

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)  
УДК 519.63  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-311-318>

Поступила в редакцию 14.06.2021  
Received 14.06.2021

**Б. Д. Утебаев**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

## КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена построению компактных разностных схем для уравнений конвекции-диффузии с дивергентными и недивергентными конвективными слагаемыми. Доказывается устойчивость и сходимость в сеточных нормах  $W_2^1(\omega_h)$ ,  $C(\bar{\omega}_h)$ . Полученные результаты обобщаются на многомерные уравнения конвекции-диффузии. Приведенные в работе тестовые численные расчеты согласуются с теоретическими выводами.

**Ключевые слова:** компактные разностные схемы, экспоненциальные схемы, уравнение конвекции-диффузии

**Для цитирования.** Утебаев, Б. Д. Компактные разностные схемы для уравнений конвекции-диффузии / Б. Д. Утебаев // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 311–318. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-311-318>

**Bakhadir D. Utebaev**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

## COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

**Abstract.** This work is devoted to the construction of compact difference schemes for convection-diffusion equations with divergent and nondivergent convective terms. Stability and convergence in the discrete norms  $W_2^1(\omega_h)$ ,  $C(\bar{\omega}_h)$  are proved. The obtained results are generalized to multidimensional convection-diffusion equations. The test numerical calculations presented in the work are consistent with the theoretical conclusions.

**Key words:** compact difference schemes, exponential schemes, convection-diffusion equation

**For citation.** Utebaev B. D. Compact difference schemes for convection-diffusion equations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 311–318 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-311-318>

**Введение.** Уравнения конвекции-диффузии широко используются для моделирования различных сложных явлений. Поскольку для большинства прикладных задач невозможно решить уравнения конвекции-диффузии аналитически, эффективные численные алгоритмы становятся все более важными для численного моделирования таких задач. В последнее время много усилий было направлено на разработку компактных схем высокого порядка точности, которые используют только узлы сетки, непосредственно примыкающие к центральному узлу [1–3]. В работе [4] для построения компактных схем конвективные члены заменяются центрально-разностными аппроксимациями. В [5] для аналогичной задачи предложен разностный метод, основанный на преобразовании уравнения конвекции-диффузии к системе уравнений, не содержащей первые производные.

Настоящая работа посвящена построению компактных разностных схем для уравнений конвекции-диффузии с дивергентными и недивергентными конвективными слагаемыми. Компактными принято называть разностные схемы, которые имеют повышенный порядок аппроксимации, но пишутся на шаблоне, не существенно отличающемся от традиционного для данного уравнения [2–4]. Построение таких схем базируется на использовании экспоненциальных схем, рассматриваемых в [6, 7]. Доказывается устойчивость и сходимость в сеточных нормах  $W_2^1(\omega_h)$ ,  $C(\bar{\omega}_h)$ . Полученные результаты обобщаются на многомерные уравнения конвекции-диффузии, приведенные тестовые численные расчеты согласуются с теоретическими выводами.

**Постановка задачи и разностная схема.** В области  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения конвекции-диффузии с недивергентным конвективным слагаемым

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2.$$

Уравнение (1) можно преобразовать к виду [7]

$$b(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_1(x, t), \quad (4)$$

в котором

$$k_1(x) = k(x)b(x), \quad f_1(x, t) = f(x, t)b(x), \quad b(x) = \exp \left( \int_0^x \frac{r(s)}{k(s)} ds \right), \quad b(x) \geq c_1 > 0.$$

Здесь и далее предполагаем, что решение рассматриваемых дифференциальных задач поставлено корректно по Адамару и обладает в  $\bar{Q}_T$  всеми непрерывными производными, необходимыми по ходу изложения. Все входные данные также предполагаются достаточно гладкими.

На равномерной сетке узлов  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \bar{Q}_T\}$ , где  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, h = l/N\}$ ,  $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \leq n \leq K, \tau = T/K\}$  дифференциальную задачу (4), (2), (3) заменим экспоненциальной разностной схемой с переменным весом [1]:

$$by_t = \left( ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x + \varphi, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} bp, \quad (5)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \hat{y}_0 = 0, \quad \hat{y}_N = 0, \quad (6)$$

где

$$y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y = y^{(0,5)} + \tau(\sigma - 0,5)y_t = y^{(0,5)} - \frac{h^2}{12} bpy_t,$$

$$\varphi = \frac{f^n + f^{n+1}}{2} + \frac{h^2}{12} \left( a \left( p \frac{f^n + f^{n+1}}{2} \right)_{\bar{x}} \right)_x, \quad (7)$$

$$a = a(x) = \left( \frac{1}{6} (p(x-h) + p(x)) + \frac{2}{3} p(x-0,5h) \right)^{-1}, \quad p = p(x) = \frac{1}{k_1(x)}, \quad (8)$$

$$k_{1(\pm 1)} = k_1(x \pm h) = k(x \pm h)b(x \pm h), \quad b(x \pm h) = \exp \left( \int_0^{x \pm h} \frac{r(s)}{k(s)} ds \right).$$

Здесь и ниже используются стандартные обозначения теории разностных схем [8, 9]:

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n); \quad \hat{y} = y^{n+1} = y(x_i, t_{n+1}); \quad y^{(0,5)} = 0,5(\hat{y} + y);$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}; \quad y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}; \quad (ay_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right).$$

Введем скалярные произведения и нормы:

$$\begin{aligned} (y, v) &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, & \|y\| &= \sqrt{(y, y)}, \\ (y, v] &= \sum_{i=1}^N y_i v_i h, & \|y\| &= \sqrt{(y, y]}, \\ \|y\|_C &= \max_{x \in \omega_h} |y^n(x)|, & \|y\|_{\bar{C}} &= \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y^n(x)|. \end{aligned}$$

В соответствии с работами [1, 10] нетрудно показать, что разностная схема (5), (6) аппроксимирует исходную задачу (4), (2), (3) четвертым порядком по пространству и вторым по времени, т. е. для ее невязки

$$\psi = -bu_t + \Lambda \sigma \hat{u} + \Lambda(1 - \sigma)u + \varphi,$$

имеет место априорная оценка

$$\|\psi\| \leq M(h^4 + \tau^2), \quad M = \text{const} > 0.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

*Лемма.* Для всякой функции  $y(x)$ , заданной на равномерной сетке  $\bar{\omega}_h$  и обращающейся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$ , справедлива оценка

$$\left[ (b(x), y_{\bar{x}}^2) \right] \leq \frac{4}{h^2} (b(x), y^2), \quad b(x) \geq c_1 > 0, \quad x \in \bar{\omega}_h. \tag{9}$$

Доказательство леммы проводится аналогично, как и для неравенства (9) при  $b(x) = 1$  [8, с. 109].

**Устойчивость разностной схемы.** Для этих целей используем дискретный метод энергетических неравенств. Перепишем разностную схему (5) в виде

$$by_t + \frac{h^2}{12} (a(bpy_t)_{\bar{x}})_x = (ay_{\bar{x}}^{(0,5)})_x + \varphi. \tag{10}$$

Умножим уравнение (10) скалярно на  $2\tau u_t$  и применим разностную формулу Грина:

$$2\tau (b, y_t^2) - \frac{\tau h^2}{6} (a(bpy_t)_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = -2\tau (ay_{\bar{x}}^{(0,5)}, y_{\bar{x}}] + 2\tau (y_t, \varphi).$$

Далее, применяя формулу разностного дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} 2\tau (b, y_t^2) - \frac{\tau h^2}{6} (abp, y_{\bar{x}}^2] - \frac{\tau h^2}{6} (a(bp)_{\bar{x}} y_{t(-1)}, y_{\bar{x}}] = \\ = -(a(\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}), \hat{y}_{\bar{x}} - y_{\bar{x}}] + 2\tau (y_t, \varphi). \end{aligned} \tag{11}$$

Так как

$$2\tau (y_t, \varphi) \leq \tau (b, y_t^2) + \tau (b^{-1}, \varphi^2),$$

то (11) можно переписать в виде

$$J + (a, \hat{y}_{\bar{x}}^2] \leq (a, y_{\bar{x}}^2] + \tau (b^{-1}, \varphi^2),$$

где

$$J = \tau \left[ (b, y_t^2) - \frac{h^2}{6} (b, y_{\bar{x}}^2] - \frac{h^2}{6} (a(bp)_{\bar{x}} y_{t(-1)}, y_{\bar{x}}] \right]. \tag{12}$$

Далее, применяя лемму 1, можно получить неравенства

$$-\frac{h^2}{6}(b, y_{\bar{x}}^2] \geq -\frac{2}{3}(b, y_t^2), \quad (13)$$

$$-\frac{h^2}{6}(a(bp)_{\bar{x}} y_{t(-1)}, y_{\bar{x}}] \geq -\frac{h}{3}(c_2, y_t^2), \quad (14)$$

где  $c_2 = k_2 \left\| (bp)' \right\|_{C[0,1]}$ .

Учитывая полученные неравенства, соотношение (12) можно переписать в виде

$$J \geq \frac{\tau}{3}(b - hc_2, y_t^2).$$

Тогда при выполнении условия

$$h \leq h_0, \quad h_0 = c_1 / c_2, \quad (15)$$

выражение  $J \geq 0$  неотрицательно. Следовательно, с учетом очевидного неравенства

$$(b^{-1}, \varphi^2) \leq 1 / c_1 \|\varphi\|^2$$

приходим к соотношению

$$(a, \hat{y}_{\bar{x}}^2] \leq (a, y_{\bar{x}}^2] + c_3 \tau \|\varphi\|^2, \quad c_3 = 1 / c_1. \quad (16)$$

Итак, имеет место следующее утверждение.

**Т е о р е м а.** Пусть выполнено условие (15). Тогда разностная схема (5), (6) устойчива по начальным данным, правой части и имеют место априорные оценки

$$\begin{aligned} \|y_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 &\leq \frac{1}{k_1}(a, u_{0\bar{x}}^2] + c_4 \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi^k\|^2, \quad c_4 = \frac{1}{k_1 c_1}, \\ \|y^{n+1}\|_C &\leq \frac{\sqrt{l}}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k_1}} \sqrt{(a, u_{0\bar{x}}^2]} + c_5 \left( \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi^k\|^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad c_5 = \sqrt{c_4}. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство теоремы следует из неравенства (16), леммы Гронуолла и вложения [8]

$$\|y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{\bar{x}}\|.$$

**З а м е ч а н и е.** Аналогично (17) для погрешности  $z = y - u$  нетрудно получить оценку

$$\|y^n - u^n\|_C \leq c_6 \sqrt{T} \|\psi\|_C \leq c_7 (h^4 + \tau^2), \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad c_6, c_7 = \text{const} > 0,$$

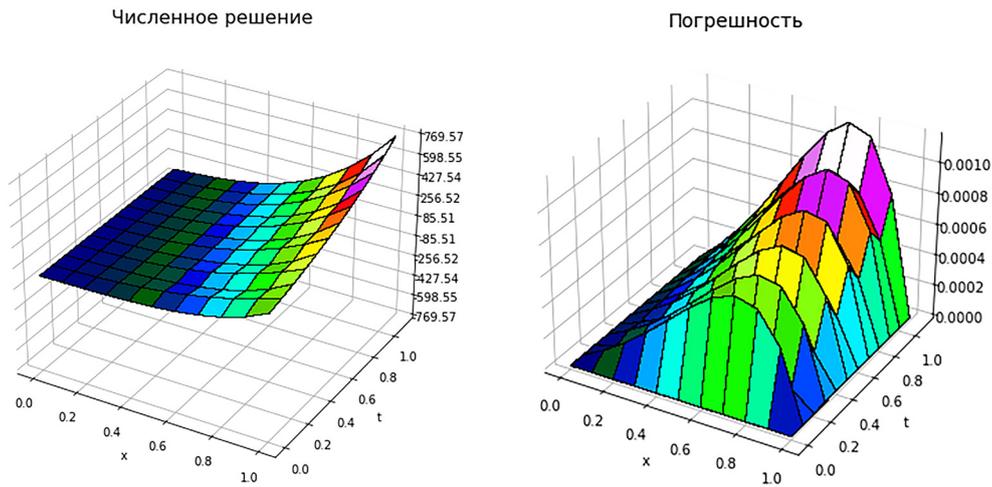
из которой следует сходимость разностного метода с порядком  $4 + 2$ .

**Тестовые численные расчеты.** В данном разделе приводятся численные результаты для уравнения (1) при  $f(x, t) = 0$  с коэффициентами

$$k(x) = (x+1)^6, \quad r(x) = \frac{x+1}{8} - 13(x+1)^5.$$

Начальное и граничные условия определяются из точного решения

$$u(x, t) = e^t (x+1)^8.$$



Численное решение и погрешность при  $T = 1$  с шагами  $h = 1/10, \tau = 1/10$

The numerical solution and error at  $T = 1$  with steps  $h = 1/10, \tau = 1/10$

Для определения порядка скорости сходимости по пространственной и временной переменным  $(4 + 2)$  в норме  $L_\infty$  воспользуемся правилом Рунге [11, 12]:

$$p_\infty^h = \log_2 \frac{\|z(2h, \tau)\|_{L_\infty}}{\|z(h, \tau)\|_{L_\infty}}, \quad p_\infty^\tau = \log_2 \frac{\|z(h, 2\tau)\|_{L_\infty}}{\|z(h, \tau)\|_{L_\infty}}.$$

Для проверки скорости сходимости вдоль пространственного и временного направления берем шаги  $h$  и  $\tau$  так, чтобы выполнялись условия  $h^4 \geq \tau^2$  для определения скорости сходимости разностного решения по пространственной переменной  $p_\infty^h$  и  $\tau^2 \geq h^4$  для определения скорости сходимости сеточного решения по временной переменной  $p_\infty^\tau$ . Именно такой способ рассматривается в [11, 13].

В табл. 1, 2 приведены порядки скорости сходимости по пространственному и временному направлениям в нормах  $L_\infty$  и  $L_2$ . Представленные величины соответствуют моменту времени  $T = 1$ . Данные тестовые численные расчеты согласуются с теоретическими выводами.

Таблица 1. Скорость сходимости по пространственному направлению

Table 1. The rate of convergence in the spatial direction

$h = 0,1$	$\tau = 0,1$	$\ z\ _{L_\infty}$	$p_{L_\infty}^h$	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^h$
$h$	$\tau$	0,013531	—	0,00982	—
$h/2^1$	$\tau/2^2$	0,000855	3,9833	0,00061	3,9989
$h/2^2$	$\tau/4^2$	5,34e-05	3,9999	3,84e-05	3,9999
$h/2^3$	$\tau/8^2$	3,34e-06	3,9999	2,40e-06	3,9999
$h/2^4$	$\tau/16^2$	2,08e-07	4,0000	1,50e-07	4,0000

Таблица 2. Скорость сходимости по временному направлению

Table 2. The rate of convergence in the temporal direction

$h$	$\tau = 0,1$	$\ z\ _{L_\infty}$	$p_{L_\infty}^\tau$	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^\tau$
0,01	$\tau$	0,013667	—	0,009787	—
0,01	$\tau/2^1$	0,003417	1,99957	0,002447	1,99951
0,01	$\tau/2^2$	0,000854	1,99988	0,000611	1,99987
0,01	$\tau/2^3$	0,000213	1,99996	0,000153	1,99993
0,01	$\tau/2^4$	5,34e-05	2,00001	3,82e-05	1,99986

**Компактная схема для уравнения конвекции-диффузии с дивергентными конвективными слагаемыми.** Аналогично уравнению (1) строятся экспоненциальные схемы и для уравнения конвекции-диффузии с дивергентными конвективными слагаемыми

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (r(x)u) + f(x, t), \quad (18)$$

$$0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2, \quad k_1, k_2 = \text{const.}$$

Уравнение (18) преобразуем к виду [6, 7]

$$b(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial}{\partial x} (b(x)u) \right) + f_1(x, t), \quad (19)$$

где

$$k_1(x) = \frac{k(x)}{b(x)}, \quad f_1(x, t) = f(x, t)b(x), \quad b(x) = \exp \left( - \int_0^x \frac{r(s)}{k(s)} ds \right).$$

Сделав замену  $w = b(x)u$  в уравнении (19), можно переписать его в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(x) \frac{\partial}{\partial x} w \right) + f_1(x, t), \quad (20)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= w_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ w(0, t) &= 0, \quad w(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Тогда нетрудно показать, что для уравнения (20) экспоненциальная разностная схема [1, 11]

$$y_t = \Lambda \sigma \hat{y} + \Lambda(1 - \sigma)y + \varphi, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} p, \quad \Lambda y = (a(x)y_{\bar{x}})_x,$$

имеет порядок аппроксимации  $4 + 2$ , т. е. четвертый по пространству и второй по времени. Шаблонный функционал  $\varphi$  и  $a(x)$  определяются по формулам (7), (8). Для этой схемы при  $b(x) = 1$  теорема сохраняет силу.

**Многомерная задача.** В данном разделе приведены постановка и компактная разностная схема начально-краевой задачи для многомерного уравнения конвекции-диффузии.

В области  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : x \in \bar{\Omega}, t \geq 0\}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $\bar{\Omega} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Gamma$  – граница, рассмотрим задачу для  $p$ -мерного уравнения конвекции-диффузии с недивергентными конвективными слагаемыми

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (21)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (22)$$

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

$$0 < k_1 \leq k_\alpha \leq k_2, \quad k_\alpha = k_\alpha(x), \quad r_\alpha = r(x).$$

Как и в одномерном случае, преобразуем уравнение (21) к виду

$$b_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{1\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f_1(x, t),$$

где

$$b_\alpha = b_\alpha(x), \quad k_{1\alpha} = k_{1\alpha}(x) = k_\alpha(x)b_\alpha(x), \quad f_1(x,t) = f(x,t)b_\alpha(x),$$

$$b_\alpha(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{r_\alpha(s)}{k_\alpha(s)} ds\right).$$

В области  $\bar{Q}_T$  рассмотрим равномерную сетку

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, K, \tau = T / K\}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

где множество внутренних узлов пространственной сетки определяется соотношением

$$\omega_h = \left\{x = \left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_p^{(i_p)}\right), x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\right\},$$

а через  $\gamma_h$  обозначено множество ее граничных узлов. На сетке  $\bar{\omega}$  дифференциальную задачу (21), (22) аппроксимируем разностной схемой

$$b_\alpha y_t = 0,5\Lambda(y + \hat{y}) - \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2 \Lambda_\alpha(p_\alpha b_\alpha y_t) + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha} \Lambda_\alpha(p_\alpha \Lambda_\beta y) + \varphi,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau,$$

$$\Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \varphi = \frac{f^n + f^{n+1}}{2} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2 \Lambda_\alpha \left( p_\alpha \frac{f^n + f^{n+1}}{2} \right),$$

$$a_\alpha = \left( \frac{1}{6} (p_\alpha(x-h) + p_\alpha(x)) + \frac{2}{3} p_\alpha(x-0,5h) \right)^{-1}, \quad p_\alpha(x) = \frac{1}{k_{1\alpha}(x)}.$$

Нетрудно показать, что разностная схема аппроксимирует задачу (21), (22) с четвертым порядком по пространственным переменным и вторым по временной, т. е.

$$\psi = O(|h|^4 + \tau^2).$$

Аналогично (21), (22) можно построить компактную схему и для многомерного уравнения конвекции-диффузии с дивергентными конвективными слагаемыми [6].

**Благодарности.** Автор выражает благодарность профессору П. П. Матусу за помощь, оказанную в данной работе.

**Acknowledgments.** The author is very grateful to Professor P. P. Matus for help in this work.

### Список использованных источников

1. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.
2. Толстых, А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А. И. Толстых. – М.: Наука, 1990. – 230 с.
3. Паасонен, В. И. Обобщение методов повышенной точности для нелинейных уравнений 2-го порядка в ортогональных системах / В. И. Паасонен // Численные методы механики сплошной среды. – 1977. – Т. 8, № 2. – С. 94–99.
4. Паасонен, В. И. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами / В. И. Паасонен // Вычисл. технологии. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 55–66.
5. Liao, W. A fourth-order compact finite difference scheme for solving unsteady convection-diffusion equations / W. Liao, J. Zhu // Comput. Simul. Appl. – 2011. – P. 81–96. <https://doi.org/10.5772/25149>
6. Кареткина, Н. В. Безусловно устойчивая разностная схема для параболических уравнений, содержащих первые производные / Н. В. Кареткина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1980. – Т. 20, № 1. – С. 236–240.
7. Самарский, А. А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабишевич. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.

8. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
9. Самарский, А. А. Разностные схемы с операторными множителями / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус. – Минск: ЦОТЖ, 1998. – 442 с.
10. Самарский, А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
11. Матус, П. П. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // *Мат. моделирование*. – 2021. – Т. 33, № 4. – С. 60–78. <https://doi.org/10.20948/mm-2021-04-04>
12. Tingchun Wang. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrodinger equation / Wang Tingchun // *Adv. Numer. Anal.* – 2012. – Vol. 2012. – P. 1–24. <https://doi.org/10.1155/2012/913429>
13. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна – Гордона / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2020. – Т. 64, № 5. – С. 526–533. <http://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533>

## References

1. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90104-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6)
2. Tolstykh A. I. *Compact Difference Schemes and Their Use in Problems of Aerohydrodynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 230 p. (in Russian).
3. Paasonen V. I. Generalization of high-precision methods for second-order nonlinear equations in orthogonal coordinate systems. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy* [Numerical Methods of Continuum Mechanics], 1977, vol. 8, no. 2, pp. 94–99 (in Russian).
4. Paasonen V. I. Compact schemes for systems of second-order equations with convective terms. *Vychislitelnye tekhnologii = Computational Technologies*, 1998, vol. 3, no. 1, pp. 55–66 (in Russian).
5. Liao W., Zhu Jianping. A fourth-order compact finite difference scheme for solving unsteady convection-diffusion equations. *Computational Simulations and Applications*, 2011, pp. 81–96. <https://doi.org/10.5772/25149>
6. Karetkina N. V. An unconditionally stable difference scheme for parabolic equations containing first derivatives. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1980, vol. 20, no. 1, pp. 257–262. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(80\)90078-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90078-6)
7. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Numerical Methods for Solving Convection-Diffusion Problems*. Moscow, Editorial URSS Publ., 1999. 248 p. (in Russian).
8. Samarskii A. A. *Theory of Difference Schemes*. New York, Marcel Dekker Inc., 2001. <https://doi.org/10.1201/9780203908518>
9. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Matus P. P. *Difference Schemes with Operator Factors*. Minsk, TsOTZh Publ., 1998, 432 p. (in Russian).
10. Samarskii A. A., Andreev V. B. *Difference Methods for Elliptic Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 352 p. (in Russian).
11. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for parabolic equations. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 33, no. 4, pp. 60–78 (in Russian). <https://doi.org/10.20948/mm-2021-04-04>
12. Tingchun Wang. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrodinger equation. *Advances in Numerical Analysis*, 2012, vol. 2012, pp. 1–24. <https://doi.org/10.1155/2012/913429>
13. Matus P. P., Anh H. T. K. Compact difference schemes for Klein-Gordon equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 5, pp. 526–533 (in Russian). <http://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533>

## Информация об авторе

**Утебаев Бахадыр Даулетбай улы** – аспирант, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: bakhadir1992@gmail.com

## Information about the author

**Utebaev Bakhadir Dauletbay uli** – Postgraduate Student, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bakhadir1992@gmail.com