k=1,...,4,$$

где матрицы $V_k=A_kA_{k+1}^{-1},\ k=1,...,4,\ (A_5=A_1)$, образуют группу монодромии дифференциального уравнения (6) [6, с. 272];

2) после умножения обеих частей уравнения (6) справа на невырожденную постоянную матрицу C его можно переписать в виде

$$\frac{d(XC)}{dz} = (XC)\sum_{k=1}^{3}\frac{C^{-1}U_kC}{z-a_k}. \tag{7}$$

При этом после обхода переменной z точки a_k, $k=1,\ldots,4,$ матрица XC дифференциального уравнения (7) умножается слева на матрицу V_k, $k=1,\ldots,4,$ являющуюся одной из порождающих матриц группы монодромии дифференциального уравнения (6) [6, с. 273].

Отсюда следует, что, во-первых, канонической матрицей, удовлетворяющей уравнению (6), будет любая матрица вида XC с матрицей $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}$, где элемент c – произвольная постоянная. Во-вторых, матрицы-вычеты уравнения (6) определяются с точностью до преобразования подобия, т. е. это матрицы-вычеты уравнения (7).

Имея в виду отмеченное, обратимся теперь к построению матриц-вычетов U_k уравнения (6). При этом остановимся на «методе логарифмирования произведения матриц» второго порядка [7, 8], в основе которого лежит следующее

У т в е р ж д е н и е. *Пусть* V_1, V_2 *– постоянные невырожденные матрицы второго порядка,* $V_3 = V_1 V_2$, α_k, β_k *– характеристические числа матриц* V_k, $\rho_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$ *– характеристические числа матриц* $W_k=\frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k=1,2,3,$ *причем* $\left|\mathrm{Re}(\sigma_k-\rho_k)\right|\le 1$, $k=1,2,$ $0<\mathrm{Re}(\sigma_3-\rho_3)\le 1$, $\rho_1+\sigma_1+\rho_2+\sigma_2=\rho_3+\sigma_3$. *Тогда с точностью до преобразования подобия диагональной матрицей* $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}$ *матрица* $S_3=\begin{pmatrix}\rho_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}$ *представима в виде суммы двух матриц, а именно:*

$$S_3 = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} s_1 & d\\ c & s_1'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -d\\ -c & s_2'\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_1\sigma_1-(\rho_3-\rho_2)(\rho_3-\sigma_2)}{\sigma_3-\rho_3} & \dfrac{(\rho_3-\rho_1)(\sigma_3-\sigma_1)-\rho_2\sigma_2}{\sigma_3-\rho_3}c\\ \dfrac{\rho_2\sigma_2-(\rho_3-\sigma_1)(\sigma_3-\rho_1)}{c(\sigma_3-\rho_3)} & \dfrac{(\sigma_3-\rho_2)(\sigma_3-\sigma_2)-\rho_1\sigma_1}{\sigma_3-\rho_3}\end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_2\sigma_2+(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\sigma_1)}{\sigma_3-\rho_3} & \dfrac{\rho_2\sigma_2-(\rho_3-\rho_1)(\sigma_3-\sigma_1)}{\sigma_3-\rho_3}c\\ \dfrac{(\rho_3-\sigma_1)(\sigma_3-\rho_1)-\rho_2\sigma_2}{c(\sigma_3-\rho_3)} & \dfrac{(\sigma_3-\rho_1)(\sigma_3-\sigma_1)-\rho_2\sigma_2}{\sigma_3-\rho_3}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $S_k \sim W_k$, $k=1,2,$ c *– произвольная постоянная.*

Чтобы найти элементы матриц S_1 и S_2, сначала непосредственными вычислениями находим матрицы V_k, $k=1,\ldots,4,$ – порождающие матрицы группы монодромии дифференциального уравнения (6). Именно,

$$V_1 = A_1A_2^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2i\\ 2i & -1\end{pmatrix},\quad V_2 = A_2A_3^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 4i & 1\end{pmatrix},$$

$$V_3 = A_3A_4^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2i\\ 2i & 3\end{pmatrix},\quad V_4 = A_4A_1^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 4i\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

А тогда характеристические числа матриц $\alpha_k=\beta_k=1,$ $k=1,\ldots,4.$

Далее, при вычислении характеристических чисел ρ_k и σ_k, $k=1,\dots,4$, выбираем ветви логарифмов таким образом, чтобы решение краевой задачи (5) (дифференциального уравнения (6)) было ограниченным в точках a_k, $k=1,2,3$, а при выборе ветвей логарифмов чисел ρ_4 и σ_4 следует учитывать тождество Фукса [9, с. 188]

$$\sum_{k=1}^{4}(\rho_k+\sigma_k)=1. \tag{9}$$

Указанным ограничениям удовлетворяют, например, числа

$$\rho_1=\sigma_1=0,\quad \rho_2=1,\quad \sigma_2=0,\quad \rho_3=\sigma_3=0,\quad \rho_4=\sigma_4=0.$$

Далее находим матрицы $V_1\cdot V_2$ и $V_2\cdot V_3$, их характеристические числа α_{12}, β_{12} и α_{23}, β_{23}:

$$V_{12}=V_1V_2=A_1A_3^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2i\\ -2i & -1\end{pmatrix},\quad V_{23}=V_2V_3=A_2A_4^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2i\\ -2i & -5\end{pmatrix},$$

$$\alpha_{12}=\alpha_{23}=-3+2\sqrt{2}=-\left(\sqrt{2}+1\right)^2,\quad \beta_{12}=\beta_{23}=-3-2\sqrt{2}=-\left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

Находим также числа

$$\rho_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\left[-\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi i}\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\quad \rho_{23}=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{23}=\rho_{12},$$

$$\sigma_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\left[-\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\quad \sigma_{23}=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_{23}=\sigma_{12},$$

где ветви логарифмов выбраны из условий

$$\rho_{12}+\sigma_{12}=\rho_1+\sigma_1+\rho_2+\sigma_2=1,\quad \rho_{23}+\sigma_{23}=\rho_2+\sigma_2+\rho_3+\sigma_3=1.$$

Перепишем теперь условие Фукса (9) в виде

$$\sum_{k=1}^{3}(\rho_k+\sigma_k)=-\rho_4+(1-\sigma_4)=-0+(1-0)=1$$

и представим матрицу $S=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ в виде суммы трех матриц

$$S=\sum_{k=1}^{3}S_k=\sum_{k=1}^{3}\begin{pmatrix}s_k & d_k\\ c_k & s'_k\end{pmatrix},$$

где $S_k\sim W_k$, $k=1,2,3$, записывая матрицу $V_4^{-1}=V_1\cdot V_2\cdot V_3$ в виде произведения двух матриц двумя способами:

$$V_4^{-1}=V_1\cdot V_2\cdot V_3=V_1\cdot\left(V_2\cdot V_3\right)=V_1\cdot V_{23} \tag{10}$$

и

$$V_4^{-1}=V_1\cdot V_2\cdot V_3=\left(V_1\cdot V_2\right)\cdot V_3=V_{12}\cdot V_3. \tag{11}$$

Применим к представлению (10) формулу (8), полагая в ней $\rho_1=\sigma_1=0$ и заменяя ρ_2 на ρ_{23}, σ_2 на σ_{23}, ρ_3 на 0, σ_3 на 1. Получим первое представление матрицы S в виде

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_{23} = \begin{pmatrix} s_1 & c_1 \\ d_1 & s_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - s_1 & -c_1 \\ -d_1 & 1 - s_1' \end{pmatrix},$$

где

$$s_1 = \frac{1}{1-0}\left[\rho_1\sigma_1 - (0-\rho_{23})(0-\sigma_{23})\right] = -\rho_{23}\sigma_{23} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right)\right), \quad s_1' = \rho_1 + \sigma_1 - s_1 = -s_1, \quad c_1 d_1 = s_1 s_1' - \rho_1\sigma_1 = -s_1{}^2.$$

Обозначив

$$\tau = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right), \tag{12}$$

получим следующие значения элементов матрицы S_1:

$$s_1 = -\tau, \quad s_1' = \tau, \quad d_1 = -\frac{\tau^2}{c_1},$$

при этом $S_{23} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_2 \cdot V_3)$.

Аналогично записываем представление матрицы S для произведения (11), заменяя в формуле (8) ρ_1 на ρ_{12}, σ_1 на σ_{12}, ρ_2 на $\rho_3 = 0$, σ_2 на $\sigma_3 = 0$, ρ_3 на 0, а σ_3 на 1. Получим второе представление для матрицы S:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = S_{12} + S_3 = \begin{pmatrix} 0 - s_3 & -c_3 \\ -d_3 & 1 - s_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_3 & c_3 \\ d_3 & s_3' \end{pmatrix},$$

где

$$s_3 = \frac{1}{1-0}\left[\rho_3\sigma_3 - (0-\rho_{12})(0-\sigma_{12})\right] = -\rho_{12}\sigma_{12} = -\tau, \quad s_3' = \rho_3 + \sigma_3 - s_3 = \tau, \quad c_3 d_3 = s_3 s_3' - \rho_3\sigma_3 = -\tau^2,$$

откуда

$$d_3 = -\frac{\tau^2}{c_3}, \quad S_{12} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_1 \cdot V_2).$$

Таким образом, получили два представления для матрицы S:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_{23} = \begin{pmatrix} -\tau & c_1 \\ -\dfrac{\tau^2}{c_1} & \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau & -c_1 \\ \dfrac{\tau^2}{c_1} & 1 - \tau_1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

и

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = S_{12} + S_3 = \begin{pmatrix} \tau & -c_3 \\ \dfrac{\tau^2}{c_3} & 1 - \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tau & c_3 \\ -\dfrac{\tau^2}{c_3} & \tau \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) следует, что $S_2 = S_{12} - S_1 = S_{23} - S_3$ или

$$S_2 = \begin{pmatrix} s_2 & c_2 \\ d_2 & s_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tau & -c_3 - c_1 \\ \tau^2\left(\dfrac{1}{c_3} + \dfrac{1}{c_1}\right) & 1 - 2\tau \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det S_2 = 0,$ то

$$2\tau(1-2\tau) + (c_3 + c_1)\tau^2\left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_1}\right) = 0$$

или

$$2(1-\tau) + \tau\left(\frac{c_1}{c_3} + \frac{c_3}{c_1}\right) = 0.$$

Полагая $c_1 = c,\ \ \dfrac{c_3}{c} = t$ и решая квадратное относительно t уравнение

$$\tau t^2 + 2(1-\tau)t + \tau = 0,$$

находим, что один из корней этого уравнения есть

$$t = \frac{\tau - 1 - \sqrt{1-2\tau}}{\tau}. \tag{15}$$

А тогда при значении t, определяемом формулой (15), матрица S_2 принимает вид

$$S_2 = \begin{pmatrix} 2\tau & -c(1+t) \\ \dfrac{\tau^2}{c}\left(\dfrac{1}{t} + 1\right) & 1 - 2\tau \end{pmatrix}.$$

Матрицы $S_k,\ k = 1, 2, 3,$ являются матрицами-вычетами уравнения (6). Поэтому, подставляя в (6) вместо матриц U_k найденные выше матрицы $S_k,\ k = 1, 2, 3,$ можем записать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет каноническая матрица $X(z)$ однородной краевой задачи (5).

Т е о р е м а 1. *Каноническая матрица $X(z)$ однородной краевой задачи* (5) *удовлетворяет дифференциальному уравнению класса Фукса*

$$\frac{dX}{dz} = X\left[\frac{1}{z+\psi}\begin{pmatrix} -\tau & c \\ -\dfrac{\tau^2}{c} & \tau \end{pmatrix} + \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 2\tau & -c(1+t) \\ \dfrac{\tau^2}{c}\left(\dfrac{1}{t}+1\right) & 1-2\tau \end{pmatrix} + \frac{1}{z-\psi}\begin{pmatrix} -\tau & ct \\ -\dfrac{\tau^2}{ct} & \tau \end{pmatrix}\right], \tag{16}$$

где параметры τ *и* t *находятся по формулам* (12) *и* (15), c *– произвольная постоянная.*

Запишем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее матричному уравнению (16).

Пусть $X(z) = (y_{ij}).$ Обозначим

$$S(z) = (s_{ij}(z)) = \sum_{k=1}^{3} \frac{S_k}{z - a_k} = \frac{S_1}{z+\psi} + \frac{S_2}{z} + \frac{S_3}{z-\psi},$$

где

$$s_{11}(z) = -\frac{\tau}{z+\psi} + \frac{2\tau}{z} - \frac{\tau}{z-\psi} = \frac{-2\tau\psi^2}{z(z^2-\psi^2)},$$

$$s_{22}(z)=\frac{\tau}{z+\psi}+\frac{1-2\tau}{z}+\frac{\tau}{z-\psi}=\frac{z^2+(2\tau-1)\psi^2}{z(z^2-\psi^2)},$$

$$s_{12}(z)=c\left(\frac{1}{z+\psi}-\frac{1+t}{z}+\frac{t}{z-\psi}\right)=c\psi\frac{(t-1)z+(t+1)\psi}{z(z^2-\psi^2)},$$

$$s_{21}(z)=-\frac{\tau^2}{c}\left(\frac{1}{z+\psi}-\frac{1+t}{t\cdot z}+\frac{1}{t(z-\psi)}\right)=-\frac{\tau^2\psi}{c\cdot t}\cdot\frac{(t-1)z-(t+1)\psi}{z(z^2-\psi^2)}.$$

Элементы матрицы $X(z)$ связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y'_{21} & y'_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22}\end{pmatrix},$$

откуда получаем следующую систему уравнений для определения функций y_{11} и y_{12}:

$$\begin{cases} y'_{11}=s_{11}y_{11}+s_{21}y_{12}, \\ y'_{12}=s_{12}y_{11}+s_{22}y_{12}. \end{cases} \tag{17}$$

Системе (17) удовлетворяют также функции y_{21} и y_{22}. Выражая из первого уравнения системы функцию

$$y_{12}=\frac{1}{s_{21}}\left(y'_{11}-s_{11}y_{11}\right) \tag{18}$$

и подставляя во второе уравнение, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''-\left(s_{11}+s_{22}+\frac{s'_{21}}{s_{21}}\right)y'+\left(s_{11}s_{22}-s_{12}s_{21}-s'_{11}+\frac{s'_{21}}{s_{21}}s_{11}\right)y=0 \quad (y=y_{11}). \tag{19}$$

Преобразуем уравнение (19). Поскольку

$$\frac{s'_{21}}{s_{21}}=(\ln s_{21})'=\left(\ln\frac{\tau^2\psi\left[(t-1)z-(t+1)\psi\right]}{c\cdot t\cdot z(z^2-\psi^2)}\right)'=\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z+\psi}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z-\psi},$$

где введено обозначение

$$b=\frac{t+1}{t-1}\psi=\frac{2\tau-1-\sqrt{1-2\tau}}{-1-\sqrt{1-2\tau}}\psi=\sqrt{1-2\tau}\,\psi=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right)}\,\psi, \tag{20}$$

b – действительное число, $0<b<\psi$, то

$$s_{11}+s_{22}+\frac{s'_{21}}{s_{21}}=\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z+\psi}-\frac{1}{z-\psi},$$

$$s_{11}s_{22}-s_{12}s_{21}=\frac{1}{z^2(z^2-\psi^2)^2}\left[-2\tau\psi^2\left(z^2+(2\tau-1)\psi^2\right)-\frac{\tau^2\psi^2}{t}\left((t-1)^2z^2-(t+1)^2\psi^2\right)\right]=$$

$$=-\frac{\tau\psi^2}{z^2\left(z^2-\psi^2\right)^2}\left[2z^2+2(2\tau-1)\psi^2+\tau\left(t+\frac{1}{t}-2\right)z^2-\tau\left(t+\frac{1}{t}+2\right)\psi^2\right]=$$

$$= -\frac{\tau\psi^2}{z^2(z^2-\psi^2)^2}\Big[2z^2 + 2(2\tau-1)\psi^2 + \big(2(\tau-1)-2\tau\big)z^2 + \big(2(\tau-1)+2\tau\big)\psi^2\Big] = 0,$$

$$-s'_{11} + \frac{s'_{21}}{s_{21}}s_{11} = -\frac{\tau}{(z+\psi^2)} + \frac{2\tau}{z^2} - \frac{\tau}{(z-\psi^2)} + \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z+\psi} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\psi}\right)\cdot\left(-\frac{\tau}{z+\psi} + \frac{2\tau}{z} - \frac{\tau}{z-\psi}\right) =$$

$$= \frac{\tau}{z-b}\left(-\frac{1}{z+\psi} + \frac{2}{z} - \frac{1}{z-\psi}\right) = \frac{-2\tau\psi^2}{z(z^2-\psi^2)(z-b)}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (19) можно переписать в виде

$$y'' + \left(\frac{1}{z+\psi} + \frac{1}{z-\psi} - \frac{1}{z-b}\right)y'' - \frac{2\tau\psi^2}{z\left(z^2-\psi^2\right)\left(z-b\right)}y = 0. \tag{21}$$

Т е о р е м а 2. *Дифференциальное уравнение* (16) *с четырьмя особыми точками* $-\psi$, 0, ψ, ∞ *сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению* (21) *с пятью особыми точками* $-\psi$, 0, ψ, b, ∞, *где точка* b *находится по формуле* (20).

З а м е ч а н и е. В окрестности каждой особой точки a_k, $k = 1, \ldots, 4$, уравнение (21) имеет два линейно независимых решения [10, с. 156]:

$$u_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(z-a_k)^n, \quad k = 1, 3,$$

$$u_2(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}z^{n+1}, \quad B_0^{(1)} = B_0^{(2)} = B_0^{(3)} = 1, \tag{22}$$

$$v_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln(z-a_k)\,u_k(z) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(z-a_k)^n, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$u_4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(4)}z^{-n}, \quad v_4(z) = -\frac{1}{2\pi i}\ln z\, u_4(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(4)}z^{-n}.$$

Коэффициенты $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$ рядов (22) после подстановки этих рядов в уравнение (21) находятся из рекуррентных соотношений. Например, для коэффициентов $B_n^{(2)}$, $C_n^{(2)}$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$B_{n+2}^{(2)} = \frac{1}{b\psi^2(n+1)(n+2)}\Big[\left(\psi^2n^2 - b^2\right)B_{n+1}^{(2)} + bn(n+1)B_n^{(2)} - (n-1)^2B_{n-1}^{(2)}\Big],$$

$$C_{n+2}^{(2)} = \frac{1}{b\psi^2(n+1)(n+2)}\Big[\left(\psi^2n^2 - b^2\right)C_{n+1}^{(2)} + bn(n+1)C_n^{(2)} -$$

$$-(n-1)^2C_{n-1}^{(2)} + (n-2)\left(\psi^2B_{n-1}^{(2)} - B_{n-3}^{(2)}\right) - bn\left(\psi^2B_n^{(2)} - B_{n-2}^{(2)}\right)\Big].$$

В окрестности точки $z = b$ уравнение имеет два линейно независимых решения вида

$$u_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(b)}(z-b)^n, \quad v_b(z) = (z-b)^2\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(b)}(z-b)^n.$$

Из соотношения (18) следует, что в качестве функций второго столбца матрицы $X(z)$ можно выбрать функции

$$\tilde{u}_k = \frac{z(z^2-\psi^2)}{z-b}\left[u'_k + \frac{2\tau\psi^2}{z(z^2-\psi^2)}u_k\right], \quad \tilde{v}_k = \frac{z(z^2-\psi^2)}{z-b}\left[v'_k + \frac{2\tau\psi^2}{z(z^2-\psi^2)}v_k\right].$$

Следовательно, каноническая матрица $X(z)$ краевой задачи (5) в окрестности особых точек a_k, $k=1,\ldots,4,$ имеет вид

$$X^+(z) = D_k\begin{pmatrix} u_k & u'_k \\ v_k & v'_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\tau\psi^2(z-b)^{-1} \\ 0 & z(z^2-\psi^2)(z-b)^{-1} \end{pmatrix}, \quad X^-(z) = A_k X^+(z), \tag{23}$$

где D_k – матрицы, приводящие матрицы V_k к нормальной жордановой форме. Такие матрицы находятся по формулам $D_k = \tilde{D}_k T_k$, где $\tilde{D}_k$ – фиксированные матрицы, приводящие матрицы V_k к нормальной жордановой форме $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [8].

Решение неоднородной краевой задачи (4) находим через интеграл типа Коши по формулам [4, 5]

$$\Phi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}X^\pm(z)\sum_{k=0}^{3}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left[X^+(x)\right]^{-1}G_k(x)\frac{dx}{x-z}, \quad a_0 = -\infty, \ a_4 = +\infty. \tag{24}$$

Зная функции $\Phi^\pm(z) = \left(\Phi_1^\pm(z), \Phi_2^\pm(z)\right)$, строим решения, удовлетворяющие условиям симметрии $\Phi^*(z) = \frac{1}{2}\left(\Phi(z) + \overline{\Phi(\overline{z})}\right)$. Следовательно, справедлива следующая

Т е о р е м а 3. *Решение задачи* (1) *имеет вид*

$$F_1(z) = \frac{1}{2}\left(\Phi_1^+(z) + \overline{\Phi_1^-(\overline{z})}\right), \quad F_2(z) = \frac{1}{2}\left(\Phi_2^-(z) + \overline{\Phi_2^+(\overline{z})}\right),$$

где функции $\Phi^\pm(z)$ *определяются по формулам* (24)*, а матрицы* $X^\pm(z)$ *находятся по формулам* (23).

С л е д с т в и е. *Суммарный индекс* χ*, частные индексы* χ_1, χ_2 *неоднородной краевой задачи* (4) *соответственно равны:*

$$\chi = -\sum_{k=1}^{4}(\rho_k + \sigma_k) = -1, \quad \chi_1 = \left[\frac{1-\chi}{2}\right] = -1, \quad \chi_2 = \left[\frac{-\chi}{2}\right] = 0.$$

Задача (1) *имеет единственное решение при выполнении следующего условия разрешимости:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sum_{k=0}^{3}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left[X^+(x)\right]^{-1}G_k(x)dx = 0.$$

Список использованных источников

1. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 709 с.
2. Хвощинская, Л. А. Решение одной задачи теории упругости / Л. А. Хвощинская // Тр. Ин-та математики. – 2000. – Т. 5. – С. 136–141.
3. Хвощинская, Л. А. К решению одной задачи о штампе / Л. А. Хвощинская // Математические методы в технике и технологиях ММТТ-29: сб. тр. XXIX Междунар. науч. конф.: в 12 т. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – Т. 5. – С. 3–5.
4. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
5. Литвинчук, Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г. С. Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
6. Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.

7. Хвощинская, Л. А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана / Л. А. Хвощинская // Материалы Междунар. 17-й науч. конф. им. акад. М. Кравчука, 19–20 мая 2016 г. – Киев: НТУУ «КПИ», 2016. – Т. 1. – С. 263–266.

8. Khvostchinskaya, L. On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions / L. Khvostchinskaya, S. Rogosin // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 / eds.: M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin. – Cambridge Sci. Publ., 2020. – P. 79–112.

9. Матвеев, П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / П. Н. Матвеев. – СПб.: Лань, 2008. – 336 с.

10. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

References

1. Muskhelishvili N. I. *Basic Problems of Mathematical Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 709 p. (in Russian).

2. Khvostchinskaya L. A. The solution of one problem of the theory of elasticity. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2000, vol. 5, pp. 136–141 (in Russian).

3. Khvostchinskaya L. A. To solution of one problem about a stamp. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh MMTT-29: sb. tr. XXIX Mezhdunar. nauch. konf.* T. 5 [Mathematical Methods in Technics and Technologies. Proceedings of International Scientific MMTT-30. Vol. 5.]. Saint Petersburg, Politechn Univ. Publ., 2016, pp. 3–5 (in Russian).

4. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 511p. (in Russian).

5. Litvinchuk G. S. *Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 448 p. (in Russian).

6. Erugin N. P. *The Riemann Problem*. Minsk, Nauka i Technika Publ., 1982. 336 p. (in Russian).

7. Khvostchinskaya L. A. On a one method for constructing differential matrices of the Riemann problem. *Materialy Mezhdunarodnoi semnadtsatoi nauchnoi konferentsii im. akademika M. Kravchuka, 19–20 maya 2016 g. T.1* [Materials 17th Seventeenth International Scientific M. Kravchuk Conference, May 19–20 2016. Vol. 1]. Kyiv, NTUU “KPI” Publ., 2016, pp. 263–266 (in Russian).

8. Khvostchinskaya L., Rogosin S. On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions. Dubatovskaya M. V., Rogosin S. V. (Eds.) *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations*. *AMADE-2018*. Cambridge Scientific Publishers, 2020, pp. 79–112.

9. Matveev P. N. *Lectures on the Analytical Theory of Differential Equations*. Saint Petersburg, Lan’ Publ., 2008. 336 p. (in Russian).

10. Kamke E. *Handbook of Ordinary Differential Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1971. 576 p. (in Russian).

Информация об авторах

Амелькин Владимир Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vamlkn@mail.ru

Василевич Михаил Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasilevich.m@gmail.com

Хвощинская Людмила Аркадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь).
E-mail: ludmila.ark@gmail.com

Information about the authors

Vladimir V. Amel’kin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Differential Equations and Systemic Analysis, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave, 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vamlkn@mail.ru

Michail N. Vasilevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of General Mathematics and Informatics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave, 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasilevich.m@gmail.com

Ludmila A. Khvostchinskaya – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave, 220023, Minsk, Repablic of Belarus). E-mail: ludmila.ark@gmail.com